

УДК 519.7
DOI: 10.25559/SITITO.17.202101.674

Оригинальная статья

Разработка алгоритма построения решеток мультиопераций на основе неразложимых алгебр

Д. А. Еременко

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ»
им. В.И. Ульянова (Ленина)», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация
197376, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д. 5
er_92@list.ru

Аннотация

Рассматриваемая в статье теория относится к теории функциональных систем. Этот раздел математики исследует функции, которые определены на конечных множествах, а также композиции этих функций. Такие функции используются в математической логике и в универсальной алгебре, в частности, в теории клонов. Традиционными объектами исследования в универсальной алгебре являются алгебры операций и мультиопераций. Одной из основных задач в теории мультиопераций является классификация алгебр. Для решения этой задачи необходимо построить решетку алгебр. В статье представлен алгоритм построения решеток мультиопераций на основе неразложимых алгебр. Для реализации данного алгоритма были найдены все неразложимые алгебры унарных мультиопераций ранга 3, которые были представлены в виде графа по включению. Вершины графа представляют собой неразложимые алгебры, а ребра графа отражают связь между алгебрами по включению. Если между двумя вершинами графа существует путь, значит, одна алгебра является подалгеброй для другой. Используя полученный граф, был реализован алгоритм построения решетки унарных мультиопераций ранга 3. Полученные результаты согласуются с результатами, которые описаны в статье Казиминова А. С., Перязева Н. А. «Алгебры унарных мультиопераций». Данный алгоритм может быть применён для построения решёток мультиопераций более высоких рангов либо больших местностей.

Ключевые слова: операции, мультиоперации, решетка алгебр мультиопераций, неразложимые алгебры операций.

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Еременко, Д. А. Разработка алгоритма построения решеток мультиопераций на основе неразложимых алгебр / Д. А. Еременко. – DOI 10.25559/SITITO.17.202101.674 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2021. – Т. 17, № 1. – С. 24-36.

© Еременко Д. А., 2021



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Development of an Algorithm for Constructing Multioperation Lattices Based on Indecomposable Algebras

D. A. Eremenko

Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI", St. Petersburg, Russian Federation
5 Professora Popova St., St. Petersburg 197376, Russian Federation
er_92@list.ru

Abstract

The theory discussed in the article refers to the theory of functional systems. This branch of mathematics explores functions defined on finite sets, as well as the composition of these functions. Such functions are used in mathematical logic and in universal algebra, and in particular, in the clone theory. The traditional research objects in universal algebra are the algebras of operations and multioperations. One of the main problems in the theory of multioperations is the classification of algebras. To solve this problem, it is necessary to construct a lattice of algebras. The article presents an algorithm for constructing lattices of multioperations based on indecomposable algebras. To implement this algorithm, all indecomposable algebras of unary multioperations of rank 3 were found; they were presented in the form of an inclusion graph. The vertices of the graph are indecomposable algebras, and the edges of the graph reflect the connection between the inclusion algebras. If there is a path between two vertices of the graph, then one algebra is a subalgebra for the other. Using the resulting graph, an algorithm for constructing a lattice of unary multioperations of rank 3 was implemented. The results obtained agree with the results described in the article Kazimirov A.S., Peryazev N.A. "Algebras of unary multioperations". This algorithm can be used to construct lattices of multioperations of higher ranks or large areas.

Keywords: operations, multioperations, lattice of algebras of multioperations, indecomposable algebras of operations.

The author declares no conflicts of interest.

For citation: Eremenko D.A. Development of an Algorithm for Constructing Multioperation Lattices Based on Indecomposable Algebras. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2021; 17(1):24-36. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202101.674>



Введение

Изучение свойств операций на бинарных отношениях ведется достаточно давно. В связи с этим следует отметить некоторые публикации [13-17]. Рассмотрению бинарных отношений как унарных мультиопераций и исследованию алгебр унарных мультиопераций посвящены работы [18-23].

Одной из основных задач в теории мультиопераций является построение решеток алгебр [24-26]. Ранее такие решетки строились посредством перебора всех унарнопорожденных алгебр операций/мультиопераций¹. У этого подхода есть существенные недостатки: это неэффективный перебор унарнопорожденных алгебр при конструировании алгебр операций/мультиопераций, а также большой объем хранящихся данных на каждом шаге работы алгоритма.

С помощью перебора всех унарнопорожденных алгебр операций/мультиопераций была построена решетка унарных мультиопераций ранга 3. Очевидно, что при переходе к большим размерностям мультиопераций (например, к рангам более трех или при переходе от унарных к бинарным и более размерностям) возникают проблемы, и построение данных решеток будет невозможно ввиду их возрастающей вычислительной сложности. Иными словами, требуется предложить новый алгоритм построения решеток.

В статье разработан алгоритм построения решетки мультиопераций на основе неразложимых алгебр мультиопераций. Алгоритм написан на языке Python 3 и применен для построения решетки унарных мультиопераций ранга 3.

Цель работы

Целью работы является разработка и реализация алгоритма построения решеток унарных мультиопераций ранга 3 на основе неразложимых алгебр. Для выполнения данной цели были поставлены следующие задачи:

- найти все неразложимые алгебры унарных мультиопераций ранга 3;
- построить на их основе граф;
- на основе данного графа разработать и реализовать алгоритм построения решетки алгебр унарных мультиопераций ранга 3.

Нахождение всех неразложимых алгебр унарных мультиопераций ранга 3

Неразложимой алгеброй мультиопераций называют алгебру мультиопераций, которая не представима в виде разложения на свои подалгебры. Для нахождения неразложимых алгебр мультиопераций были рассмотрены все унарнопорожденные алгебры мультиопераций. Всего унарнопорожденных алгебр мультиопераций 265. Для каждой из них были найдены соответствующие подалгебры. Далее каждая из них была проверена на неразложимость. В результате всего было найдено 196 неразложимых алгебр унарных мультиопераций ранга 3. Все найденные неразложимые алгебры приведены в таблице 1.

Таблица 1. Неразложимые алгебры унарных мультиопераций ранга 3
Table 1. Indecomposable algebras of unary multioperations of rank 3

Мультиоперация	Замыкание
[(1, 6, 6)]	[(1, 6, 6)]
[(3, 3, 4)]	[(3, 3, 4)]
[(3, 7, 6)]	[(3, 7, 6)]
[(5, 2, 5)]	[(5, 2, 5)]
[(5, 6, 7)]	[(5, 6, 7)]
[(6, 5, 3)]	[(6, 5, 3)]
[(7, 3, 5)]	[(7, 3, 5)]
[(1, 3, 7)]	[(7, 6, 4), (1, 3, 7)]
[(1, 7, 5)]	[(7, 2, 6), (1, 7, 5)]
[(2, 4, 1)]	[(2, 4, 1), (4, 1, 2)]
[(2, 5, 2)]	[(2, 5, 2), (5, 2, 5)]
[(3, 2, 7)]	[(3, 2, 7), (5, 7, 4)]
[(3, 6, 5)]	[(3, 6, 5), (5, 3, 6)]
[(4, 4, 3)]	[(4, 4, 3), (3, 3, 4)]
[(6, 1, 1)]	[(6, 1, 1), (1, 6, 6)]
[(0, 0, 4)]	[(0, 0, 4), (4, 4, 4), (0, 0, 7)]
[(0, 2, 0)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 7, 0)]
[(1, 0, 0)]	[(1, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 1, 1)]
[(1, 2, 5)]	[(1, 2, 5), (5, 2, 5), (5, 2, 4)]
[(1, 2, 6)]	[(1, 6, 4), (1, 2, 6), (1, 6, 6)]
[(1, 2, 7)]	[(5, 6, 4), (1, 2, 7), (5, 6, 7)]
[(1, 3, 4)]	[(1, 3, 4), (3, 2, 4), (3, 3, 4)]
[(1, 3, 5)]	[(7, 2, 4), (1, 3, 5), (7, 3, 5)]
[(1, 7, 4)]	[(3, 2, 6), (1, 7, 4), (3, 7, 6)]
[(1, 7, 7)]	[(1, 6, 6), (7, 6, 6), (1, 7, 7)]
[(3, 3, 7)]	[(7, 7, 4), (3, 3, 4), (3, 3, 7)]
[(3, 7, 7)]	[(7, 7, 6), (3, 7, 6), (3, 7, 7)]
[(5, 7, 5)]	[(5, 2, 5), (7, 2, 7), (5, 7, 5)]
[(5, 7, 7)]	[(5, 7, 7), (7, 6, 7), (5, 6, 7)]
[(7, 3, 7)]	[(7, 7, 5), (7, 3, 5), (7, 3, 7)]
[(0, 2, 4)]	[(0, 2, 4), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(1, 0, 4)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 5, 5)]
[(1, 2, 0)]	[(1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(1, 4, 2)]	[(1, 0, 0), (1, 4, 2), (7, 0, 0), (1, 1, 1)]
[(2, 1, 4)]	[(0, 0, 4), (4, 4, 4), (0, 0, 7), (2, 1, 4)]

¹ Эрлагольская тетрадь. Избранные открытые вопросы по алгебре и теории моделей, поставленные участниками Эрлагольских школ-конференций / сост.: А. Г. Пинус, Е. Н. Порошенко, С. В. Судоплатов. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2018. 40 с.



Мульти-операция	Замыкание
[(2, 7, 2)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 7, 0), (2, 7, 2)]
[(4, 2, 1)]	[(0, 2, 0), (4, 2, 1), (2, 2, 2), (0, 7, 0)]
[(4, 4, 7)]	[(0, 0, 4), (4, 4, 4), (4, 4, 7), (0, 0, 7)]
[(6, 5, 7)]	[(0, 0, 4), (4, 4, 4), (0, 0, 7), (6, 5, 7)]
[(6, 7, 3)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 7, 0), (6, 7, 3)]
[(7, 1, 1)]	[(1, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 1, 1), (7, 1, 1)]
[(7, 5, 3)]	[(1, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 1, 1), (7, 5, 3)]
[(0, 4, 2)]	[(0, 4, 2), (0, 2, 4), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(2, 1, 0)]	[(2, 1, 0), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(4, 0, 1)]	[(4, 0, 1), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 5, 5)]
[(6, 7, 7)]	[(6, 7, 7), (0, 2, 4), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(7, 5, 7)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 5, 5), (7, 5, 7)]
[(7, 7, 3)]	[(1, 2, 0), (7, 7, 3), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(0, 2, 6)]	[(0, 6, 4), (0, 6, 6), (0, 2, 6), (6, 6, 6), (0, 2, 4), (0, 7, 7)]
[(0, 6, 7)]	[(0, 2, 4), (4, 6, 6), (0, 6, 7), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(0, 7, 6)]	[(0, 2, 4), (6, 6, 6), (2, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 6), (0, 7, 7)]
[(1, 0, 5)]	[(5, 0, 4), (5, 0, 5), (1, 0, 5), (7, 0, 7), (1, 0, 4), (5, 5, 5)]
[(1, 3, 0)]	[(3, 3, 3), (1, 2, 0), (3, 2, 0), (7, 7, 0), (1, 3, 0), (3, 3, 0)]
[(2, 7, 3)]	[(0, 2, 0), (6, 7, 2), (2, 2, 2), (0, 7, 0), (2, 7, 2), (2, 7, 3)]
[(3, 3, 1)]	[(7, 3, 0), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 1), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(3, 3, 2)]	[(3, 7, 0), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(4, 5, 7)]	[(0, 0, 4), (4, 4, 4), (4, 4, 7), (6, 4, 7), (0, 0, 7), (4, 5, 7)]
[(5, 0, 7)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (5, 4, 5), (7, 0, 7), (5, 0, 7), (5, 5, 5)]
[(5, 1, 5)]	[(1, 0, 4), (7, 0, 5), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 5, 5), (5, 1, 5)]
[(7, 1, 3)]	[(1, 0, 0), (7, 0, 0), (7, 5, 1), (7, 1, 1), (7, 1, 3), (1, 1, 1)]
[(2, 7, 6)]	[(0, 2, 4), (6, 6, 6), (2, 6, 6), (0, 6, 6), (2, 7, 6), (0, 7, 6), (0, 7, 7)]
[(3, 7, 2)]	[(3, 7, 0), (3, 7, 2), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(4, 6, 7)]	[(0, 2, 4), (0, 6, 7), (4, 6, 7), (4, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(5, 4, 7)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (5, 4, 5), (5, 4, 7), (5, 0, 7), (7, 0, 7), (5, 5, 5)]

Мульти-операция	Замыкание
[(7, 1, 5)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 5), (7, 0, 7), (7, 1, 5), (5, 1, 5), (5, 5, 5)]
[(7, 3, 1)]	[(7, 3, 0), (7, 3, 1), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 1), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(0, 2, 7)]	[(4, 6, 4), (0, 6, 6), (0, 2, 7), (6, 6, 6), (0, 2, 4), (0, 6, 4), (0, 2, 6), (0, 7, 7)]
[(0, 3, 7)]	[(6, 6, 4), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 2, 4), (0, 6, 4), (0, 2, 6), (0, 3, 7), (0, 7, 7)]
[(0, 7, 4)]	[(0, 2, 4), (0, 6, 6), (2, 2, 6), (6, 6, 6), (0, 2, 6), (0, 6, 4), (0, 7, 4), (0, 7, 7)]
[(0, 7, 5)]	[(0, 2, 4), (6, 2, 6), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 2, 6), (0, 6, 4), (0, 7, 5), (0, 7, 7)]
[(1, 0, 7)]	[(5, 4, 4), (5, 0, 5), (1, 0, 4), (1, 0, 7), (7, 0, 7), (5, 0, 4), (1, 0, 5), (5, 5, 5)]
[(1, 1, 5)]	[(7, 0, 4), (5, 0, 5), (1, 0, 4), (7, 0, 7), (1, 0, 5), (5, 0, 4), (1, 1, 5), (5, 5, 5)]
[(1, 3, 1)]	[(3, 3, 3), (1, 2, 0), (7, 2, 0), (3, 2, 0), (7, 7, 0), (1, 3, 1), (1, 3, 0), (3, 3, 0)]
[(1, 3, 3)]	[(1, 3, 3), (3, 3, 3), (7, 6, 0), (1, 2, 0), (3, 2, 0), (7, 7, 0), (1, 3, 0), (3, 3, 0)]
[(1, 4, 6)]	[(1, 4, 4), (1, 0, 4), (1, 4, 6), (1, 0, 6), (7, 0, 7), (5, 0, 5), (5, 5, 5), (1, 6, 6)]
[(1, 5, 5)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 6), (7, 0, 7), (1, 0, 5), (5, 0, 4), (1, 5, 5), (5, 5, 5)]
[(1, 6, 2)]	[(1, 2, 0), (1, 6, 0), (1, 6, 2), (1, 2, 2), (1, 6, 6), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(1, 7, 0)]	[(3, 3, 3), (1, 2, 0), (3, 2, 0), (3, 2, 2), (7, 7, 0), (1, 3, 0), (1, 7, 0), (3, 3, 0)]
[(2, 3, 4)]	[(0, 3, 4), (2, 3, 4), (0, 2, 4), (2, 2, 4), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (3, 3, 4), (0, 7, 7)]
[(3, 0, 7)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (5, 0, 4), (3, 0, 7), (7, 0, 7), (1, 0, 5), (5, 5, 4), (5, 5, 5)]
[(3, 1, 4)]	[(3, 0, 4), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (3, 1, 4), (1, 1, 4), (5, 5, 5), (3, 3, 4)]
[(3, 2, 3)]	[(5, 7, 0), (3, 3, 3), (1, 2, 0), (3, 2, 0), (3, 2, 3), (7, 7, 0), (1, 3, 0), (3, 3, 0)]
[(3, 5, 6)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (3, 0, 6), (7, 0, 7), (1, 5, 4), (5, 5, 5), (3, 5, 6), (3, 7, 6)]
[(4, 2, 5)]	[(0, 2, 4), (4, 2, 5), (5, 2, 5), (0, 2, 5), (4, 2, 4), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(5, 2, 1)]	[(1, 2, 0), (5, 2, 1), (1, 2, 1), (5, 2, 0), (5, 2, 5), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(5, 6, 3)]	[(1, 2, 0), (5, 6, 0), (5, 6, 3), (1, 2, 3), (5, 6, 7), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(6, 3, 5)]	[(7, 3, 5), (0, 2, 4), (6, 2, 4), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 3, 5), (6, 3, 5), (0, 7, 7)]
[(2, 7, 7)]	[(2, 7, 7), (6, 7, 6), (0, 2, 4), (2, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (2, 7, 6), (0, 7, 7), (0, 7, 6)]



Мульти-операция	Замыкание
[(3, 7, 3)]	[(3, 7, 0), (3, 7, 2), (3, 7, 3), (1, 2, 0), (7, 7, 2), (7, 7, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(4, 7, 7)]	[(4, 7, 7), (0, 2, 4), (4, 6, 6), (6, 6, 7), (0, 6, 7), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (4, 6, 7), (0, 7, 7)]
[(5, 5, 7)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (5, 4, 5), (7, 4, 7), (5, 4, 7), (7, 0, 7), (5, 0, 7), (5, 5, 5), (5, 5, 7)]
[(7, 1, 7)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 5), (7, 0, 7), (7, 5, 5), (7, 1, 5), (7, 1, 7), (5, 1, 5), (5, 5, 5)]
[(7, 3, 3)]	[(7, 3, 0), (7, 3, 1), (7, 7, 1), (1, 2, 0), (7, 3, 3), (7, 7, 0), (3, 3, 1), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(0, 4, 6)]	[(0, 0, 4), (4, 4, 4), (0, 4, 6), (0, 4, 4), (0, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 2, 4), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(0, 6, 2)]	[(0, 2, 0), (0, 6, 0), (0, 2, 2), (0, 6, 2), (2, 2, 2), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 2, 4), (0, 7, 7)]
[(2, 3, 0)]	[(2, 2, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 2), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (0, 3, 0), (0, 7, 0), (3, 3, 3), (2, 3, 0), (3, 3, 0)]
[(3, 1, 0)]	[(1, 0, 0), (7, 0, 0), (3, 0, 0), (3, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(4, 0, 5)]	[(0, 0, 4), (4, 0, 5), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (4, 4, 4), (4, 0, 4), (0, 0, 5), (0, 0, 7), (1, 0, 4), (5, 5, 5)]
[(5, 0, 1)]	[(5, 0, 1), (1, 0, 0), (5, 0, 0), (1, 0, 1), (5, 0, 5), (7, 0, 0), (7, 0, 7), (1, 0, 4), (1, 1, 1), (5, 5, 5)]
[(0, 1, 7)]	[(6, 4, 4), (0, 0, 4), (4, 4, 4), (0, 0, 7), (0, 0, 6), (0, 4, 4), (0, 1, 7), (0, 2, 4), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(0, 7, 1)]	[(0, 2, 0), (0, 6, 0), (6, 2, 2), (2, 2, 2), (0, 2, 2), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 7, 1), (0, 2, 4), (0, 7, 7)]
[(1, 1, 3)]	[(7, 4, 0), (1, 0, 0), (3, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 3), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(1, 5, 1)]	[(1, 0, 1), (7, 0, 2), (1, 0, 0), (7, 0, 0), (5, 0, 5), (5, 0, 0), (7, 0, 7), (1, 0, 4), (1, 1, 1), (1, 5, 1), (5, 5, 5)]
[(2, 0, 7)]	[(0, 0, 4), (4, 4, 4), (5, 0, 5), (2, 0, 7), (0, 0, 7), (7, 0, 7), (4, 0, 4), (0, 0, 5), (4, 5, 4), (5, 5, 5), (1, 0, 4)]
[(2, 2, 3)]	[(4, 7, 0), (2, 2, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 2), (2, 2, 3), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (0, 3, 0), (0, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(2, 6, 7)]	[(4, 7, 6), (0, 2, 4), (0, 6, 6), (2, 6, 7), (6, 6, 6), (0, 6, 7), (2, 6, 6), (4, 6, 6), (0, 7, 7), (0, 7, 6), (6, 7, 7)]
[(3, 7, 1)]	[(3, 7, 1), (7, 3, 0), (7, 7, 0), (1, 2, 0), (7, 3, 2), (7, 7, 3), (3, 7, 0), (3, 3, 1), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(5, 1, 7)]	[(1, 0, 4), (7, 0, 5), (5, 0, 5), (7, 4, 5), (7, 0, 7), (5, 0, 7), (5, 4, 5), (5, 5, 5), (5, 1, 5), (5, 1, 7), (7, 5, 7)]

Мульти-операция	Замыкание
[(0, 1, 6)]	[(2, 4, 4), (0, 0, 4), (4, 4, 4), (0, 0, 7), (0, 0, 6), (0, 4, 4), (0, 1, 6), (0, 2, 4), (6, 6, 6), (1, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(0, 4, 7)]	[(0, 0, 4), (0, 4, 4), (4, 4, 6), (0, 4, 7), (0, 4, 6), (4, 4, 4), (0, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 2, 4), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(0, 5, 7)]	[(0, 0, 4), (0, 4, 4), (0, 4, 6), (6, 4, 6), (4, 4, 4), (0, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 5, 7), (0, 2, 4), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(0, 6, 1)]	[(0, 2, 0), (0, 6, 1), (2, 2, 2), (4, 2, 2), (0, 2, 4), (1, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 2, 2), (0, 6, 0), (0, 6, 6), (0, 7, 7)]
[(0, 7, 2)]	[(0, 7, 2), (0, 2, 0), (0, 6, 0), (2, 6, 2), (0, 6, 2), (0, 2, 2), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 0), (2, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 7, 7)]
[(0, 7, 3)]	[(0, 2, 0), (0, 6, 0), (0, 6, 2), (6, 6, 2), (0, 2, 2), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (2, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 7, 0), (0, 7, 3), (0, 7, 7)]
[(1, 1, 2)]	[(3, 4, 0), (1, 0, 0), (3, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2), (7, 7, 0), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 4)]
[(1, 4, 1)]	[(1, 4, 1), (5, 0, 2), (7, 0, 0), (1, 0, 4), (1, 0, 0), (5, 0, 0), (7, 0, 7), (1, 0, 1), (1, 1, 1), (5, 0, 5), (5, 5, 5), (5, 2, 5)]
[(2, 0, 5)]	[(1, 0, 4), (2, 0, 5), (4, 4, 4), (0, 0, 7), (7, 0, 7), (0, 0, 4), (5, 0, 5), (0, 0, 5), (4, 1, 4), (5, 5, 5), (5, 2, 5), (4, 0, 4)]
[(2, 2, 1)]	[(4, 3, 0), (1, 2, 0), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (0, 2, 0), (2, 2, 0), (7, 7, 0), (0, 3, 0), (0, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 3, 0)]
[(2, 3, 2)]	[(2, 3, 2), (2, 2, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 2), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (0, 3, 0), (0, 7, 0), (3, 3, 3), (2, 3, 0), (2, 7, 0), (3, 3, 0)]
[(2, 3, 3)]	[(6, 7, 0), (2, 3, 3), (2, 2, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 2), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (0, 3, 0), (0, 7, 0), (3, 3, 3), (2, 3, 0), (3, 3, 0)]
[(3, 1, 1)]	[(1, 0, 0), (3, 0, 0), (7, 0, 0), (7, 1, 0), (3, 1, 1), (3, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(3, 1, 3)]	[(1, 0, 0), (3, 0, 0), (7, 0, 0), (7, 5, 0), (3, 1, 0), (1, 1, 0), (3, 1, 3), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (7, 7, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0)]
[(4, 0, 7)]	[(0, 0, 4), (5, 0, 5), (4, 4, 5), (7, 0, 7), (4, 0, 7), (4, 0, 5), (4, 0, 4), (4, 4, 4), (0, 0, 5), (5, 5, 5), (0, 0, 7), (1, 0, 4)]
[(4, 5, 5)]	[(0, 0, 4), (4, 0, 5), (5, 0, 5), (6, 0, 7), (7, 0, 7), (4, 0, 4), (4, 4, 4), (0, 0, 5), (0, 0, 7), (5, 5, 5), (4, 5, 5), (1, 0, 4)]
[(5, 1, 1)]	[(7, 0, 1), (1, 0, 0), (5, 0, 1), (7, 0, 0), (5, 0, 5), (5, 0, 0), (7, 0, 7), (1, 0, 1), (5, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 4), (5, 5, 5)]



Мульти-операция	Замыкание
[(5, 5, 1)]	[(5, 0, 1), (1, 0, 0), (7, 0, 3), (5, 0, 0), (5, 0, 5), (1, 0, 1), (7, 0, 7), (7, 0, 0), (5, 5, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 4), (5, 5, 5)]
[(0, 5, 6)]	[(0, 0, 4), (0, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 2, 4), (0, 4, 4), (4, 4, 4), (2, 4, 6), (0, 4, 6), (0, 5, 6), (0, 6, 6), (4, 6, 7), (0, 6, 7), (6, 6, 6), (4, 6, 6), (0, 7, 7), (6, 7, 7), (5, 6, 7)]
[(0, 6, 3)]	[(0, 2, 0), (0, 2, 2), (2, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 6, 0), (4, 6, 2), (0, 6, 3), (0, 6, 2), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 0), (2, 6, 6), (0, 7, 6), (2, 7, 6), (0, 7, 7), (6, 7, 7), (3, 7, 6)]
[(2, 3, 1)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 0), (2, 2, 2), (6, 3, 0), (0, 3, 0), (2, 3, 1), (2, 3, 0), (0, 7, 0), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (7, 7, 0), (3, 7, 0), (3, 7, 2), (7, 7, 3), (3, 7, 6)]
[(3, 1, 2)]	[(1, 0, 0), (3, 0, 0), (7, 0, 0), (3, 1, 0), (1, 1, 0), (3, 1, 2), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (7, 3, 0), (7, 3, 1), (3, 3, 1), (3, 3, 3), (3, 3, 0), (7, 3, 5), (3, 5, 0), (7, 7, 0), (7, 7, 3)]
[(4, 1, 5)]	[(4, 0, 4), (4, 0, 5), (0, 0, 4), (6, 0, 5), (0, 0, 7), (0, 0, 5), (4, 1, 5), (4, 4, 4), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (5, 0, 7), (7, 0, 7), (5, 4, 5), (5, 4, 7), (5, 5, 5), (7, 5, 7), (5, 6, 7)]
[(5, 0, 3)]	[(1, 0, 0), (5, 0, 1), (5, 0, 0), (5, 0, 3), (1, 0, 1), (5, 0, 5), (7, 0, 5), (7, 0, 7), (1, 0, 4), (1, 1, 1), (5, 1, 5), (7, 1, 5), (7, 0, 0), (7, 3, 5), (5, 4, 1), (5, 5, 5), (7, 5, 7)]
[(1, 5, 7)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 4), (1, 0, 6), (7, 0, 6), (1, 0, 7), (7, 0, 7), (1, 0, 5), (5, 0, 5), (1, 4, 4), (5, 4, 4), (7, 4, 6), (1, 4, 6), (1, 5, 5), (5, 5, 5), (1, 5, 7), (7, 6, 6), (1, 6, 6), (1, 7, 7)]
[(1, 7, 3)]	[(1, 2, 0), (3, 2, 0), (3, 2, 2), (1, 2, 2), (3, 3, 0), (1, 3, 0), (1, 3, 3), (1, 7, 0), (3, 3, 3), (7, 6, 0), (1, 6, 0), (7, 6, 2), (1, 6, 2), (7, 6, 6), (1, 6, 6), (7, 7, 0), (1, 7, 3), (1, 7, 7)]
[(2, 3, 7)]	[(2, 2, 4), (0, 2, 4), (2, 2, 6), (0, 2, 6), (2, 3, 4), (0, 3, 4), (2, 3, 7), (0, 3, 7), (6, 6, 4), (0, 6, 4), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (6, 7, 4), (0, 7, 4), (0, 7, 7), (3, 3, 4), (3, 3, 7), (7, 7, 4)]
[(2, 5, 6)]	[(0, 0, 4), (0, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 2, 4), (4, 4, 4), (0, 4, 4), (0, 4, 6), (2, 4, 6), (2, 5, 6), (0, 5, 6), (6, 6, 6), (0, 6, 7), (0, 6, 6), (4, 6, 6), (4, 6, 7), (0, 7, 7), (6, 7, 7), (5, 6, 7)]
[(3, 1, 7)]	[(3, 0, 4), (7, 0, 4), (1, 0, 4), (3, 0, 7), (7, 0, 7), (5, 0, 4), (5, 0, 5), (1, 0, 5), (3, 1, 4), (1, 1, 4), (1, 1, 5), (3, 1, 7), (3, 3, 4), (3, 3, 7), (7, 5, 4), (5, 5, 4), (5, 5, 5), (7, 7, 4)]
[(3, 5, 2)]	[(1, 0, 0), (7, 0, 0), (3, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (3, 1, 0), (3, 1, 2), (1, 2, 0), (7, 3, 0), (3, 3, 1), (7, 3, 1), (3, 3, 3), (3, 3, 0), (7, 3, 5), (3, 5, 0), (3, 5, 2), (7, 7, 0), (7, 7, 3)]

Мульти-операция	Замыкание
[(3, 5, 7)]	[(3, 7, 7), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 6), (3, 0, 7), (3, 0, 6), (7, 0, 7), (5, 0, 4), (1, 0, 5), (1, 5, 4), (5, 5, 4), (7, 5, 6), (3, 5, 7), (3, 5, 6), (1, 5, 5), (5, 5, 5), (3, 7, 6), (7, 7, 6)]
[(4, 6, 3)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 6, 0), (0, 6, 2), (4, 6, 3), (0, 6, 3), (4, 6, 2), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (2, 6, 6), (0, 7, 6), (0, 7, 7), (2, 7, 6), (6, 7, 7), (3, 7, 6)]
[(4, 7, 5)]	[(0, 2, 4), (4, 2, 5), (0, 2, 6), (6, 2, 7), (0, 2, 7), (4, 2, 4), (6, 2, 6), (0, 2, 5), (0, 6, 4), (4, 6, 4), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (4, 7, 5), (0, 7, 5), (0, 7, 7), (5, 2, 5), (7, 2, 7), (5, 7, 5)]
[(5, 4, 3)]	[(5, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (7, 0, 0), (5, 0, 1), (5, 0, 5), (7, 0, 5), (7, 0, 7), (1, 0, 4), (1, 1, 1), (5, 0, 3), (5, 1, 5), (7, 1, 5), (7, 3, 5), (5, 4, 1), (5, 4, 3), (5, 5, 5), (7, 5, 7)]
[(5, 7, 1)]	[(5, 2, 0), (1, 2, 0), (5, 2, 1), (7, 2, 0), (3, 2, 0), (1, 2, 1), (7, 2, 3), (7, 2, 7), (1, 3, 0), (3, 2, 3), (1, 3, 1), (5, 2, 5), (3, 3, 3), (3, 3, 0), (7, 7, 0), (5, 7, 0), (5, 7, 1), (5, 7, 5)]
[(5, 7, 3)]	[(1, 2, 0), (3, 2, 0), (1, 2, 3), (3, 2, 3), (1, 3, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (1, 3, 3), (7, 6, 7), (7, 7, 0), (7, 6, 0), (5, 6, 0), (7, 6, 3), (5, 6, 3), (5, 6, 7), (5, 7, 0), (5, 7, 3), (5, 7, 7)]
[(6, 1, 5)]	[(4, 0, 4), (0, 0, 4), (0, 0, 5), (0, 0, 7), (4, 0, 5), (6, 0, 5), (6, 1, 5), (4, 1, 5), (4, 4, 4), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 0, 7), (5, 4, 5), (5, 4, 7), (5, 5, 5), (7, 5, 7), (5, 6, 7)]
[(6, 3, 1)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 0), (2, 2, 2), (6, 3, 0), (2, 3, 1), (0, 3, 0), (6, 3, 1), (2, 3, 0), (0, 7, 0), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (7, 7, 0), (3, 7, 0), (3, 7, 2), (7, 7, 3), (3, 7, 6)]
[(6, 3, 7)]	[(6, 2, 4), (0, 2, 4), (0, 2, 6), (6, 2, 6), (0, 3, 5), (6, 3, 5), (6, 3, 7), (0, 3, 7), (6, 6, 4), (0, 6, 4), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 5), (6, 7, 5), (0, 7, 7), (7, 3, 5), (7, 3, 7), (7, 7, 5)]
[(0, 1, 4)]	[(4, 0, 4), (2, 0, 4), (0, 0, 4), (6, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 0, 5), (0, 0, 6), (0, 1, 4), (0, 2, 4), (0, 4, 4), (4, 4, 4), (0, 5, 5), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 7), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 5, 5)]
[(0, 1, 5)]	[(0, 0, 4), (0, 0, 5), (6, 0, 4), (4, 0, 4), (0, 0, 6), (6, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 1, 5), (0, 2, 4), (0, 4, 4), (4, 4, 4), (0, 5, 5), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 7), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 5, 5)]
[(0, 2, 1)]	[(0, 2, 0), (4, 2, 0), (0, 2, 2), (0, 2, 1), (0, 2, 4), (2, 2, 2), (2, 2, 0), (0, 3, 0), (0, 3, 3), (0, 6, 0), (6, 6, 0), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 7, 7), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (7, 7, 0)]
[(0, 2, 3)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 0), (0, 2, 2), (0, 2, 3), (2, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 3, 0), (0, 3, 3), (0, 6, 0), (4, 6, 0), (6, 6, 0), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 7, 7), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (7, 7, 0)]



Мульти-операция	Замыкание
[(0, 3, 1)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 0), (6, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 3, 0), (0, 3, 1), (0, 3, 3), (0, 6, 0), (6, 6, 0), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 7, 7), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (7, 7, 0)]
[(0, 3, 2)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 0), (0, 2, 2), (2, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 3, 0), (0, 3, 2), (0, 3, 3), (0, 6, 0), (6, 6, 0), (2, 6, 0), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 7, 7), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (7, 7, 0)]
[(0, 4, 5)]	[(0, 0, 4), (4, 0, 4), (6, 0, 6), (4, 0, 6), (0, 0, 6), (0, 0, 5), (0, 0, 7), (0, 2, 4), (0, 4, 4), (0, 4, 5), (4, 4, 4), (0, 5, 5), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 7), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 5, 5)]
[(0, 5, 4)]	[(0, 0, 4), (4, 0, 4), (2, 0, 6), (0, 0, 6), (0, 0, 5), (6, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 2, 4), (0, 4, 4), (4, 4, 4), (0, 5, 4), (0, 5, 5), (0, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 7, 7), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 5, 5)]
[(1, 0, 2)]	[(1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 2), (3, 0, 3), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 0), (7, 0, 7), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (3, 0, 0), (5, 0, 0), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (1, 4, 0), (5, 5, 0), (5, 5, 5), (7, 7, 0)]
[(1, 0, 3)]	[(5, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 3), (3, 0, 0), (5, 0, 5), (3, 0, 3), (7, 0, 7), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 4), (7, 0, 0), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (5, 4, 0), (5, 5, 0), (5, 5, 5), (7, 7, 0)]
[(1, 5, 0)]	[(1, 0, 0), (3, 0, 0), (3, 0, 2), (3, 0, 3), (1, 0, 1), (5, 0, 5), (5, 0, 0), (7, 0, 7), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 4), (7, 0, 0), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (1, 5, 0), (5, 5, 0), (5, 5, 5), (7, 7, 0)]
[(3, 0, 1)]	[(1, 0, 0), (3, 0, 1), (3, 0, 0), (3, 0, 3), (1, 0, 1), (5, 0, 5), (5, 0, 0), (7, 0, 7), (5, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 4), (7, 0, 0), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (5, 5, 0), (5, 5, 5), (7, 7, 0)]
[(2, 4, 7)]	[(0, 0, 4), (0, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 2, 4), (4, 4, 4), (0, 4, 4), (0, 4, 6), (2, 4, 7), (0, 4, 7), (4, 4, 6), (2, 4, 6), (4, 5, 6), (0, 5, 6), (6, 6, 6), (0, 6, 7), (4, 6, 7), (6, 6, 7), (0, 6, 6), (4, 6, 6), (6, 7, 7), (0, 7, 7), (4, 7, 7), (5, 6, 7)]
[(2, 6, 3)]	[(0, 2, 0), (0, 2, 2), (2, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 6, 0), (2, 6, 2), (4, 6, 2), (0, 6, 2), (2, 6, 3), (0, 6, 3), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (6, 6, 6), (0, 7, 2), (2, 6, 6), (4, 7, 2), (6, 7, 6), (6, 7, 7), (2, 7, 6), (0, 7, 7), (0, 7, 6), (2, 7, 7), (3, 7, 6)]
[(2, 7, 1)]	[(0, 2, 0), (2, 2, 0), (2, 2, 2), (6, 3, 0), (0, 3, 0), (2, 3, 2), (2, 3, 1), (6, 3, 2), (2, 3, 0), (2, 7, 0), (0, 7, 0), (2, 7, 1), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (7, 7, 0), (3, 7, 2), (3, 7, 3), (3, 7, 0), (7, 7, 2), (7, 7, 3), (3, 7, 6)]
[(3, 5, 1)]	[(1, 0, 0), (7, 0, 0), (3, 0, 0), (3, 1, 0), (1, 1, 0), (7, 1, 2), (1, 1, 1), (3, 1, 1), (7, 1, 0), (3, 1, 2), (1, 2, 0), (7, 3, 0), (3, 3, 1), (3, 3, 0), (7, 3, 3), (3, 3, 3), (7, 3, 5), (7, 3, 1), (3, 5, 0), (3, 5, 1), (7, 7, 0), (7, 7, 1), (7, 7, 3)]

Мульти-операция	Замыкание
[(4, 1, 7)]	[(4, 0, 4), (0, 0, 5), (0, 0, 4), (4, 0, 5), (0, 0, 7), (4, 0, 7), (6, 0, 5), (4, 1, 5), (4, 1, 7), (4, 4, 4), (4, 4, 5), (6, 4, 5), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (5, 0, 7), (7, 0, 7), (5, 4, 5), (7, 4, 7), (5, 4, 7), (5, 5, 5), (5, 5, 7), (7, 5, 7), (5, 6, 7)]
[(5, 1, 3)]	[(1, 0, 0), (5, 0, 1), (5, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 0, 1), (5, 0, 5), (7, 0, 5), (7, 0, 7), (7, 0, 1), (1, 1, 1), (5, 1, 1), (5, 1, 3), (1, 0, 4), (5, 1, 5), (7, 1, 5), (7, 1, 7), (5, 0, 3), (7, 3, 5), (7, 4, 1), (5, 4, 1), (7, 5, 5), (5, 5, 5), (7, 5, 7)]
[(1, 4, 7)]	[(1, 0, 4), (5, 0, 5), (5, 0, 6), (1, 0, 7), (1, 0, 6), (7, 0, 6), (5, 0, 7), (7, 0, 7), (5, 0, 4), (1, 0, 5), (1, 6, 7), (5, 6, 7), (5, 4, 4), (1, 4, 4), (5, 4, 6), (1, 4, 7), (1, 4, 6), (5, 4, 5), (1, 4, 5), (1, 5, 5), (5, 5, 5), (7, 6, 6), (7, 6, 7), (5, 6, 6), (1, 6, 6), (1, 7, 7), (5, 7, 7)]
[(1, 7, 2)]	[(1, 2, 0), (3, 2, 0), (1, 2, 2), (3, 2, 2), (3, 7, 6), (3, 3, 0), (1, 3, 0), (1, 3, 2), (1, 3, 3), (3, 3, 3), (3, 3, 2), (1, 7, 0), (1, 7, 6), (7, 7, 0), (3, 6, 0), (1, 6, 0), (3, 6, 2), (1, 6, 2), (7, 6, 0), (7, 6, 6), (3, 6, 6), (3, 7, 0), (1, 6, 6), (1, 7, 2), (1, 7, 7), (7, 7, 6), (3, 7, 7)]
[(2, 3, 6)]	[(7, 7, 6), (2, 2, 4), (0, 2, 4), (2, 2, 6), (0, 2, 6), (2, 3, 4), (0, 3, 4), (0, 3, 6), (0, 3, 7), (2, 3, 6), (6, 6, 4), (2, 6, 4), (2, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 6, 4), (0, 6, 6), (2, 7, 4), (0, 7, 4), (0, 7, 6), (0, 7, 7), (3, 3, 4), (3, 3, 6), (3, 3, 7), (3, 7, 4), (7, 7, 4), (3, 7, 6), (3, 7, 7)]
[(3, 1, 5)]	[(7, 0, 4), (1, 0, 4), (3, 0, 5), (3, 0, 7), (3, 0, 4), (7, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 0, 5), (7, 1, 4), (3, 1, 5), (3, 1, 4), (1, 1, 4), (5, 1, 5), (1, 1, 5), (5, 1, 4), (3, 3, 4), (3, 3, 5), (7, 3, 5), (3, 3, 7), (7, 3, 7), (7, 3, 4), (5, 0, 4), (1, 0, 5), (5, 5, 4), (5, 5, 5), (7, 7, 4), (7, 7, 5)]
[(4, 2, 7)]	[(4, 2, 4), (4, 2, 5), (0, 2, 4), (4, 2, 7), (0, 2, 7), (6, 2, 6), (0, 2, 5), (4, 2, 6), (0, 2, 6), (4, 6, 4), (4, 6, 5), (4, 6, 6), (0, 6, 7), (0, 6, 5), (6, 6, 6), (0, 6, 4), (0, 6, 6), (0, 7, 5), (0, 7, 7), (5, 2, 5), (7, 2, 7), (5, 2, 7), (5, 6, 7), (5, 6, 5), (7, 6, 7), (5, 7, 5), (5, 7, 7)]
[(5, 3, 1)]	[(1, 2, 1), (3, 2, 3), (5, 2, 5), (5, 2, 0), (3, 2, 0), (3, 2, 1), (7, 2, 0), (1, 2, 0), (7, 2, 1), (7, 2, 5), (7, 2, 7), (7, 3, 0), (1, 3, 0), (5, 2, 1), (5, 3, 0), (3, 3, 3), (3, 3, 0), (1, 3, 1), (3, 3, 1), (5, 3, 1), (7, 3, 5), (7, 3, 7), (5, 3, 5), (7, 7, 0), (5, 7, 5), (5, 7, 0), (7, 7, 5)]
[(2, 5, 7)]	[(0, 0, 4), (0, 0, 6), (0, 0, 7), (5, 7, 7), (0, 2, 4), (4, 4, 4), (0, 4, 4), (6, 4, 6), (4, 4, 6), (2, 4, 7), (0, 4, 7), (2, 4, 6), (0, 4, 6), (6, 5, 6), (2, 5, 7), (2, 5, 6), (0, 5, 6), (4, 5, 6), (0, 5, 7), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (4, 6, 6), (6, 6, 7), (0, 6, 7), (4, 6, 7), (6, 7, 7), (0, 7, 7), (4, 7, 7), (7, 6, 7), (5, 6, 7)]



Мульти-операция	Замыкание
[(3, 5, 3)]	[(1, 0, 0), (3, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (3, 1, 0), (7, 1, 0), (7, 1, 2), (3, 1, 1), (3, 1, 3), (3, 1, 2), (1, 2, 0), (7, 3, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 1), (7, 3, 3), (3, 3, 3), (7, 3, 5), (7, 3, 1), (7, 3, 7), (7, 5, 0), (3, 5, 1), (7, 5, 2), (3, 5, 3), (3, 5, 2), (3, 5, 0), (7, 7, 0), (7, 7, 1), (7, 7, 3), (7, 7, 5)]
[(4, 7, 3)]	[(3, 7, 7), (0, 2, 0), (0, 2, 2), (2, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 6, 0), (4, 6, 2), (2, 6, 3), (2, 6, 2), (6, 6, 2), (0, 6, 6), (2, 6, 6), (0, 7, 0), (6, 6, 6), (6, 6, 3), (4, 6, 3), (0, 6, 3), (4, 7, 3), (0, 7, 2), (4, 7, 2), (0, 7, 3), (6, 7, 7), (0, 7, 7), (0, 7, 6), (6, 7, 6), (2, 7, 7), (2, 7, 6), (3, 7, 6), (0, 6, 2), (7, 7, 6)]
[(5, 5, 3)]	[(1, 0, 0), (1, 0, 1), (5, 0, 0), (7, 0, 0), (5, 0, 1), (7, 0, 3), (7, 0, 1), (5, 0, 3), (7, 0, 7), (1, 1, 1), (5, 1, 1), (5, 1, 3), (5, 0, 5), (5, 1, 5), (7, 0, 5), (7, 1, 7), (7, 1, 5), (1, 0, 4), (7, 3, 5), (7, 3, 7), (7, 4, 1), (5, 4, 1), (7, 4, 3), (5, 4, 3), (5, 5, 1), (5, 5, 3), (5, 5, 5), (7, 5, 5), (7, 5, 7), (7, 7, 5)]
[(6, 1, 7)]	[(0, 0, 4), (0, 0, 5), (4, 0, 4), (0, 0, 7), (6, 0, 5), (4, 0, 5), (6, 0, 7), (4, 0, 7), (5, 7, 7), (6, 1, 5), (4, 1, 5), (6, 1, 7), (4, 1, 7), (4, 4, 4), (4, 4, 5), (6, 4, 5), (6, 5, 5), (4, 5, 5), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 0, 7), (7, 6, 7), (5, 4, 5), (7, 4, 7), (5, 4, 7), (5, 5, 5), (7, 5, 7), (5, 5, 7), (5, 6, 7)]
[(6, 3, 3)]	[(3, 7, 7), (0, 2, 0), (2, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 3, 0), (6, 3, 1), (6, 3, 2), (2, 3, 3), (6, 3, 0), (2, 3, 1), (2, 3, 2), (6, 3, 3), (2, 3, 0), (0, 7, 0), (6, 7, 0), (6, 7, 1), (2, 7, 0), (2, 7, 1), (1, 2, 0), (3, 7, 6), (3, 3, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (7, 7, 0), (7, 7, 2), (7, 7, 3), (3, 7, 0), (3, 7, 2), (3, 7, 3), (7, 7, 6)]
[(1, 5, 6)]	[(7, 7, 6), (5, 7, 7), (1, 0, 4), (5, 0, 4), (3, 0, 6), (1, 0, 6), (7, 0, 6), (5, 0, 7), (1, 0, 7), (7, 0, 7), (3, 0, 7), (5, 0, 5), (5, 0, 6), (3, 7, 6), (3, 6, 7), (1, 0, 5), (5, 6, 7), (7, 6, 7), (1, 4, 4), (5, 4, 4), (3, 4, 6), (1, 4, 6), (5, 4, 5), (1, 4, 5), (1, 5, 4), (1, 5, 5), (1, 5, 6), (5, 5, 5), (5, 5, 4), (7, 6, 6), (1, 6, 7), (3, 6, 6), (1, 6, 6), (1, 7, 6), (5, 6, 6), (1, 7, 7), (5, 7, 6), (3, 7, 7)]
[(1, 6, 3)]	[(7, 7, 6), (5, 7, 7), (1, 2, 0), (3, 2, 0), (1, 2, 2), (3, 2, 2), (1, 2, 3), (3, 2, 3), (3, 7, 6), (1, 3, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 2), (1, 3, 3), (3, 6, 7), (3, 3, 3), (1, 3, 2), (5, 6, 7), (3, 7, 0), (7, 6, 7), (5, 7, 0), (1, 7, 6), (7, 7, 0), (1, 7, 7), (3, 6, 0), (5, 6, 0), (1, 6, 0), (5, 6, 2), (1, 6, 3), (1, 6, 2), (7, 6, 0), (1, 6, 7), (1, 7, 0), (7, 6, 6), (5, 6, 6), (1, 6, 6), (3, 6, 6), (5, 7, 6), (3, 7, 7)]
[(2, 3, 5)]	[(7, 7, 5), (3, 7, 7), (2, 2, 4), (0, 2, 4), (6, 2, 4), (2, 2, 6), (0, 2, 6), (6, 2, 6), (2, 3, 4), (6, 3, 4), (0, 3, 6), (0, 3, 7), (2, 3, 5), (0, 3, 4), (0, 3, 5), (0, 6, 4), (6, 6, 4), (2, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (2, 6, 4), (0, 7, 4), (0, 7, 5), (0, 7, 6), (0, 7, 7), (3, 3, 4), (7, 3, 5), (7, 3, 6), (3, 3, 7), (7, 3, 7), (3, 3, 5), (7, 3, 4), (3, 3, 6), (7, 7, 4), (3, 7, 6), (3, 7, 4), (3, 7, 5), (7, 7, 6)]

Мульти-операция	Замыкание
[(3, 1, 6)]	[(7, 7, 5), (3, 7, 7), (3, 0, 4), (1, 0, 4), (3, 0, 6), (3, 0, 7), (7, 0, 4), (7, 0, 5), (7, 0, 7), (7, 0, 6), (3, 1, 4), (1, 1, 4), (3, 1, 6), (5, 1, 5), (1, 1, 5), (5, 1, 4), (7, 3, 4), (7, 3, 5), (3, 3, 4), (3, 3, 7), (7, 3, 7), (3, 3, 6), (7, 3, 6), (3, 3, 5), (5, 0, 4), (1, 0, 5), (5, 0, 5), (3, 0, 5), (3, 5, 4), (5, 5, 4), (1, 5, 4), (5, 5, 5), (1, 5, 5), (7, 7, 4), (3, 7, 6), (3, 7, 4), (3, 7, 5), (7, 7, 6)]
[(4, 3, 5)]	[(7, 7, 5), (5, 7, 7), (0, 2, 4), (4, 2, 5), (6, 2, 5), (0, 2, 5), (6, 2, 4), (4, 2, 4), (6, 2, 6), (0, 2, 7), (0, 2, 6), (4, 3, 5), (0, 3, 5), (0, 3, 7), (0, 6, 4), (4, 6, 4), (4, 6, 6), (0, 6, 7), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (6, 6, 4), (0, 6, 5), (0, 7, 5), (0, 7, 7), (5, 2, 5), (7, 2, 5), (7, 2, 7), (5, 2, 7), (7, 3, 5), (5, 3, 5), (5, 3, 7), (7, 3, 7), (5, 6, 7), (7, 6, 7), (7, 6, 5), (5, 6, 5), (4, 2, 6), (5, 7, 5)]
[(5, 2, 3)]	[(1, 2, 3), (3, 2, 3), (5, 2, 5), (7, 2, 5), (1, 3, 3), (5, 2, 0), (3, 2, 0), (3, 2, 1), (7, 2, 0), (1, 2, 0), (5, 2, 1), (1, 2, 1), (7, 2, 7), (5, 3, 0), (5, 2, 3), (5, 2, 7), (1, 3, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 1), (1, 3, 1), (7, 3, 5), (7, 3, 0), (5, 3, 7), (7, 3, 7), (3, 3, 3), (5, 3, 5), (7, 6, 7), (5, 7, 0), (5, 6, 0), (5, 6, 1), (7, 6, 0), (5, 7, 5), (5, 6, 5), (7, 6, 5), (5, 6, 7), (7, 7, 0), (7, 7, 5), (5, 7, 7)]
[(0, 1, 2)]	[(4, 0, 0), (0, 0, 2), (0, 0, 1), (0, 0, 4), (2, 0, 0), (6, 0, 0), (0, 0, 6), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 2), (0, 0, 7), (0, 0, 3), (0, 2, 0), (2, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 3, 0), (0, 3, 3), (2, 4, 0), (0, 4, 0), (4, 4, 0), (4, 4, 4), (0, 4, 4), (6, 6, 0), (0, 6, 0), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 7, 7), (1, 0, 0), (3, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (7, 7, 0)]
[(0, 1, 3)]	[(4, 0, 0), (6, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 4), (0, 0, 3), (0, 0, 6), (0, 0, 7), (2, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2), (0, 1, 3), (0, 1, 0), (2, 2, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 3, 0), (0, 3, 3), (6, 4, 0), (4, 4, 0), (0, 4, 0), (4, 4, 4), (0, 4, 4), (6, 6, 0), (0, 6, 0), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 7, 7), (1, 0, 0), (3, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (7, 7, 0)]
[(0, 4, 1)]	[(4, 0, 0), (4, 0, 2), (2, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 2), (6, 0, 6), (2, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 0, 4), (0, 0, 7), (0, 1, 1), (0, 0, 6), (6, 0, 0), (0, 0, 5), (0, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 2, 2), (0, 2, 4), (4, 0, 4), (0, 4, 0), (0, 4, 1), (4, 4, 4), (0, 4, 4), (0, 5, 0), (0, 5, 5), (0, 6, 0), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 7, 7), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (5, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (1, 1, 1), (5, 5, 5)]
[(0, 5, 1)]	[(6, 0, 0), (6, 0, 2), (2, 0, 0), (2, 0, 2), (4, 0, 0), (6, 0, 6), (0, 0, 2), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (4, 0, 4), (0, 0, 4), (0, 0, 5), (0, 0, 6), (0, 0, 7), (0, 0, 1), (0, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 2, 2), (0, 2, 4), (0, 4, 0), (4, 4, 4), (0, 4, 4), (0, 5, 0), (0, 5, 1), (0, 5, 5), (0, 6, 0), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 7, 0), (0, 7, 7), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (5, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (7, 0, 7), (1, 1, 1), (5, 5, 5)]



Мульти-операция	Замыкание
[(2, 0, 1)]	[(2, 0, 1), (0, 0, 2), (2, 0, 0), (2, 0, 2), (0, 0, 4), (4, 0, 4), (0, 0, 1), (4, 1, 0), (0, 1, 0), (4, 0, 0), (0, 0, 5), (0, 0, 7), (0, 2, 0), (2, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 0, 3), (0, 3, 0), (0, 4, 0), (4, 4, 0), (4, 4, 4), (0, 5, 0), (0, 7, 0), (1, 0, 0), (7, 0, 0), (1, 0, 1), (3, 0, 3), (1, 0, 4), (5, 0, 5), (3, 0, 0), (7, 0, 7), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (5, 0, 0), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (5, 5, 0), (5, 5, 5), (7, 7, 0)]
[(2, 0, 3)]	[(0, 0, 1), (0, 0, 2), (2, 0, 3), (0, 0, 4), (4, 0, 4), (2, 0, 2), (0, 0, 5), (0, 0, 7), (0, 0, 3), (2, 0, 0), (4, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 2, 0), (2, 2, 0), (2, 2, 2), (0, 3, 0), (0, 4, 0), (4, 4, 0), (4, 4, 4), (4, 5, 0), (0, 5, 0), (0, 7, 0), (5, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (3, 0, 3), (7, 0, 0), (5, 0, 5), (3, 0, 0), (7, 0, 7), (1, 1, 0), (1, 1, 1), (1, 0, 4), (1, 2, 0), (3, 3, 0), (3, 3, 3), (5, 5, 0), (5, 5, 5), (7, 7, 0)]
[(2, 7, 5)]	[(7, 7, 5), (3, 7, 7), (7, 7, 6), (2, 2, 4), (0, 2, 4), (6, 2, 6), (0, 2, 6), (2, 2, 6), (6, 2, 4), (2, 3, 4), (0, 3, 5), (6, 3, 6), (0, 3, 7), (6, 3, 4), (2, 3, 6), (0, 3, 4), (2, 3, 5), (0, 3, 6), (2, 6, 4), (6, 6, 4), (2, 6, 6), (6, 6, 6), (0, 6, 6), (0, 6, 4), (2, 7, 4), (0, 7, 5), (0, 7, 6), (0, 7, 7), (2, 7, 5), (0, 7, 4), (3, 3, 4), (7, 3, 5), (3, 3, 6), (7, 3, 7), (3, 3, 7), (7, 3, 6), (7, 3, 4), (3, 3, 5), (3, 7, 4), (7, 7, 4), (3, 7, 5), (3, 7, 6)]
[(3, 4, 7)]	[(5, 7, 6), (3, 7, 7), (7, 7, 6), (1, 0, 4), (5, 0, 4), (1, 0, 6), (3, 0, 7), (5, 0, 6), (5, 0, 7), (7, 0, 7), (1, 0, 5), (5, 0, 5), (7, 0, 6), (1, 0, 7), (3, 0, 6), (3, 6, 7), (5, 6, 7), (7, 6, 7), (1, 4, 4), (5, 4, 5), (3, 4, 6), (1, 4, 6), (3, 4, 7), (1, 4, 5), (1, 4, 7), (5, 4, 6), (5, 4, 4), (5, 5, 4), (5, 5, 5), (5, 5, 6), (1, 5, 5), (1, 5, 4), (1, 5, 6), (1, 6, 6), (1, 6, 7), (7, 6, 6), (5, 6, 6), (1, 7, 6), (3, 6, 6), (1, 7, 7), (3, 7, 6), (5, 7, 7)]
[(3, 5, 5)]	[(7, 7, 5), (7, 7, 6), (3, 0, 4), (1, 0, 4), (3, 0, 5), (7, 0, 6), (7, 0, 5), (7, 0, 7), (5, 0, 5), (1, 0, 5), (3, 1, 4), (1, 1, 4), (7, 1, 6), (5, 1, 5), (5, 1, 4), (3, 1, 5), (7, 1, 4), (1, 1, 5), (3, 1, 6), (3, 3, 4), (7, 3, 5), (7, 3, 4), (7, 3, 7), (3, 3, 7), (5, 0, 4), (3, 3, 5), (7, 0, 4), (7, 3, 6), (3, 0, 6), (3, 3, 6), (3, 0, 7), (5, 5, 4), (3, 5, 5), (1, 5, 5), (5, 5, 5), (3, 5, 4), (1, 5, 4), (7, 7, 4), (3, 7, 4), (3, 7, 5), (3, 7, 6), (3, 7, 7)]
[(3, 6, 3)]	[(3, 7, 7), (7, 7, 6), (7, 6, 0), (1, 2, 0), (3, 2, 0), (1, 2, 2), (3, 2, 3), (3, 2, 2), (1, 2, 3), (3, 7, 6), (1, 3, 0), (3, 3, 0), (1, 3, 2), (3, 3, 2), (3, 3, 3), (1, 3, 3), (3, 6, 7), (5, 6, 7), (3, 7, 0), (5, 6, 6), (7, 6, 7), (5, 7, 0), (1, 7, 2), (7, 7, 0), (1, 7, 7), (5, 7, 2), (5, 6, 0), (1, 6, 0), (5, 6, 2), (1, 6, 3), (3, 6, 0), (1, 6, 2), (3, 6, 3), (1, 6, 7), (1, 7, 0), (3, 6, 2), (1, 7, 6), (1, 6, 6), (7, 6, 6), (3, 6, 6), (5, 7, 6), (5, 7, 7)]
[(4, 3, 7)]	[(7, 7, 5), (5, 7, 7), (4, 2, 4), (0, 2, 4), (4, 2, 5), (0, 2, 5), (4, 2, 6), (6, 2, 6), (0, 2, 6), (0, 2, 7), (4, 2, 7), (0, 3, 5), (4, 3, 5), (4, 3, 7), (0, 3, 7), (6, 6, 4), (0, 6, 5), (4, 6, 6), (6, 6, 5), (0, 6, 7), (6, 6, 6), (4, 6, 5), (0, 6, 6), (0, 6, 4), (4, 6, 4), (0, 7, 5), (0, 7, 7), (5, 2, 5), (7, 2, 5), (5, 2, 7), (7, 2, 7), (7, 3, 5), (5, 3, 5), (7, 3, 7), (5, 3, 7), (7, 6, 7), (6, 2, 4), (5, 6, 5), (6, 2, 5), (5, 6, 7), (7, 6, 5), (5, 7, 5)]

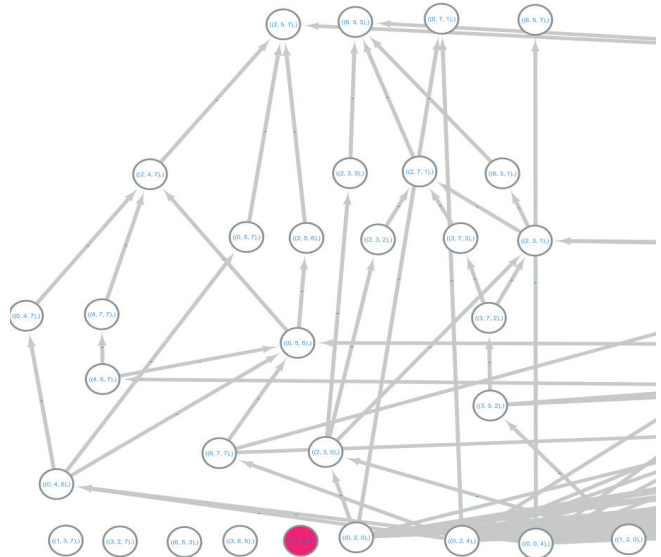
Мульти-операция	Замыкание
[(5, 3, 3)]	[(7, 7, 5), (1, 2, 1), (5, 2, 0), (5, 2, 1), (3, 3, 0), (1, 3, 1), (5, 3, 1), (3, 2, 0), (7, 2, 1), (3, 2, 1), (7, 2, 0), (1, 2, 0), (1, 2, 3), (3, 2, 3), (7, 2, 7), (5, 2, 3), (7, 2, 5), (5, 2, 7), (1, 3, 0), (5, 2, 5), (5, 3, 0), (7, 3, 0), (3, 3, 1), (5, 3, 3), (1, 3, 3), (7, 3, 5), (3, 3, 3), (7, 3, 7), (5, 3, 5), (5, 3, 7), (7, 6, 7), (7, 7, 0), (7, 6, 0), (7, 6, 1), (5, 6, 0), (5, 6, 1), (7, 6, 5), (5, 6, 5), (5, 6, 7), (5, 7, 0), (5, 7, 5), (5, 7, 7)]

Построение графа неразложимых алгебр унарных мультиопераций ранга 3

С помощью пакета Networkx Python3 был реализован ориентированный граф, состоящий из неразложимых алгебр мультиопераций ранга 3. Вершины графа представляют собой неразложимые алгебры, а ребра графа отражают связь между алгебрами по включению. Если между двумя вершинами графа существует путь, значит, одна алгебра является подалгеброй для другой.

На рисунке 1 цветом обозначена изолированная алгебра (1,7,6) - алгебра, которая не содержит в себе подалгебр и не является подалгеброй для какой-либо алгебры.

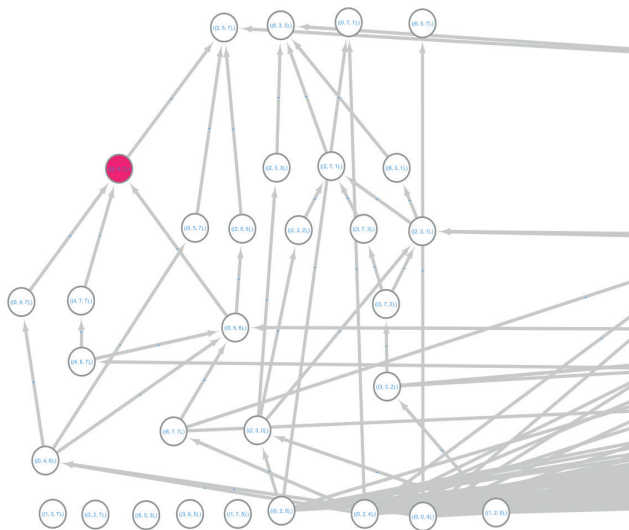
На следующем рисунке под номером 2 цветом обозначена алгебра (2, 4, 7), в которую входят по включению алгебры (0,4,7), (4,7,7) и (0,5,6). Обозначенная алгебра является подалгеброй для алгебры (2, 5, 7).



Р и с. 1. Изолированная алгебра (1, 7, 6)

F i g. 1. Isolated algebra (1, 7, 6)





Р и с. 2. Алгебра (2, 4, 7)

F i g. 2. Algebra (2, 4, 7)

Алгоритм построения решётки алгебр унарных мультиопераций ранга 3

Алгоритм заключается в конструировании алгебр через неразложимые алгебры. Входящие в состав сконструированной алгебры неразложимые алгебры не должны иметь общих подалгебр. На основе полученного графа неразложимых алгебр строится решетка алгебр по следующему алгоритму:

1. Получить все алгебры, состоящие из $n = 1$ неразложимых алгебр (т.е. получить 196 алгебр, которые совпадают с неразложимыми алгебрами);

2. Сконструировать алгебры из $n+1$ неразложимых алгебр. Для этого берется каждая алгебра, полученная на предыдущем шаге, и в её разложение добавляется неразложимая алгебра. При этом между добавленной неразложимой алгеброй и неразложимыми алгебрами, входящими в состав исходной, не должно быть пути на графе. Данное условие важно, поскольку новая сконструированная алгебра среди своих неразложимых алгебр не должна иметь общих подалгебр;

3. Повторять шаг 2 до тех пор, пока возможно добавление в разложение алгебры новых неразложимых алгебр.

Для реализации алгоритма был использован Python 3.

Всего унарных мультиопераций 512, каждой из них сопоставляется номер. Для вычисления мета-операций над мультиоперациями были предвычислены матрицы мета-операций подстановки и пересечения размером 512×512 значения, а также мета-операции нахождения обратного с размером 512 значений. Значения в матрице - результат применения мета-операции к мультиоперациям. Индексы в матрице соответствуют номерам мультиопераций.

В качестве хранения алгебр использовался тип данных Array. Выбор обусловлен эффективным расходом памяти для хранения значений, так как в алгоритме необходимо хранить результаты вычислений, полученных на предыдущем шаге.

В массиве перечислены номера мультиопераций, из которых состоит алгебра. На выполнение данной задачи было потрачено 17 часов и 30 ГБ памяти.

Если сравнивать предложенный метод, основанный на конструировании алгебр через неразложимые алгебры, и предыдущий метод, основанный на конструировании алгебр с помощью перебора однопородственных алгебр, то можно сделать вывод об эффективности нового метода. Предложенный метод имеет меньшую сложность вычислений, а также требует меньшее количество памяти.

Полученные результаты

В результате были найдены неразложимые алгебры унарных мультиопераций ранга 3. Всего было найдено 196 таких алгебр. Полученные алгебры были представлены в виде графа по включению. На основе неразложимых алгебр был предложен алгоритм построения решеток мультиопераций. Данный алгоритм был реализован на языке Python 3 и применен к унарным мультиоперациям ранга 3, в результате чего была построена решетка алгебр унарных мультиопераций ранга 3, которая содержит 2.079.040 алгебр, что согласуется с полученными ранее результатами. Предложенный алгоритм показал существенно лучшие результаты как по времени работы, так и по затраченной памяти.

Заключение

По результатам работы был предложен алгоритм построения решеток мультиопераций на основе неразложимых алгебр.

Данный алгоритм является более эффективным, поскольку имеет существенно меньшую вычислительную сложность, а также требует меньше количество памяти для хранения промежуточных результатов вычислений.

В дальнейшем предложенный алгоритм можно будет использовать для построения решеток мультиопераций более высоких рангов либо больших местностей.

Список использованных источников

- [1] Kearnes, K. A. Cube term blockers without finiteness / K. A. Kearnes, Á. Szendrei. – DOI 10.1007/s00012-017-0476-6 // Algebra Universalis. – 2017. – Vol. 78, issue 4. – Pp. 437-459.
- [2] Kuznetsov, S. O. Algorithms for the Construction of Concept Lattices and Their Diagram Graphs / S. O. Kuznetsov, S. A. Obiedkov. – DOI 10.1007/3-540-44794-6_24 // Principles of Data Mining and Knowledge Discovery. PKDD 2001. Lecture Notes in Computer Science / Ed. by L. De Raedt, A. Siebes. – Vol. 2168. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2001. – Pp. 289-300.
- [3] Behrisch, M. Unique inclusions of maximal C-clones in maximal clones / M. Behrisch, E. Vargas-García. – DOI 10.1007/s00012-018-0497-9 // Algebra Universalis. – 2018. – Vol. 79, issue 2. – Article number: 31.
- [4] Бадмаев, С. А. Об одном максимальном клоне частных ультрафункций на двухэлементном множестве / С. А. Бадмаев. – DOI 10.17516/1997-1397-2017-10-2-



- 140-145 // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2017. – Т. 10, № 2. – С. 140-145.
- [5] Пинус, А. Г. О фрагментах функциональных клонов / А. Г. Пинус. – DOI 10.17377/alglog.2017.56.406 // Алгебра и логика. – 2017. – Т. 56, № 4. – С. 477-485.
- [6] Пинус, А. Г. Об алгебраически эквивалентных клонах / А. Г. Пинус. – DOI 10.17377/alglog.2016.55.605 // Алгебра и логика. – 2016. – Т. 55, № 6. – С. 760-768.
- [7] Behrisch, M. The Number of Clones Determined by Disjunctions of Unary Relations / M. Behrisch, E. Vargas-García, D. Zhuk. – DOI 10.1007/s00224-018-9905-y // Theory of Computing Systems. – 2019. – Vol. 63, issue 6. – Pp. 1298-1313.
- [8] Перязев, Н. А. Об одном достаточном условии равенства мультиклона и суперклона / Н. А. Перязев, И. К. Шаранхаев. – DOI 10.17516/1997-1397-2018-11-1-97-102 // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2018. – Т. 11, № 1. – С. 97-102.
- [9] Бадмаев, С. А. О классах частичных функций, порожденных максимальными частичными ультраклонами / С. А. Бадмаев, И. К. Шаранхаев. – DOI 10.33048/semi.2020.17.003 // Сибирские электронные математические известия. – 2020. – Т. 17. – С. 32-46. – Рез. англ.
- [10] Бадмаев, С. А. Критерий полноты множества мультифункций в полном частичном ультраклоне ранга 2 / С. А. Бадмаев. – DOI 10.17377/semi.2018.15.040 // Сибирские электронные математические известия. – 2018. – Т. 15. – С. 450-474. – Рез. англ.
- [11] Бадмаев, С. А. Классификация гиперфункций ранга 2 относительно принадлежности максимальным частичным ультраклонам / С. А. Бадмаев. – DOI 10.17516/1997-1397-2019-12-5-645-652 // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2019. – Т. 12, № 5. – С. 645-652.
- [12] Казимиров, А. С. Алгебры унарных мультиопераций / А. С. Казимиров, Н. А. Перязев // Мальцевские чтения: тезисы докладов. – Новосибирск: ИМ СО РАН, 2013. – С. 156. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27230507> (дата обращения: 26.01.2021).
- [13] Перязев, Н. А. Минимальные алгебры унарных мультиопераций / Н. А. Перязев, Ю. В. Перязева, И. К. Шаранхаев. – DOI 10.17516/1997-1397-2016-9-2-220-224 // Журнал Сибирского федерального университета. Математика и физика. – 2016. – Т. 9, № 2. – С. 220-224.
- [14] Малина, А. В. Шефферовы мультиоперации в полной алгебре унарных мультиопераций ранга 4 / А. В. Малина, Н. А. Перязев // Известия Юго-Западного государственного университета. Серия Управление, вычислительная техника, информатика. Медицинское приборостроение. – 2016. – № 1(18). – С. 29-32. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25942201> (дата обращения: 26.01.2021). – Рез. англ.
- [15] Peryazev, N. A. Algebras of multioperations / N. A. Peryazev, I. K. Sharankhaev // Algebra and Model Theory 11. Collection of papers / Ed. by A. G. Pinus, E. N. Poroshenko, S. V. Sudoplatov, E. I. Timoshenko. – Novosibirsk: NSTU Publ., 2017. – Pp. 102-111. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=34916824> (дата обращения: 26.01.2021).
- [16] Перязев, Н. А. Алгебры унарных мультиопераций конечного ранга / Н. А. Перязев // Синтаксис и семантика логических систем: материалы 6-й Международной школы-семинара / Под. ред. С. С. Гончарова [и др.]. – Иркутск: Изд-во ИГУ, 2019. – С. 76-79. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41216139> (дата обращения: 26.01.2021). – Рез. англ.
- [17] Перязев, Н. А. Конечные алгебры мультиопераций / Н. А. Перязев // Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории. – Материалы XVI Международной конференции, посвященной 80-летию со дня рождения профессора Мишеля Деза. – Тула: ТГПУ им. Л.Н. Толстого, 2019. – С. 51-54. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39552184> (дата обращения: 26.01.2021). – Рез. англ.
- [18] Перязев, Н. А. Тожества в алгебрах мультиопераций фиксированной размерности / Н. А. Перязев. – DOI 10.26516/1997-7670.2019.29.86 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2019. – Т. 29. – С. 86-97. – Рез. англ.
- [19] Пантелеев, В. И. Классификация мультиопераций ранга 2 относительно E-предполных множеств / В. И. Пантелеев, Л. В. Рябец. – DOI 10.26516/1997-7670.2020.34.93 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2020. – Т. 34. – С. 93-108.
- [20] Пантелеев, В. И. Критерий полноты для оператора замыкания с разветвлением по предикату равенства на множестве мультиопераций ранга 2 / В. И. Пантелеев, Л. В. Рябец. – DOI 10.26516/1997-7670.2019.29.68 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2019. – Т. 29. – С. 68-85.
- [21] Казимиров, А. С. О сложности стандартных форм мультифункций / А. С. Казимиров. – DOI 10.26516/1997-7670.2017.22.63 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2017. – Т. 22. – С. 63-70. – Рез. англ.
- [22] Перязев, Н. А. Теория Галуа для конечных алгебр операций и мультиопераций ранга 2 / Н. А. Перязев. – DOI 10.26516/1997-7670.2019.28.113 // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2019. – Т. 28. – С. 113-122. – Рез. англ.
- [23] Kazda, A. Deciding the Existence of Minority Terms / A. Kazda, J. Opršal, M. Valeriote, D. Zhuk. – DOI 10.4153/S0008439519000651 // Canadian Mathematical Bulletin. – 2020. – Vol. 63, issue 3. – Pp. 577-591.
- [24] Пантелеев, В. И. О некоторых интервалах в решетке клонов частичных ультрафункций / В. И. Пантелеев, С. Ю. Халтанова // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. – 2010. – Т. 3, № 4. – С. 80-87. – URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15540117> (дата обращения: 26.01.2021). – Рез. англ.
- [25] Basheyeva, A. Lattices of subclasses. III / A. Basheyeva, A. Nurakunov, M. Schwidefsky, A. Zamojska-Dzienio. – DOI 10.17377/semi.2017.14.023 // Siberian Electronic Mathematical Reports. – 2017. – Vol. 14. – Pp. 252-263.
- [26] Кравченко, А. В. О сложности решеток квазимногообра-



зий для многообразий унарных алгебр. II / А. В. Кравченко. – DOI 10.17377/semi.2016.13.034 // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – Т. 13. – С. 388-394.

Поступила 26.01.2021; одобрена после рецензирования 17.03.2021; принята к публикации 25.03.2021.

Об авторе:

Еременко Дмитрий Александрович, аспирант кафедры вычислительной техники, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет «ЛЭТИ» им. В.И. Ульянова (Ленина)» (197376, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Профессора Попова, д. 5), **ORCID:** <http://orcid.org/0000-0001-5974-1485>, er_92@list.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Kearnes K.A., Szendrei Á. Cube term blockers without finiteness. *Algebra Universalis*. 2017; 78(4):437-459. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s00012-017-0476-6>
- [2] Kuznetsov S.O., Obiedkov S.A. Algorithms for the Construction of Concept Lattices and Their Diagram Graphs. In: De Raedt L., Siebes A. (Eds.) *Principles of Data Mining and Knowledge Discovery. PKDD 2001. Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2168. Springer, Berlin, Heidelberg; 2001. p. 289-300. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/3-540-44794-6_24
- [3] Behrisch M., Vargas-García E. Unique inclusions of maximal C-clones in maximal clones. *Algebra Universalis*. 2018; 79(2):31. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s00012-018-0497-9>
- [4] Badmaev S.A. On Some Maximal Clone of Partial Ultrafunctions on a Two-element Set. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2017; 10(2):140-145. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2017-10-2-140-145>
- [5] Pinus A.G. Fragments of Functional Clones. *Algebra Logic*. 2017; 56(4):318-323. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-017-9452-7>
- [6] Pinus A.G. Algebraically Equivalent Clones. *Algebra Logic*. 2017; 55(6):501-506. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s10469-017-9420-2>
- [7] Behrisch M., Vargas-García E., Zhuk D. The Number of Clones Determined by Disjunctions of Unary Relations. *Theory of Computing Systems*. 2019; 63(6):1298-1313. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s00224-018-9905-y>
- [8] Peryazev N.A., Sharankhaev I.K. On some Sufficient Condition for the Equality of Multi-clone and Super-clone. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2018; 11(1):97-102. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-1-97-102>
- [9] Badmaev S.A., Sharankhaev I.K. On the classes of partial functions generated by maximal partial ultraclones. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2020; 17:32-46. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.003>
- [10] Badmaev S.A. A completeness criterion for sets of multifunctions in full partial ultraclone of rank 2. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2018; 15:450-474. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2018.15.040>
- [11] Badmaev S.A. Classification of hyperfunctions of rank 2 with respect to membership in the maximal partial ultraclones. *Set. Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2019; 12(5):645-652. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2019-12-5-645-652>
- [12] Kazimirov A.S., Peryazev N.A. Algebras of unary multioperations. *Proceedings of the International Conference on Mal'tsev Meeting*. Novosibirsk; 2013. p. 156. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=27230507> (accessed 26.01.2021). (In Russ.)
- [13] Peryazev N.A., Peryazeva Yu.V., Sharankhaev I.K. Minimal Algebras of Unary Multioperations. *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. 2016; 9(2):220-224. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-2-220-224>
- [14] Malina A.V., Peryazev N.A. Sheffer's multioperations in full algebra of unary multioperation of the rank 4. *Proceedings of the Southwest State University. Series: Control, Computer Engineering, Information Science. Medical Instruments Engineering*. 2016; (1):29-32. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=25942201> (accessed 26.01.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [15] Peryazev N.A., Sharankhaev I.K. Algebras of multioperations. In: A.G. Pinus, E.N. Poroshenko, S.V. Sudoplatov, E.I. Timoshenko (Eds.) *Algebra and Model Theory 11*. Collection of papers. NSTU Publ., Novosibirsk; 2017. p. 102-111. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=34916824> (accessed 26.01.2021). (In Russ.)
- [16] Peryazev N.A. Algebras of unary multioperations of finite rank. In: S. S. Goncharov et al. (Eds.) *Syntax and Semantics of Logical Systems*. Collection of papers. ISU Publ., Irkutsk; 2019. p. 76-79. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=41216139> (accessed 26.01.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [17] Peryazev N.A. Finite Algebras of Multioperations. *Proceedings of the International Conference on Algebra, Number Theory and Discrete Geometry: modern problems, applications and problems of history, dedicated to the 80th anniversary of the birth of Professor Michel Desa*. TSPU of Leo Tolstoy, Tula; 2019. p. 51-54. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39552184> (accessed 26.01.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [18] Peryazev N.A. Identities in Fixed Dimension Algebras of Multioperations. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2019; 29:86-97. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.86>
- [19] Panteleev V.I., Riabets L.V. Classification of Multioperations of Rank 2 by E-precomplete Sets. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2020; 34:93-108. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.34.93>
- [20] Panteleev V.I., Riabets L.V. The Completeness Criterion for Closure Operator with the Equality Predicate Branching on the Set of Multioperations on Two-Element Set. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2019;



- 29:68-85. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.29.68>
- [21] Kazimirov A.S. On Complexity of Standard Forms for Multifunctions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2017; 22:63-70. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2017.22.63>
- [22] Peryazev N.A. Galois Theory for Finite Algebras of Operations and Multioperations of Rank 2. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2019; 28:113-122. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.26516/1997-7670.2019.28.113>
- [23] Kazda A., Opršal J., Valeriote M., Zhuk D. Deciding the Existence of Minority Terms. *Canadian Mathematical Bulletin*. 2020; 63(3):577-591. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.4153/S0008439519000651>
- [24] Panteleyev V.I., Haltanova S.Yu. About some intervals in the lattice of clones of partial ultrafunctions. *The Bulletin of Irkutsk State University. Series: Mathematics*. 2010; 3(4):80-87. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15540117> (accessed 26.01.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [25] Basheyeva A., Nurakunov A., Schwidefsky M., Zamojska-Dzienio A. Lattices of subclasses. III. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2017; 14:252-263. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2017.14.023>
- [26] Kravchenko A.V. Complexity of Quasivariety Lattices for Varieties of Unary Algebras. *Siberian Electronic Mathematical Reports*. 2016; 13:388-394. (In Russ.) DOI: <https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.034>

Submitted 26.01.2021; approved after reviewing 17.03.2021;
accepted for publication 25.03.2021.

About the author:

Dmitriy A. Eremenko, Postgraduate Student of the Department of Computer Science and Engineering, Saint Petersburg Electrotechnical University "LETI" (5 Professora Popova St., St. Petersburg 197376, Russian Federation), **ORCID**: <http://orcid.org/0000-0001-5974-1485>, er_92@list.ru

The author has read and approved the final manuscript.

