

Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Динамика итерирования кусочно-линейных функций» как средство развития креативности студентов

В. С. Секованов^{1*}, В. А. Ивков¹, А. А. Пигузов¹, Л. Б. Рыбина²

¹ ФГБОУ ВО «Костромской государственной академии культуры и искусств», г. Кострома, Российская Федерация 156005, Российская Федерация, Костромская область, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17

* Sekovanovvs@yandex.ru

² ФГБОУ ВО «Костромская государственная сельскохозяйственная академия», пос. Караваево, Российская Федерация

156530, Российская Федерация, Костромская область, Костромской район, пос. Караваево, Караваевская с/а, Учебный городок, д. 34

Аннотация

В статье рассматривается многоэтапное математико-информационное задание «Динамика итерирования кусочно-линейных функций», нацеленное на развитие креативности студентов. Этапы задания предполагают как решение математических задач по определению бассейнов притяжения функций, так и разработку компьютерной программы для их построения. Важной составляющей задания выступают этапы исследования динамики функций и проведение компьютерного эксперимента. Для этих целей применяется метод итерирования исследуемых функций. Студенты знакомятся с данным методом при решении нелинейных уравнений, изучении оператора сжатия, при доказательстве теоремы о существовании и единственности решения дифференциального уравнения и изучении других вопросов. Компьютерный эксперимент позволяет визуально определить различные бассейны притяжений функций, как они меняются при увеличении степени функции. При выполнении задания студенты устанавливают связь между рядом кусочно-линейных функций и множествами Кантора. Отмечают различия и сходство между динамикой различных кусочно-линейных функций. Используя ИКТ, проводят компьютерные эксперименты при исследовании орбит точек и построении итераций кусочно-линейных функций, оценивают показатели Ляпунова. При выполнении многоэтапного задания студенты находятся в роли математика, программиста и экспериментатора, что позитивно влияет на развитие их креативности.

Ключевые слова: кусочно-линейная функция, итерация, фрактал, орбита точки, показатель Ляпунова, множество Кантора, неподвижная точка, креативность, мотивация, гибкость мышления, оригинальность мышления.

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Секованов, В. С. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Динамика итерирования кусочно-линейных функций» как средство развития креативности студентов / В. С. Секованов, В. А. Ивков, А. А. Пигузов, Л. Б. Рыбина. – DOI 10.25559/SITITO.16.202003.711-720 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2020. – Т. 16, № 3. – С. 711-720.

© Секованов В. С., Ивков В. А., Пигузов А. А., Рыбина Л. Б., 2020



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Performing a Multi-Stage Mathematical and Informational Task “Dynamics of Iteration of Piecewise Linear Functions” as a Means of Developing Students’ Creativity

V. S. Sekovanov^{a*}, V. A. Ivkov^a, A. A. Piguzov^a, L. B. Rybina^b

^a Kostroma State University, Kostroma, Russian Federation

17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation

* Sekovanovvs@yandex.ru

^b Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma region, Russian Federation

34 Training town, p. Karavaevo 156530, Kostroma region, Russian Federation

Abstract

A multistage mathematical-informational task “Piecewise linear functions iterating dynamics” aimed at students’ creativity development is examined in this paper. The stages of the assignment involve both solving mathematical tasks on determining basins of attraction of functions and developing a computer program for their construction. What acts as an important constituent of the task, are the stages of researching the dynamics of functions and conducting a computer experiment. What is used for these purposes is the method of iterating the functions under study. Students are introduced to this method when solving nonlinear equations, studying the contraction operator, proving theorems about the existence and uniqueness of a solution to a differential equation, and studying other issues. A computer experiment allows visually identifying the different basins of attraction of functions, and how they change as the power of the function increases. When performing the tasks, students understand the relation between a series of piecewise linear functions and Cantor sets. They note differences and similarities between the dynamics of different piecewise linear functions. Using information and communication technology, they conduct computer experiments; when investigating point orbits and iterating the piecewise linear functions, they estimate Lyapunov exponents. When completing the multi-step task, students act as mathematicians, programmers and experimenters, and that has a positive impact on the development of their creativity.

Keywords: piecewise linear function, iteration, fractal, point orbit, Lyapunov exponent, Cantor set, fixed point, creativity, motivation, flexibility of thinking, originality of thinking.

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Rybina L.B. Performing a Multi-Stage Mathematical and Informational Task “Dynamics of Iteration of Piecewise Linear Functions” as a Means of Developing Students’ Creativity. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2020; 16(3):711-720. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202003.711-720>

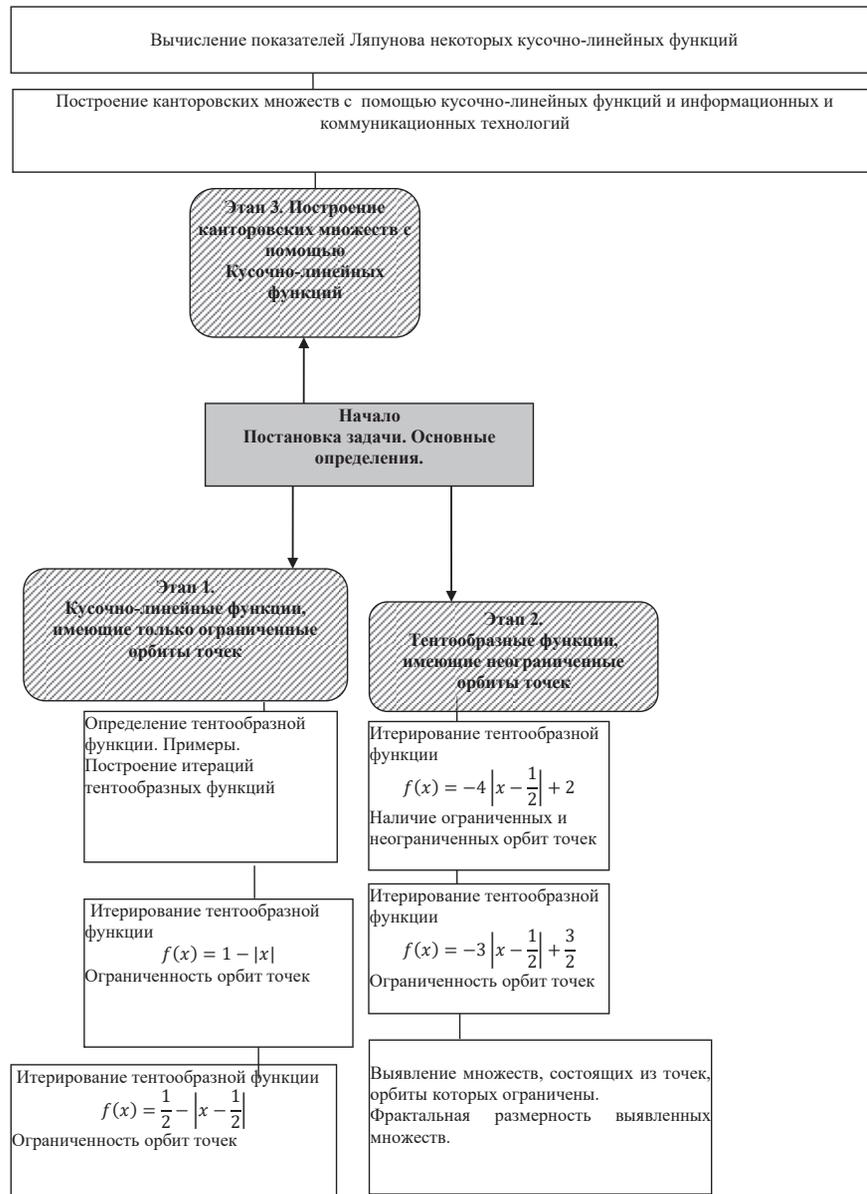


Креативность, как способность к творчеству, является одной из важнейших составляющих творческой личности, способной решать широкий спектр задач, которые ставит информационное общество. Это важное качество обеспечивает приспособление студента к быстро меняющимся условиям жизни, является залогом успеха личности в профессиональной деятельности. Большую роль в развитии этого важного качества играет выполнение обучающимися многоэтапных математико-информационных заданий (ММИЗ). ММИЗ являются для студентов творческими лабораториями, поскольку при их выполнении они выступают в роли математиков, программистов, экспериментаторов, компьютерных художников, пользователей высокого уровня глобальных сетей.

Мы рассмотрим ММИЗ, связанное с изучением нелинейной динамики.

Понятиям креативность, многоэтапное математико-информационное задание и нелинейная динамика посвящены многочисленные работы (см. [1] — [20]).

На наш взгляд, положительную роль при развитии креативности обучающихся играет выполнение многоэтапного математико-информационного задания по нелинейной динамике «Динамика итерирования кусочно-линейных функций». Данное многоэтапное математико-информационное задание состоит из трех этапов. План учебного проекта «Динамика итерирования кусочно-линейных функций» изображен на Рис. 1.



Р и с 1. Схема-план ММИЗ «Динамика итерирования кусочно-линейных функций»
F i g. 1. Scheme-plan of MSMIT "Dynamics of Iteration of Piecewise Linear Functions"



Опишем методику проведения выполнения данного ММИЗ. При выполнении ММИЗ студенты планируют собственную деятельность исходя из полученных результатов при выполнении ММИЗ, соотнося главное и второстепенное, разрабатывают альтернативные алгоритмы решения задач. Например, к альтернативным алгоритмам при выполнении ММИЗ относятся решение задачи несколькими способами, визуализация математического объекта с использованием математического пакета и языка программирования. При выполнении этапов студент применяет командную стратегию по решению задач и разработке алгоритмов, использует тактику профессионального роста. Это могут быть оригинальные решения задач или эффективные алгоритмы.

Этап 1. На первом этапе дается определение кусочно-линейной функции, с которым студенты должны познакомиться и провести анализ свойств данных функций.

Кусочно-линейная функция (тентообразная) – это функция, определенная на множестве вещественных чисел, линейная на каждом из интервалов, составляющих область определения.

Зададим $x_1 < x_2 < \dots < x_n$ (точки смены формул).

Кусочно-линейную функцию обычно задают на каждом из интервалов $(-\infty; x_1), (x_1; x_2); \dots (x_n; +\infty)$ отдельной формулой

$$\text{Она имеет вид: } f_x = \begin{cases} k_0x + b_0, & x < x_1 \\ k_1x + b_1, & x_1 < x < x_2 \\ \dots & \dots \\ k_nx + b_n, & x_n < x \end{cases}$$

Данная функция может являться непрерывной, но при соблюдении условия:

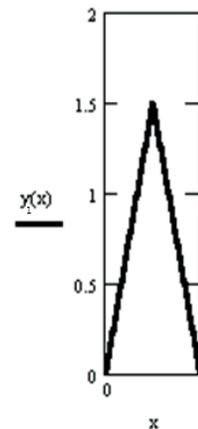
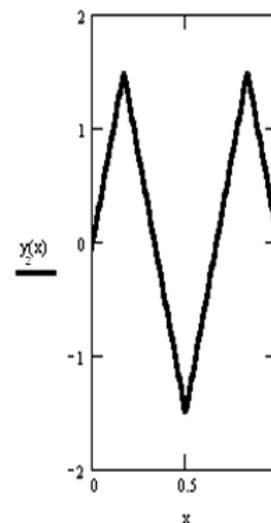
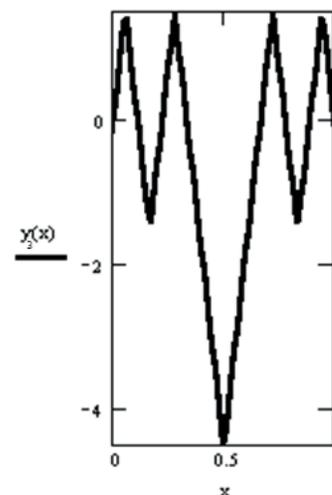
$$k_i x_i + b_i = k_{i+1} x_i + b_{i+1} = f(x_i) \text{ при } i = 1, 2, \dots, n-1.$$

В данной работе мы будем рассматривать только непрерывные кусочно-линейные функции. Примеры кусочно-линейных функций приведены на Рис. 2 – Рис. 4.

$$y_1(x) = \begin{cases} 3 \cdot x, & x \leq \frac{1}{2}, \\ 3 - 3 \cdot x, & x > \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (\text{Рис. 2.})$$

$$y_2(x) = \begin{cases} 9 \cdot x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{6} \\ 3 - 9 \cdot x, & \frac{1}{6} < x \leq \frac{1}{2} \\ -6 + 9 \cdot x, & \frac{1}{2} < x \leq \frac{5}{6} \\ 9 - 9 \cdot x, & \frac{5}{6} < x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{Рис. 3.})$$

$$y_3(x) = \begin{cases} 27 \cdot x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{18} \\ 3 - 27 \cdot x, & \frac{1}{18} < x \leq \frac{1}{6} \\ -6 + 27 \cdot x, & \frac{1}{6} < x \leq \frac{5}{18} \\ 9 - 27 \cdot x, & \frac{5}{18} < x \leq \frac{1}{2} \\ -18 + 27 \cdot x, & \frac{1}{2} < x \leq \frac{13}{18} \\ 21 - 27 \cdot x, & \frac{13}{18} < x \leq \frac{15}{18} \\ -24 + 27 \cdot x, & \frac{15}{18} < x \leq \frac{17}{18} \\ 27 - 27 \cdot x, & \frac{17}{18} < x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{Рис. 4.})$$

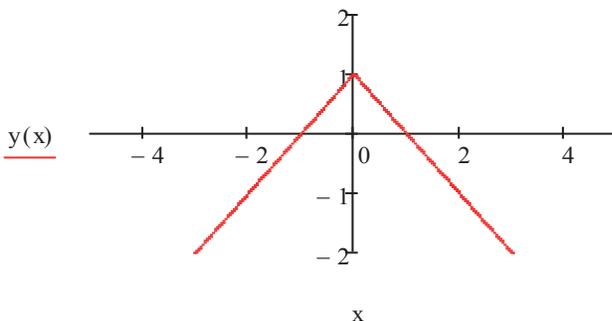
Р и с. 2. График функции $y_1(x)$ F i g. 2. Function graph $y_1(x)$ Р и с. 3. График функции $y_2(x)$ F i g. 3. Function graph $y_2(x)$ Р и с. 4. График функции $y_3(x)$ F i g. 4. Function graph $y_3(x)$ 

Отметим, что итерация кусочно-линейной функции будет также функцией кусочно-линейной. Здесь студентам полезно предложить задачу: показать, что функция, y_2 (Рис. 3) является второй итерацией функции y_1 , а функция y_3 является третьей итерацией функции, y_1 (Рис.4).

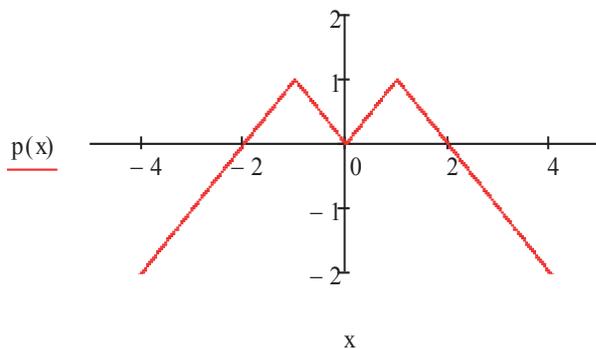
Рассмотрим сначала функцию $y(x) = 1 - |x|$.

Здесь студентам следует предложить задачи:

1. Построить первую и вторую итерации функции $y(x) = 1 - |x|$:
 - а) без использования компьютера;
 - б) с использованием компьютера (Рис. 5 - Рис. 6).
2. Найти неподвижные точки функции $y(x) = 1 - |x|$ и исследовать их характер.
3. Провести компьютерные эксперименты, связанные с исследованием орбит точек: $x_1 = 4$; $x_2 = -5$; $x_3 = 4,2$; $x_4 = 6,33$; $x_5 = -7,4$.
4. Показать, что орбита каждой точки данной функции ограничена.



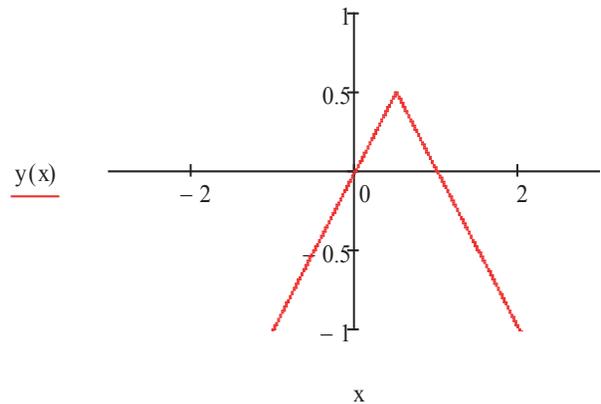
Р и с. 5. Первая итерация функции $y(x) = 1 - |x|$
F i g. 5. First iteration of the function $y(x) = 1 - |x|$



Р и с. 6. Вторая итерация функции $y(x) = 1 - |x|$
F i g. 6. Second iteration of the function $y(x) = 1 - |x|$

Далее рассмотрим функцию $y(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$. Данная функция, как и предыдущая, имеет модуль и является кусочно-линейной. Однако ее динамика при итерировании отличается от предыдущей функции (Рис. 7).

$$y(x) := -1 \left| x - \frac{1}{2} \right| + \frac{1}{2}$$



Р и с. 7. Первая итерация функции $y(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$
F i g. 7. First iteration of the function $y(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$

Для развития интуитивного мышления студентам полезно предложить построить вторую итерацию функции $y(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$ и выдвинуть гипотезу о связи графика n -й итерации данной функции с ее первой итерацией. А потом аналитическим методом провести доказательство, подтверждающее данную связь, указывающую, что орбита каждой точки для данной функции ограничена. Студентам можно дать указание, что каждая точка x с координатой, не превосходящей $\frac{1}{2}$ будет неподвижной, а каждая точка x , координата которой окажется больше $\frac{1}{2}$ и будет удовлетворять равенству $y(x) = y^{(2)}(x)$.

При исследовании динамики итерирования функции $y(x) = \frac{1}{2} - \left| x - \frac{1}{2} \right|$ студентам следует предложить найти ее неподвижные точки и выяснить их характер; выяснить все ли точки будут иметь ограниченную орбиту для данной функции [23], [24].

Этап 2. На данном этапе студентам предлагается доказать,

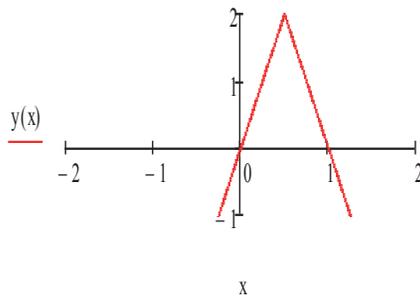
что функция $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 4x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ совпадает с функцией

$g(x) = -4 \left| x - \frac{1}{2} \right| + 2$. Проведенное доказательство даст возможность эффективней исследовать орбиты точек и будет нацелено на развитие гибкости мышления обучаемых. Затем студенту следует установить, что если $x < 0$ или $x > 1$, то орбита точки $f^{(n)}(x)$ стремится к бесконечности. Далее возникает естественный вопрос: орбита каждой ли точки $x \in [0; 1]$ будет ограничена. Студенты быстро замечают, что орбита точки $x = \frac{1}{2}$ неограничена, а орбита точки $x = \frac{1}{16}$ ограничена. Таким образом, внутри отрезка $[0; 1]$ будут точки, имеющие как ограниченные, так и неограниченные орбиты.

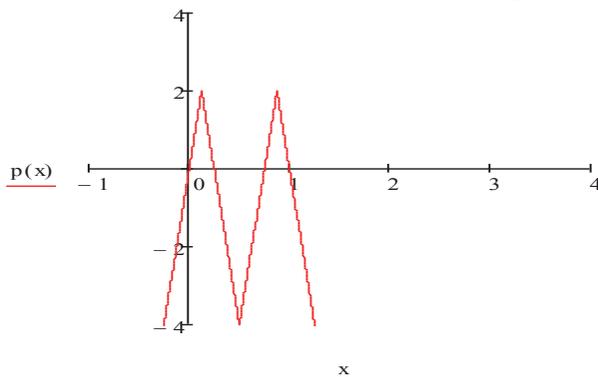
Приведем две итерации функции $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 4x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$

(Рис. 8 - Рис. 9).





Р и с. 8. Первая итерация функции $y(x) = -4\left|x - \frac{1}{2}\right| + 2$
F i g. 8. First iteration of the function $y(x) = -4\left|x - \frac{1}{2}\right| + 2$



Р и с. 9. Вторая итерация функции $y(x) = -4\left|x - \frac{1}{2}\right| + 2$
F i g. 9. Second iteration of the function $y(x) = -4\left|x - \frac{1}{2}\right| + 2$

Являясь, как и предыдущие две функции кусочно-линейной функцией $y(x) = -4\left|x - \frac{1}{2}\right| + 2$ имеет отличия, важнейшим из которых является наличие точек, орбиты которых неограничены. Причем точки, орбиты которых неограниченны, находятся как внутри отрезка $[0; 1]$, так и за его пределами. Студентам здесь полезно предложить найти три точки, находящиеся внутри отрезка $[0; 1]$, орбиты которых неограниченны. Преподаватель, под руководством которого студенты выполняют ММИЗ, делает важное замечание, подчеркивая, что с помощью кусочно-линейной функции

$$f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 4x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$$

несложно описать четверичное множество Кантора K^4 и дает определение множества K^4 .

После определения K^4 преподаватель продолжает вести занятие, направляя действия студентов. Сначала он дает домашнее задание, связанное с исследованием свойств четверичного множества Кантора, ориентируясь на упражнения 24 – 33 учебного пособия ([2] стр. 183). Затем отмечает, что если обозначить W^4 – множество тех точек вещественной прямой, орбиты которых ограничены, то множества K^4 и W^4 совпадут и предлагает студентам в качестве задачи установить, что $K^4 = W^4$. Доказательство данного равенства нацелено на развитие оригинальности мышления, поскольку связь между четверичным множеством Кантора и множеством точек, ор-

биты которых функции $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 4x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ ограничены,

неожиданна и установить ее непросто. Если у студентов возникнут трудности, то им можно рекомендовать учебное пособие [2] и провести консультацию. Причем преподавателю полезно предложить студентам проверку данного равенства двумя способами – с помощью исследования орбит точек выше приведенной функции и с помощью четверичной системы счисления. При выполнении второго этапа ММИЗ у студента появляется навык исследовательской работы, необходимый в будущей профессиональной деятельности и развивающийся важнейшее креативное качество – гибкость мышления.

Этап 3. Зная свойства четверичного множества Кантора, и проведя предварительно компьютерные эксперименты, преподаватель предлагает следующий алгоритм построения четверичного множества Кантора [21], [25]. На первом шаге фиксируется точка $x \in [0; 1]$; на втором шаге рассматривается $f^{(10)}(x)$ – десятая итерация функции. Если модуль $f^{(10)}(x)$ будет больше единицы или меньше нуля, то данная точка пропускается. Если же $f^{(10)}(x) \in [0; 1]$, то точку x окрашиваем в черный цвет; на третьем шаге к точке x добавляется маленькое приращение h , рассматривается точка $x + h$ и выполняются те же операции, которые описаны на первом и втором шагах; на четвертом шаге рассматривается точка $x + 2h$ и т.д. Данная процедура выполняется до тех пор, пока точка $x + nh$ (n – натуральное число) не выйдет за пределы отрезка $[0; 1]$. В результате закрашенное в черный цвет множество и будет изображать четверичное множество Кантора (Рис. 10).



Р и с. 10. Три итерации четверичного множества Кантора
F i g. 10. Three iterations of the quaternary Cantor set



Приведем два фрагмента программы построения четверичного множества Кантора:

1) Описание кусочно-линейной итерируемой функции

```
function Fx(x:double):double;
```

```
begin
```

```
if x<=0.5 then
```

```
result:= 4 * x
```

```
else
```

```
result:=4 - 4 * x;
```

```
end;
```

2) Построение третьей итерации четверичного множества Кантора

```
xn:=0;
```

```
while xn<=1 do begin
```

```
x:=xn;
```

```
for i:=0 to 3 do
```

```
x:=Fx(x);
```

```
if (x>=0) and (x<=1) then
```

```
fillcircle(round(xn*Window.Width+x0-22),y0-80,1);
```

```
xn:=xn+0.00001;
```

```
end;
```

Далее преподаватель указывает, что четверичное множество является фракталом и дает возможность студентам вычислить его фрактальную размерность, используя [11], [25].

Описав алгоритм построения четверичного множества Кантора с целью развития креативности, преподаватель предлагает студентам построить данный математический объект двумя способами:

1) с помощью математического пакета;

2) с помощью языка программирования.

Далее преподавателю полезно предложить построение четверичного множества Кантора по следующей схеме:

а) делим отрезок $[0; 1]$ на четыре части;

б) выбрасываем из отрезка $[0; 1]$ два отрезка $[0,25; 0,5]$, $[0,5; 0,75]$;

в) каждый из оставшихся отрезков $[0; 0,25]$, $[0,75; 1,0]$ вновь делим на четыре равных части и выбрасываем из них два средних отрезка и т.д.

Продолжая данный процесс до бесконечности, мы получим искомое четверичное множество Кантора.

Студентам полезно предложить исследование динамики

итерированной функции $f(x) = \begin{cases} 3x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 3 - 3x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$ и описать

построение классического (троичного) множества Кантора с помощью данной функции по схеме, описанной выше при исследовании четверичного множества Кантора.

В качестве примера, характеризующего количественную меру скорости экспоненциального разбегания траекторий, интересно оценить показатель Ляпунова $\varphi(x_0)$ в точке x_0 , заданного соотношением

$\varphi(x_0) \approx \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^{(N)}(x_0)}{dx} \right|$, когда N достаточно велико, для

функции $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq \frac{1}{2} \\ 4 - 4x, & x > \frac{1}{2} \end{cases}$. Мы замечаем, что угловой

коэффициент данной функции $f^{(N)}(x)$ будет равен 4^N . Следовательно, $\varphi(x_0) \approx \ln 4 > 1$ (в данном случае $\varphi(x_0) = \ln 4$), что соответствует разбеганию траекторий точек при изменении точки x_0 на точку $x_0 + h$ даже при достаточно малом значении h .

В заключение выполнения третьего этапа студентам полезно предложить оценить показатель Ляпунова трех рассмотренных выше кусочно-линейных функций.

Заключение

В конце выполнения ММИЗ преподаватель дает возможность студентам быть в роли не только математика и программиста, экспериментатора, но и компьютерного художника, предложив каждому студенту домашнее задание: разработать художественную композицию с использованием четверичного множества Кантора и других фракталов.

После выполнения ММИЗ у студентов проявляется мотивация к математике и информатике, поскольку интеграция между программированием и математическими методами отчетливо проявляется при решении поставленных задач.

Список использованных источников

- [1] Козырев, С. Б. Формирование креативных качеств студентов вуза при изучении пятеричного множества Кантора / С. Б. Козырев, В. С. Секованов // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2016. – Т. 22, № 3. – С. 179-182. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27033538> (дата обращения: 15.09.2020). — Рез. англ.
- [2] Кроновер, Р. Фракталы и хаос в динамических системах. Основы теории. – М: Постмаркет, 2000.
- [3] Секованов, В. С. Формирование креативной личности студента вуза при обучении математике на основе новых информационных технологий / В. С. Секованов. — Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова, 2004. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19933722> (дата обращения: 15.09.2020).
- [4] Секованов, В. С. Методическая система формирования креативности студента университета в процессе обучения фрактальной геометрии / В. С. Секованов. — Кострома: КГУ им. Н. А. Некрасова, 2006. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20089020> (дата обращения: 15.09.2020).
- [5] Секованов, В. С. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Дискретные динамические системы», как средство формирования креативности студентов / В. С. Секованов, А. С. Бабенко, Е. М. Селезнева, А. О. Смирнова // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. — 2016. — Т. 22, № 2. — С. 213-217. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26622239> (дата обращения: 15.09.2020). — Рез. англ.
- [6] Prusinkiewicz, P. Graphical modeling using L-systems / P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer. — DOI 10.1007/978-1-4613-8476-2_1 // The Algorithmic Beauty of Plants. The Virtual Laboratory. — Springer, New York, NY, 1990. — Pp. 1-50. — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-1-4613-8476-2_1 (дата обращения: 15.09.2020).



- [7] Секованов, В. С. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Алгоритмы построения аттракторов нелинейных отображений» как средство формирования креативности студентов / В. С. Секованов, А. С. Фатеев, Ж. В. Дорохова // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. — 2016. — Т. 22, № 4. — С. 235-243. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28765643> (дата обращения: 15.09.2020). — Рез. англ.
- [8] Секованов, В. С. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания Топологическая и фрактальные размерности множеств как средство развития креативности и формирования компетентности студентов / В. С. Секованов, С. Ф. Митенёва, Л. Б. Рыбина // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. — 2017. — Т. 23, № 2. — С. 140-144. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30462356> (дата обращения: 15.09.2020). — Рез. англ.
- [9] Секованов, В. С. Многоэтапное математико-информационное задание «Странные аттракторы» / В. С. Секованов, В. А. Ивков // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. — 2013 — Т. 19, № 5. — С. 155-157. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20935969> (дата обращения: 15.09.2020). — Рез. англ.
- [10] Секованов, В. С. Элементы теории дискретных динамических систем / В. С. Секованов. — 2-е изд., испр. — СПб.: Изд-во «Лань», 2018.
- [11] Секованов, В. С. Элементы теории фрактальных множеств / В. С. Секованов. — Изд. 5-е, перераб. и доп. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2015.
- [12] Секованов, В. С. Что такое фрактальная геометрия? / В. С. Секованов. — М: ЛЕНАНД, 2016.
- [13] Sekovanov, V. S. Visual Modeling and Fractal Methods in Science / V. S. Sekovanov, E. I. Smirnov, V. A. Ivkov, E. M. Selezneva, S. M. Shlyahina. — DOI 10.1109/MCSI.2014.28 // 2014 International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. — Varna, Bulgaria, 2014. — Pp. 94-98. — URL: <https://ieeexplore.ieee.org/document/7046168> (дата обращения: 15.09.2020).
- [14] Секованов, В. С. Мотивации в изучении нелинейных отображений фрактальности и хаоса методом наглядного моделирования / В. С. Секованов, Е. И. Смирнов, В. А. Ивков // Евразийское научное объединение. — 2015. — Т. 2, № 2. — С. 302-305. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23326459> (дата обращения: 15.09.2020).
- [15] Sekovanov, V. S. Visual Modeling of Nonlinear Mappings of Fractals and Chaos / V. S. Sekovanov, E. I. Smirnov, V. A. Ivkov. — DOI 10.5593/SGEMSOCIAL2015/B11/S1.035 // 2nd International Multidisciplinary Conference on Social Sciences and Arts (SGEM2015). Conference Proceedings (Aug 26 - Sept 01, 2015). — Albena, Bulgaria. — 2015. — Book 1, Vol. 1. — Pp. 263-272. — URL: <https://sgemsocial.org/ssgemlib/spip.php?article1252&lang=en> (дата обращения: 15.09.2020).
- [16] Секованов, В. С. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Построение фрактальных множеств с помощью L-систем и информационных технологий» как средство развития креативности студентов / В. С. Секованов, В. А. Ивков, А. А. Пигузов, А. С. Фатеев // CEUR Workshop Proceedings. — 2016. — Т. 1761. — С. 204-211. — URL: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper26.pdf> (дата обращения: 15.09.2020). — Рез. англ.
- [17] Кирик, В. А. Развитие педагогической креативности студентов в процессе образовательного форсайта / В. А. Кирик, И. Э. Куликовская. — DOI 10.18522/2658-6983-2020-08-33-39 // Мир университетской науки: культура, образование. — 2020. — № 8. — С. 33-39. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44459927> (дата обращения: 15.09.2020). — Рез. англ.
- [18] Watson, A. Themes and Issues in Mathematics Education Concerning Task Design: Editorial Introduction / A. Watson, M. Ohtani. — DOI 10.1007/978-3-319-09629-2_1 // Task Design In Mathematics Education. New ICM Study Series; A. Watson, M. Ohtani (ed.). Springer, Cham, 2015. — Pp. 3-15. — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-09629-2_1 (дата обращения: 15.09.2020).
- [19] Секованов, В. С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах / В. С. Секованов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2016. — Т. 21, № 3. — С. 185-199. — URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36548986> (дата обращения: 15.09.2020). — Рез. англ.
- [20] Sekovanov, V. Designing Anticipation Activity of Students When Studying Holomorphic Dynamics Relying on Information Technologies / V. Sekovanov, V. Ivkov, A. Piguzov, Y. Seleznyova. — DOI 10.1007/978-3-030-46895-8_4 // Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science; V. Sukhomlin, E. Zubareva (ed.). Springer, Cham. — 2020. — Vol. 1201. — Pp. 59-68. — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-46895-8_4 (дата обращения: 15.09.2020).
- [21] Vrscay, E. R. Iterated function systems: theory, applications and the inverse problem / E. R. Vrscay. — DOI 10.1007/978-94-015-7931-5_10 // Fractal Geometry and Analysis. NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences); J. Bélair, S. Dubuc (ed.). Springer, Dordrecht. — 1991. — Vol. 346. — 405-468. — URL: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-015-7931-5_10 (дата обращения: 15.09.2020).
- [22] Ashish, Rani M., Chugh R. Study of Variants of Cantor Sets Using Iterated Function System / Ashish, M. Rani, R. Chugh // General Mathematics Notes. — 2014. — Vol. 23, no. 1. — Pp. 45-58. — URL: https://www.emis.de/journals/GMN/yahoo_site_admin/assets/docs/6_GMN-4682-V23N1.247122947 (дата обращения: 15.09.2020).
- [23] Alligood, K. T. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems / K. T. Alligood, N. D. Sauer, J. A. Yorke. — DOI 10.1007/b97589 // Textbooks in Mathematical Sciences. — Springer, New York, NY, 1996. — URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/b97589> (дата обращения: 15.09.2020).



- [24] Sinha, S. Chaotic Dynamics in Iterated Map Neural Networks with Piecewise Linear Activation Function / S. Sinha. — DOI 10.3233/FI-1999-371202 // *Fundamenta Informaticae*. — 1999. — Vol. 37, no. 1, 2. — Pp. 31-50. — URL: <https://content.iospress.com/articles/fundamenta-informaticae/fi37-1-2-02> (дата обращения: 15.09.2020).
- [25] Souza, P. V. S. A simple and didactic method to calculate the fractal dimension - an interdisciplinary tool / P. V. S. Souza, R. L. Alves, W. F. Balthazar // *arXiv:1804.01038*. — 2018. — URL: <https://arxiv.org/pdf/1804.01038.pdf> (дата обращения: 15.09.2020).

Поступила 15.09.2020; одобрена после рецензирования 22.10.2020; принята к публикации 12.11.2020.

Об авторах:

Секованов Валерий Сергеевич, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий, институт физико-математических и естественных наук, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, Костромская область, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), доктор педагогических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8604-8931>, Sekovanovvs@yandex.ru

Ивков Владимир Анатольевич, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий, институт физико-математических и естественных наук, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, Костромская область, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), кандидат экономических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1014-9381>, ivkov_wa@mail.ru

Пигузов Алексей Александрович, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий, институт физико-математических и естественных наук, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, Костромская область, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), кандидат педагогических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5378-3326>, piguzov@ksu.edu.ru

Рыбина Лариса Борисовна, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромская государственная сельскохозяйственная академия» (156530, Российская Федерация, Костромская область, Костромской район, пос. Караваяево, Караваяевская с/а, Учебный городок, д. 34), кандидат философских наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7891-9373>, larisa.rybina.2014@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Kozyrev S.B., Sekovanov V.S. Students' creative qualities formation at institutions of higher education when studying quinary cantor set. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2016; 22(3):179-182. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27033538> (accessed 15.09.2020). (In Russ., ab-

- stract in Eng.)
- [2] Crownover R.M. Introduction to Fractals and Chaos. First ed. Jones & Bartlett, Boston; 1995. (In Eng.)
- [3] Sekovanov V.S. *Formirovanie kreativnoi lichnosti studenta vuza pri obuchenii matematike na osnove novykh informatsionnykh tekhnologii* [The formation of the creative personality of a university student in teaching mathematics based on new information technologies]. Kostroma, KGU im. N.A. Nekrasova Publ.; 2004. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=19933722> (accessed 15.09.2020). (In Russ.)
- [4] Sekovanov V.S. *Metodicheskaya sistema formirovaniia kreativnosti studenta universiteta v protsesse obucheniia fraktal'noi geometrii* [Methodological system for the formation of creativity of a university student in the process of learning fractal geometry]. Kostroma, KGU im. N.A. Nekrasova Publ.; 2006. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20089020> (accessed 15.09.2020). (In Russ.)
- [5] Sekovanov V.S., Babenko A.S., Seleznyova Ye.M., Smirnova A.O. Features of formation of tolerant attitude towards children at social risk from the inspectors of divisions on affairs of minors. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2016; 22(2):213-217. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26622239> (accessed 15.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [6] Prusinkiewicz P., Lindenmayer A. Graphical modeling using L-systems. In: The Algorithmic Beauty of Plants. *The Virtual Laboratory*. Springer, New York, NY; 1990. p. 1-50. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4613-8476-2_1
- [7] Sekovanov V.S., Fateyev A.S., Dorokhova Zh.V. Carrying out the multistep mathematical-informational task "Nonlinear Mapping Attractorstracing Algorithms" as means of students' creativity formation. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2016; 22(4):235-243. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=28765643> (accessed 15.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [8] Sekovanov V.S., Mitenyova S.F., Rybina L.B. Solving the multistage task in mathematics and informatics "Topological and Fractal Dimensions of Set" as means of creativity development and competences formation in students. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2017; 23(2):140-144. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30462356> (accessed 15.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [9] Sekovanov V.S., Ivkov V.A. Multistage Mathematics and Information Task "Strange Attractors". *Vestnik of Kostroma State University*. 2013; 19(5):155-157. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20935969> (accessed 15.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [10] Sekovanov V.S. *Jelementy teorii diskretnykh dinamicheskikh sistem* [Elements of the Theory of Discrete Dynamical Systems Theory]. Second ed. Lan Publishing, Saint Petersburg; 2018. (In Russ.)
- [11] Sekovanov V.S. *Jelementy teorii fraktal'nykh mnozhestv* [Elements of the Theory of Fractal Sets]. 5th ed. LIBROKOM, Moscow; 2015. (In Russ.)
- [12] Sekovanov V.S. *Chto takoe fraktal'naja geometrija?* [What



- is Fractal Geometry?]. Lenand, Moscow; 2016. (In Russ.)
- [13] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A., Selezneva E.M., Shlyahina S.M. Visual Modeling and Fractal Methods in Science. In: *2014 International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry*. Varna, Bulgaria; 2014. p. 94-98. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/MCSI.2014.28>
- [14] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A. *Motivacii v izuchenii nelinejnyh otobrazhenij fraktal'nosti i haosa metodom nagljadnogo modelirovaniya* = [Motivation in the study of nonlinear mappings of fractality and chaos by the method of visual modeling]. *Eurasian Scientific Association*. 2015; 2(2):302-305. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23326459> (accessed 15.09.2020). (In Russ.)
- [15] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A. Visual Modeling of Nonlinear Mappings of Fractals and Chaos. In: *2nd International Multidisciplinary Conference on Social Sciences and Arts (SGEM2015). Conference Proceedings* (Aug 26 - Sept 01, 2015). Albena, Bulgaria. 2015; 1-1:263-272. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.5593/SGEMSOCIAL2015/B11/S1.035>
- [16] Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Fateev A.S. Execution of mathematics and information multistep task "Building a Fractal Set with L-systems and Information Technologies" as a means of creativity of students. *CEUR Workshop Proceedings*. 2016; 1761:204-211. Available at: <http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper26.pdf> (accessed 15.09.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [17] Kirik V.A., Kulikovskaya I.E. Developing students' pedagogical creativity via educational foresight. *The world of academia: culture, education*. 2020; (8):33-39. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.18522/2658-6983-2020-08-33-39>
- [18] Watson A., Ohtani M. Themes and Issues in Mathematics Education Concerning Task Design: Editorial Introduction. In: Watson A., Ohtani M. (ed.) *Task Design In Mathematics Education. New ICMI Study Series*. Springer, Cham; 2015. p. 3-15. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_1
- [19] Sekovanov V.S. On Some Discrete Nonlinear Dynamical Systems. *Journal of Mathematical Sciences*. 2019; 237(3):460-472. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-019-04171-7>
- [20] Sekovanov V., Ivkov V., Piguzov A., Seleznyova Y. Designing Anticipation Activity of Students When Studying Holomorphic Dynamics Relying on Information Technologies. In: Sukhomlin V., Zubareva E. (ed.) *Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science*. 2020; 1201:59-68. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-46895-8_4
- [21] Vrscaj E.R. Iterated function systems: theory, applications and the inverse problem. In: Bélair J., Dubuc S. (ed.) *Fractal Geometry and Analysis. NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences)*. 1991; 346:405-468. Springer, Dordrecht. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-015-7931-5_10
- [22] Ashish, Rani M., Chugh R. Study of Variants of Cantor Sets Using Iterated Function System. *General Mathematics Notes*. 2014; 23(1):45-58. Available at: https://www.emis.de/journals/GMN/yahoo_site_admin/assets/docs/6_GMN-4682-V23N1.247122947.pdf (accessed 15.09.2020). (In Eng.)
- [23] Alligood K.T., Sauer N.D., Yorke J.A. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. *Textbooks in Mathematical Sciences*. Springer, New York, NY; 1996. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/b97589>
- [24] Sinha S. Chaotic Dynamics in Iterated Map Neural Networks with Piecewise Linear Activation Function. *Fundamenta Informaticae*. 1999; 37(1,2):31-50. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.3233/FI-1999-371202>
- [25] Souza P.V.S., Alves R.L., Balthazar W.F. A simple and didactic method to calculate the fractal dimension - an interdisciplinary tool. 2018. *arXiv:1804.01038*. Available at: <https://arxiv.org/pdf/1804.01038.pdf> (accessed 15.09.2020). (In Eng.)

Submitted 15.09.2020; approved after reviewing 22.10.2020;
accepted for publication 12.11.2020.

About the authors:

Valeriy S. Sekovanov, Head of the Department of Applied Mathematics and Information Technology, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Dr.Sci. (Pedagogy), Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8604-8931>, Sekovanovvs@yandex.ru

Vladimir A. Ivkov, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technology, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Ph.D. (Economics), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1014-9381>, ivkov_wa@mail.ru

Alexey A. Piguzov, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technology, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Ph.D. (Pedagogy), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5378-3326>, piguzov@ksu.edu.ru

Larisa B. Rybina, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Ph.D. (Philosophy), Associate Professor, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7891-9373>, larisa.rybina.2014@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

