УДК 512.643.8

Пивнева С.В.[1], Мельников Б.Ф.[2], Купцов Н.А.[2]

[1]Тольяттинский государственный университет, г. Тольятти, Россия
[2]Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева, г. Самара, Россия

БЕСКОНЕЧНО СЛОЖНАЯ ЗАДАЧА О КЛАССИФИКАЦИИ S-НАБОРОВ НЕКОММУТИРУЮЩИХ МАТРИЦ

АННОТАЦИЯ

В работе рассматривается задача о классификации пар коммутирующих матриц и приводится ее доказательство. Задача о классификации пар коммутирующих матриц равносильна задаче о классификации s-наборов некоммутирующих матриц. Поскольку s здесь произвольное, то эта задача представляется бесконечно сложной. Решение ее известно только для s=1 и вытекает из теории жордановых форм матриц.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Линейная алгебра; коммутирующие матрицы; некоммутирующие матрицы; линейные операторы; образ оператора.

Pivneva S.V.[1], Melnikov B.F.[2], Kuptsov N.A.[2]

[1]Togliatti State University, Togliatti, Russia
[2]Samara National Research University, Samara, Russia

INFINITELY COMPLEX SUM OF CLASSIFICATION OF NON-COMMUTING MATRIX S-SETS

ABSTRACT

The article examines and grounds the problem of classification of commuting matrix pairs. The sum of classification of commuting matrix pairs is equivalent to the sum of classification of non-commuting matrix s-sets. Since s is here arbitrary, the sum seems infinitely complex. Its solution is known only for s=1 and arises from the theory of Jordan form of a matrix.

KEYWORDS

Linear algebra; commuting matrices; non-commuting matrices; linear operator; operator image.

Введение

Традиционно считается, что линейная алгебра представляет собой раздел математики, в котором все поставленные задачи имеют решение и, более того, это решение записывается в явном виде. Однако это мнение ошибочно. В линейной алгебре есть задачи, которые не только не решены до сих пор, но и, скорее всего, никогда не будут решены [1,2,4,5]. Такие задачи называют «дикими». Возникает вопрос, как строго математически обосновать, что поставленная задача является «дикой»? Впервые такое обоснование было получено И.М. Гельфандом и В.А. Пономаревым в 1969 году для задачи о классификации пар коммутирующих матриц. А именно, в статье [3] они показали, что задача о классификации пар коммутирующих матриц равносильна задаче о классификации s-наборов некоммутирующих матриц. Поскольку s здесь произвольное, то эта задача представляется бесконечно сложной. Решение ее известно только для s=1 и вытекает из теории жордановых форм матриц.

Работа сыграла важную роль в развитии алгебры. В настоящее время задача считается «дикой», если в качестве подзадачи она содержит задачу о паре коммутирующих матриц [4,5,6,7,8].

Работа [3] представляет собой короткую заметку, в которой основные результаты только сформулированы, но не доказаны. Цель статьи: дать развернутое доказательство утверждений этой работы. Настоящая работа состоит из 2-х частей. Основным результатом первой части является теорема 1, сформулированная в работе [3]. Согласно этой теореме задача о паре коммутирующих матриц равносильна задаче о классификации троек матриц. Формулируются и доказываются вспомогательные Леммы. Сама теорема доказывается достаточно подробно, приводится диаграмма рассуждений. Во второй части доказана основная теорема о равносильности задачи о паре коммутирующих матриц задаче о классификации произвольных s-наборов матриц.

Часть 1. Задача о паре коммутирующих матриц

Пусть даны 7 линейных n-мерных подпространств $V_1, \dots V_7$ над полем $\mathbb{C}$. Обозначим $V = \bigoplus V_i$. Выберем в каждом из них базис e_i^m, $1 \le i \le n, 1 \le m \le 7$.

Введем отношения порядка на базисе $\mathcal{E} = \{e_i^m\}$, согласно которому $e_i^m < e_j^k$, если $m < k$или $m = k, i < j$.

Тогда упорядоченный набор

$$\{e_i^m | 1 \le i \le n, 1 \le m \le 7\} \qquad (1.1)$$

это базис в V.

Назовем этот базис (1.1) стандартным.

Пусть $\mathrm{A} = (\alpha_{ij}), B = (\beta_{ij}), C = (c_{ij})$ $n \times n$- матрицы.

Определим в пространстве V линейные операторы$\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$по трем $n \times n$- матрицам $\mathrm{A} = (\alpha_{ij})$, $B = (\beta_{ij}), C = (c_{ij})$ при помощи следующей диаграммы 1 (Рис.1)

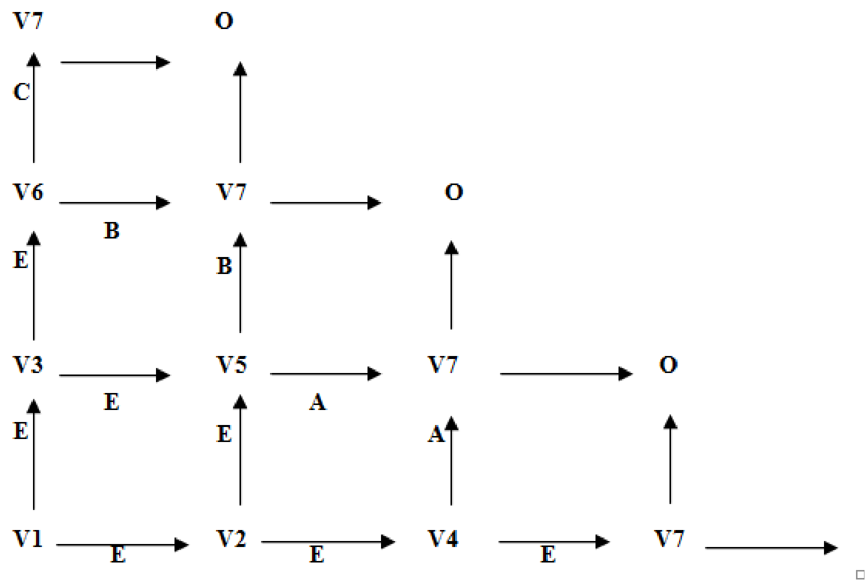

Рис. 1. Диаграмма 1

Оператор $\mathcal{A}$ действует «горизонтально» или построчно, согласно диаграмме 1. А именно:

$$\mathcal{A}(e_i^1) = e_i^2,$$
$$\mathcal{A}(e_i^2) = e_i^4,$$
$$\mathcal{A}(e_i^4) = e_i^7,$$
$$\mathcal{A}(e_i^3) = e_i^5,$$
$$\mathcal{A}(e_i^5) = \sum a_{ji} e_j^7,$$
$$\mathcal{A}(e_i^6) = \sum b_{ji} e_j^7,$$
$$\mathcal{A}(e_i^7) = 0.$$

Оператор $\mathcal{B}$ действует «вертикально» согласно диаграмме 1. А именно:

$$\mathcal{B}(e_i^1) = e_i^3,$$
$$\mathcal{B}(e_i^3) = e_i^6,$$
$$\mathcal{B}(e_i^6) = \sum c_{ji} e_j^7,$$
$$\mathcal{B}(e_i^2) = e_i^5,$$
$$\mathcal{B}(e_i^5) = \sum b_{ji} e_j^7,$$
$$\mathcal{B}(e_i^4) = \sum a_{ji} e_j^7,$$
$$\mathcal{B}(e_i^7) = 0.$$

Лемма 1.1 Операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ коммутируют.

Доказательство.
$\mathcal{AB} = \mathcal{BA}$.
$v_i \in V_i$.
$\mathcal{AB}v_i = \mathcal{BA}v_i$.
Для доказательства достаточно показать, что $\mathcal{AB}e_i^m = \mathcal{BA}e_i^m, \forall\, i, m$.
$\mathcal{A}(e_i^7) = 0$,
$\mathcal{AB}e_i^7 = 0 = \mathcal{BA}e_i^7$,
$\mathcal{AB}e_i^6 = \mathcal{A}\left(\sum_j a_{ji}e_j^7\right) = 0$,
$\mathcal{BA}e_i^6 = \mathcal{B}\left(\sum_j a_{ji}e_j^7\right) = 0$.
Лемма доказана.
Лемма 1.2
Пусть $\varphi, \psi, \mathcal{T}$ - операторы в линейном пространстве V.
Предположим, что $\varphi = \mathcal{T}\psi\mathcal{T}^{-1}$.
Тогда $\mathcal{T}(Im\psi) = Im\varphi$.
Доказательство.

$$\varphi = \mathcal{T}\psi\mathcal{T}^{-1} \Longrightarrow \varphi\mathcal{T} = \mathcal{T}\psi,$$
$$Im\psi = \{y | \exists\, x, y = \psi(x)\},$$
$$Im\mathcal{T}\psi = \mathcal{T}(Im\psi) \Longrightarrow Im\mathcal{T}\psi = Im\varphi\mathcal{T} = Im\varphi.$$

Итак,

$$\mathcal{T}(Im\psi) = Im\varphi.$$

Лемма доказана.

Пусть даны еще три матрицы A', B', C', которые определяют операторы и матрицы $\mathcal{A}'$ и $\mathcal{B}'$ точно также как изложено выше. Предположим, что матрицы Cи C'невырождены. Будем говорить, что пара коммутирующих матриц $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ сопряжена паре $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$, если существует невырожденная $7n\times 7n$-матрица $\mathcal{T}$ такая, что $\mathcal{A}' = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}$ и $\mathcal{B}' = \mathcal{T}\mathcal{B}\mathcal{T}^{-1}$.

Будем говорить, что тройки (A, B, C) и (A', B', C') сопряжены, если существует невырожденная $n\times n$ — матрица Tтакая, что $A' = \mathcal{T}A\mathcal{T}^{-1}$, $B' = \mathcal{T}B\mathcal{T}^{-1}$, $C' = \mathcal{T}C\mathcal{T}^{-1}$.

Теорема 1. Пара коммутирующих матриц $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ сопряжена паре $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$ тогда и только тогда, когда тройка $(A, B. C)$сопряжена тройке (A', B', C').

Доказательство.

Пункт 1. Пусть пара $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ сопряжена паре $(\mathcal{A}', \mathcal{B}')$. Покажем, что существует невырожденная $n\times n$ — матрица T такая, что $A' = TAT^{-1}$, $B' = TBT^{-1}$, $C' = TCT^{-1}$.

Существует невырожденная $7n\times 7n$-матрица $\mathcal{T}$ такая, что $\mathcal{A}' = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}$,$(\mathcal{T}\mathcal{A} = \mathcal{A}'\mathcal{T})$ и $\mathcal{B}' = \mathcal{T}\mathcal{B}\mathcal{T}^{-1}$, $(\mathcal{T}\mathcal{B} = \mathcal{B}'\mathcal{T}$). Покажем, что матрица $\mathcal{T}$ блочно нижнетреугольная. Для этого покажем, что

$$\mathcal{T}(V_i) \subset V_i \oplus (\oplus_{i<j} V_i)$$

для любого $1 \le i \le 7$. Для $i = 1$ это очевидно.

Заметим, что

$$(\mathcal{A}')^i(\mathcal{B}')^j = \mathcal{T}\mathcal{A}^i\mathcal{B}^j\mathcal{T}^{-1} \tag{1.2}$$

для любых i, j.
(т. е. (1): $(\mathcal{A}')^i(\mathcal{B}')^j = \underbrace{(\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1})\dots(\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1})}_{i}\underbrace{(\mathcal{T}\mathcal{B}\mathcal{T}^{-1})\dots(\mathcal{T}\mathcal{B}\mathcal{T}^{-1})}_{j} = \mathcal{T}\mathcal{A}^i\mathcal{B}^j\mathcal{T}^{-1}$)

$$\mathcal{T}: V_i \to V_i$$

Тогда из Леммы 2 получаем:
$\mathcal{T}\left(Im(\mathcal{A}^i\mathcal{B}^j)\right) = Im((\mathcal{A}')^i(\mathcal{B}')^j)$,
где Im обозначает образ оператора.

Так как $V_2 \subset Im\mathcal{A}$, то применим (1.2), положив $i = 1, j = 0$. Получаем
$\mathcal{T}(V_2) \subset Im\mathcal{A}' = V_2 \oplus V_4 \oplus V_5 \oplus V_7$.
Так как $V_3 \subset Im\mathcal{B}$, то $\mathcal{T}(V_3) \subset Im\mathcal{B}' = V_3 \oplus V_5 \oplus V_6 \oplus V_7$.
Так как $V_4 \subset Im\mathcal{A}^2$, то $\mathcal{T}(V_4) \subset Im\mathcal{A}'^2 = V_4 \oplus V_7$.
Так как $V_5 \subset Im\mathcal{AB}$, то $\mathcal{T}(V_5) \subset Im\mathcal{A}'\mathcal{B}' = V_5 \oplus V_7$.
Так как $V_6 \subset Im\mathcal{B}^2$, то $\mathcal{T}(V_6) \subset Im\mathcal{B}'^2 = V_6 \oplus V_7$.
Так как $V_7 \subset Im\mathcal{B}^3$ (здесь используется невырожденность матрицы C), то

$$\mathcal{T}(V_7) \subset Im\mathcal{B}'^3 = V_7.$$

Что доказывает (1.1).
Обозначим через T_m, $1 \le m \le 7$ диагональные $n\times n$ блоки в матрице $\mathcal{T}$. Тогда

$$\mathcal{T}(e_i^m) = T_m(e_i^m) + \{\text{лин. комбинация } e_j^k, k > m\} \tag{1.3}$$

Из теоремы Лапласа вытекает, что матрица $\mathcal{T}$невырожденная, то и все диагональные блоки T_m невырожденные. Обратная матрица $\mathcal{T}^{-1}$ также блочно нижнетреугольная и для нее имеет место

(1.2).

Матрица A также блочно нижнетреугольная. Для любого $1 \le m \le 7$ обозначим через $a(m)$ номер, для которого V_mи $V_{a(m)}$ скреплены горизонтальной стрелкой на диаграмме 1. Например $a(1)$=2, $a(2)$=4, $a(5)$=7. Из определения матрицы (оператора) $\mathcal{A}$ вытекает, что

$$\mathcal{A}(e_i^m) = A_m e_i^{a(m)},$$

где A_mесть $n\times n$ − матрица, соответствующая переходу по горизонтальной стрелке. Например, для $A_1 = E, A_2 = E, A_5 = A, A_6 = B$. Здесь E– единичная матрица.

Распишем для B.

Матрица B также блочно нижнетреугольная. Для любого $1 \le m \le 7$ обозначим через $b(m)$ номер, для которого V_mи $V_{b(m)}$ скреплены вертикальной стрелкой на диаграмме. Например,$b(1)$=3, $b(3)$ =6, $b(2)$ =5. Из определения матрицы (оператора) $\mathcal{B}$ вытекает, что

$$\mathcal{B}(e_i^m) = B_m e_i^{b(m)},$$

где B_mесть $n\times n$ − матрица, соответствующая переходу по вертикальной стрелке. Например, для $B_1 = E, B_2 = E, B_4 = A, B_5 = B,\ B_6 = C$.

Аналогично

$$\mathcal{A}'(e_i^m) = \mathcal{A}'_m e_i^{a(m)},$$
$$\mathcal{B}'(e_i^m) = \mathcal{B}'_m e_i^{b(m)}.$$

Тогда

$$\mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}(e_i^m) = \mathcal{T}_{a(m)}\mathcal{A}_m\mathcal{T}_m^{-1}\left(e_i^{a(m)}\right) + \left\{\text{лин. комбинация } e_j^k, k > a(m)\right\}$$
$$\mathcal{A}'(e_i^m) = \mathcal{A}'_m e_i^{a(m)},$$

Поскольку $\mathcal{A}' = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1}$, то

$$A'_m = T_{a(m)}A_m T_m^{-1} \tag{1.4}$$

для любого $1 \le m \le 7$.

Рассмотрим для $\mathcal{B}$.

$$\mathcal{T}\mathcal{B}\mathcal{T}^{-1}\,(e_i^m) = \mathcal{T}_{b(m)}\mathcal{B}_m\mathcal{T}_m^{-1}\left(e_i^{b(m)}\right) + \left\{\text{лин. комбинация } e_j^k, k > b(m)\right\}$$
$$\mathcal{B}'(e_i^m) = \mathcal{B}'_m e_i^{b(m)},$$

Так как $\mathcal{B}' = T\mathcal{B}T^{-1}$, то

$$B'_m = T_{b(m)}B_m T_m^{-1} \tag{1.5}$$

для любого $1 \le m \le 7$.

Положим в (1.4) $m = 1$. Так как $A_1 = A'_1 = E$, то $E = T_2 E T_1^{-1}$, то есть $T_1 = T_2$.
Положим в (1.5) $m = 1$. Так как $B_1 = B'_1 = E$, то $E = T_3 E T_1^{-1}$, то есть $T_1 = T_3$.
Положим в (1.4) $m = 2$. Так как $A_2 = A'_2 = E$, то $E = T_4 E T_2^{-1}$, то есть $T_2 = T_4$.
Положим в (1.4) $m = 3$. Так как $A_3 = A'_3 = E$, то $E = T_5 E T_3^{-1}$, то есть $T_3 = T_5$.
Положим в (1.5) $m = 3$. Так как $B_3 = B'_3 = E$, то $E = T_6 E T_3^{-1}$, то есть $T_3 = T_6$.
Положим в (1.4) $m = 4$. Так как $A_4 = A'_4 = E$, то $E = T_7 E T_4^{-1}$, то есть $T_4 = T_7$.
Таким образом, получили, что $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = T_7$.
Обозначим эту матрицу через T.
Положим в (1.5) $m = 4$. Так как $B_4 = A$ и $B'_1 = A'$, то $A' = TAT^{-1}$.
Положим в (1.5) $m = 5$. Так как $B_5 = B$ и $B'_5 = B'$, то $B' = TBT^{-1}$.
Положим в (1.5) $m = 6$. Так как $B_6 = C$ и $B'_6 = C'$, то $C' = TCT^{-1}$.
Что доказывает утверждение пункта 1.

Пункт 2. Покажем, что пары (A, B), (A', B') сопряжены.

Пусть $\begin{cases} A' = TAT^{-1} \\ B' = TBT^{-1} \\ C' = TCT^{-1} \end{cases}$. Рассмотрим блочно диагональный оператор $\mathcal{T}: V \to V$, для которого

$$\mathcal{T}(e_i^m) = e_i^m \text{ для } m = 1, 2, 3, 7$$
$$\mathcal{T}(e_i^m) = \textstyle\sum_{j=1}^n t_{ji}\, e_i^m \text{ для } m = 4, 5, 6$$

Обозначим

$$\tilde{A} = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1},$$
$$\tilde{B} = \mathcal{T}\mathcal{B}\mathcal{T}^{-1}.$$

Получаем, что

$$\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}',$$
$$\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{B}'.$$

Действительно:

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{A}} e_i^1 = e_i^2 = A' e_i^2, \\ \tilde{\mathcal{A}} e_i^2 = e_i^4 = A' e_i^2, \\ \tilde{\mathcal{A}} e_i^5 = \mathcal{T}\mathcal{A}\mathcal{T}^{-1} e_i^5 = (TAT^{-1}) e_i^5 = A' e_i^5. \end{cases}$$

Окончательно

$$A' = TAT^{-1},$$
$$B' = TBT^{-1}.$$

Утверждение доказано.

Часть 2. Основная теорема

Рассмотрим теперь общий случай на диаграмме 2 (Рис. 2).

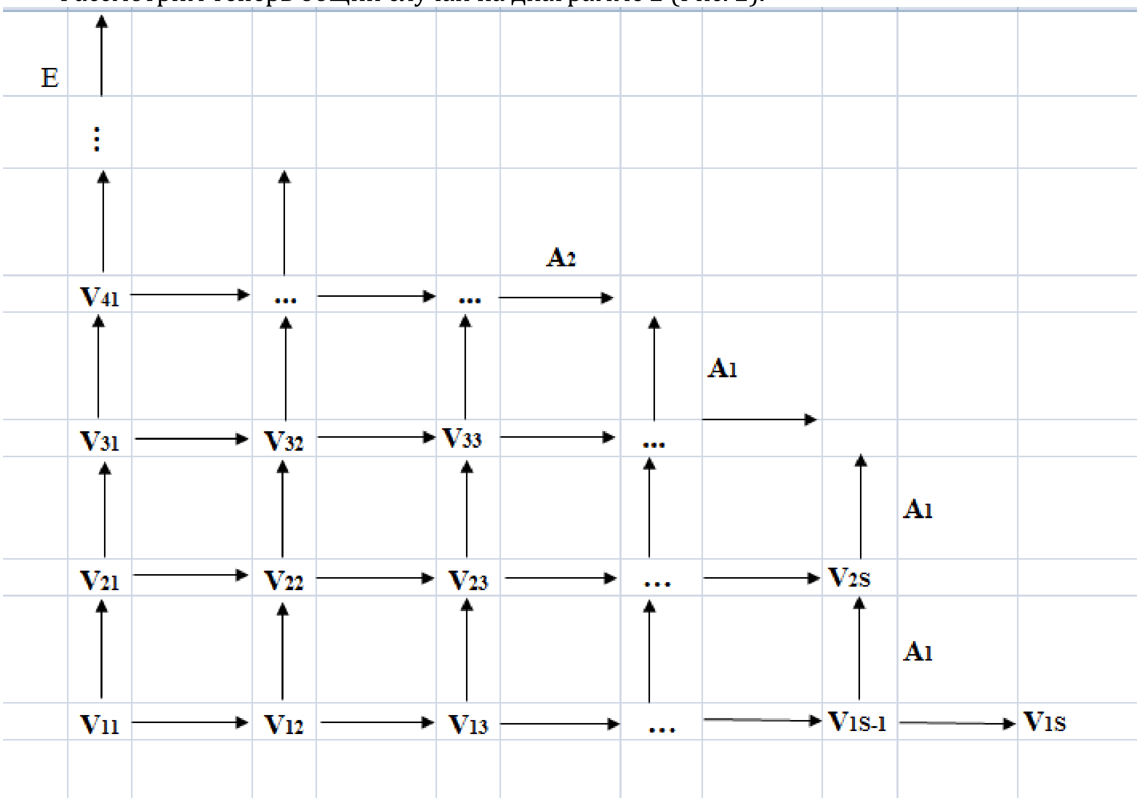

Рис. 2. Диаграмма 2

Пусть оператор $\mathcal{A}$ также действует «горизонтально» или построчно, согласно диаграмме 2. А именно:

$$\mathcal{A}(e_i^1) = e_i^2,$$
$$\mathcal{A}(e_i^2) = e_i^3,$$
$$\mathcal{A}(e_i^3) = e_i^4,$$
$$\mathcal{A}(e_i^4) = e_i^5,$$
$$\mathcal{A}(e_i^{s-1}) = \sum a_{ji} e_j^s,$$
$$\mathcal{A}(e_i^s) = 0.$$

Оператор $\mathcal{B}$ действует «вертикально» согласно диаграмме 2.
А именно:

$$\mathcal{B}(e_i^1) = e_i^2,$$
$$\mathcal{B}(e_i^2) = e_i^3,$$
$$\mathcal{B}(e_i^3) = e_i^4,$$
$$\mathcal{B}(e_i^{s-1}) = \sum \mathrm{c}_{ji} e_j^s,$$
$$\mathcal{B}(e_i^s) = 0.$$

Основная теорема. Пары матриц $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ и $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены $(A_1, A_2, \dots A_s)$ и $(B_1, B_2, \dots B_s)$.

Доказательство утверждения аналогично. Рассмотрим его схематично.

Схема доказательства.

Пункт 1. Пусть пара $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ сопряжена паре $(\mathcal{A}',\mathcal{B}')$.

Доказываем, что существует невырожденная $n \times n -$ матрица T такая, что $A_1{}' = TB_1T^{-1}$, $A_2{}' = TB_2T^{-1}$,…$A_s{}' = TB_sT^{-1}$.

Существует невырожденная $7n{\times}7n$-матрица $\mathcal{T}$ такая, что $\mathcal{A}_1{}' = \mathcal{T}\mathcal{B}_1\mathcal{T}^{-1}$,$(\mathcal{T}\mathcal{A}_1 = \mathcal{B}_1{}'\mathcal{T})$, $\mathcal{A}_2{}' = \mathcal{T}\mathcal{B}_2\mathcal{T}^{-1}$, $(\mathcal{T}\mathcal{A}_2 = \mathcal{B}_2{}'\mathcal{T})$,... $\mathcal{A}_s{}' = \mathcal{T}\mathcal{B}_s\mathcal{T}^{-1}$, $(\mathcal{T}\mathcal{A}_s = \mathcal{B}_s{}'\mathcal{T}\ )$

Показываем, что матрица $\mathcal{T}$ блочно нижнетреугольная, т.е.

$$\mathcal{T}\left(V_{ij}\right) \subset V_{ij} \oplus (\oplus_{i<j} V_{ij}),$$

для любого $1 \le i \le 7, 1 \le j \le 7$.

Заметим, что

$$(\mathcal{A}_1{}')^i(\mathcal{A}_2{}')^j = \mathcal{T}\mathcal{A}_1{}^i\mathcal{A}_2{}^j\mathcal{T}^{-1}\text{и т.д.} \tag{6}$$

для любых i, j.

$$\mathcal{T}: V_{ij} \ \to V_{ij}\,.$$

Тогда из Леммы 2 получаем:

$$\mathcal{T}\left(Im\left(\mathcal{A}_1{}^i\mathcal{A}_2{}^j\right)\right) = Im((\mathcal{A}_1{}')^i(\mathcal{A}_2{}')^j).$$

Обозначим через T_m, $1 \le m \le 7$ диагональные $n{\times}n$ блоки в матрице T. Тогда

$$T(e_i^m) = T_m(e_i^m) + \{\text{лин. комбинация } e_j^k, k > m\}. \tag{7}$$

Из теоремы Лапласа вытекает, что матрица T невырожденная, то и все диагональные блоки T_m невырожденные. Обратная матрица T^{-1} также блочно нижнетреугольная и для нее имеет место (6).

Аналогично теореме 1.1 доказываем, что матрицы $A_1, A_2, \dots A_s$ также блочно нижнетреугольные.

Из определения матрицы (оператора) $\mathcal{A}$ вытекает, что

$$\mathcal{A}(e_i^m) = A_m e_i^{a(m)},$$

где A_mесть $n{\times}n$ — матрица, соответствующая переходу по горизонтальной стрелке.

Матрицы $B_1, B_2, \dots B_s$ также блочно нижнетреугольные.

$$\mathcal{B}(e_i^m) = B_m e_i^{b(m)},$$

где B_mесть $n{\times}n$ -матрица, соответствующая переходу по вертикальной стрелке.

Аналогично доказывается:

$$\mathcal{A}'(e_i^m) = \mathcal{A}'_m e_i^{a(m)},$$
$$\mathcal{B}'(e_i^m) = \mathcal{B}'_m e_i^{b(m)}.$$

Тогда

$$A'_m = T_{a(m)}A_m T_m^{-1} \tag{8}$$

для любого $1 \le m \le 7$.

$$B'_m = T_{b(m)}B_m T_m^{-1} \tag{9}$$

для любого $1 \le m \le 7$.

Аналогично Теореме 1 доказываем, что $T_1 = T_2 = T_3 = T_4 = T_5 = T_6 = T_7$.

Что доказывает утверждение пункта 1.

Пункт 2. Показываем, что пары $(A_1, A_2, \dots A_s)$, $(B_1, B_2, \dots B_s)$ сопряжены.

Пусть $\begin{cases} A_1{}' = TB_1T^{-1} \\ A_2{}' = TB_2T^{-1} \\ \dots \\ A_s{}' = TB_sT^{-1} \end{cases}$. Рассматриваем блочно диагональный оператор $\mathcal{T}: V \to V$.

Обозначаем

$$\widetilde{A_1} = T\mathcal{A}_1T^{-1},$$
$$\widetilde{A_2} = T\mathcal{A}_2T^{-1},$$
$$\dots$$
$$\widetilde{A_s} = T\mathcal{A}_sT^{-1}.$$

Получаем, что

$$\widetilde{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1{}',$$
$$\widetilde{\mathcal{A}_2} = \mathcal{A}_2{}',$$
$$\dots$$
$$\widetilde{\mathcal{A}_s} = \mathcal{A}_s{}'.$$

Окончательно

$A_1{}' = TB_1T^{-1}$

$A_2{}' = TB_2T^{-1}$.

...

$A_s{}' = TB_sT^{-1}$

Утверждение общего случая доказано.

Заключение

"Дикие" задачи линейной алгебры вызывают прикладной интерес у исследователей, что отражено в публикациях [5-16]. Задача о паре коммутирующих матриц интересна также с точки зрения компьютерных задач [17-20].

Работа выполнена при поддержке гранта Министерства образования и науки Российской Федерации, постановление № 220, в ФГБОУ ВО «Тольяттинский государственный университет», договор № 14.B25.31.0011.

Литература

1. Панов А.Н. Представления разрешимых алгебр ли с фильтрациями // Математический сборник - 2012. Т. 203. № 1. - С. 77-90.
2. Панов А.Н. Представления унитреугольной группы // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки.- 2011. Т. 16. № 6-2. - С. 1722-1725.
3. Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Замечания о классификации пары коммутирующих линейных преобразований в конечномерном пространстве // Функциональный анализ и его приложения - 1969, том 3, выпуск 4 – С. 81–82.
4. Дрозд Ю.А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи - Киев, Институт математики АН УССР - 1977.
5. Дрозд Ю.А. Представления коммутативных алгебр / Функциональный анализ и его приложения - 1972, №6:4 – С. 41–43
6. Гупта Ч. К. О ручных и диких автоморфизмах алгебр / В. М. Левчук, Ю. Ю. Ушаков // Фундаментальная и прикладная математика. Центр новых информационных технологий МГУ- 2013, том 18, № 4 - С. 79—88.
7. Пирятинская А. Ю. Ручные и дикие задачи теории представлений * - алгебр : Дис...канд. физ.- мат. наук: 01.01.06 // Киевский ун-т им. Т.Г.Шевченко. — К., 1995. — 114 л.
8. Македонский Е. А. О диких и ручных конечномерных алгебрах Ли // Функциональный анализ и его приложения - 2013, № 47:4 – С. 30–44.
9. Данилов В. И. Геометрия торических многообразий // УМН - 1978, №33:2(200) - С. 85–134.
10. Вершик А. М. , Керов С. В. Асимптотическая теория характеров симметрической группы // Функциональный анализ и его приложения - 1981, №15:4 - С. 15–27.
11. Беккерт В. И. Ручные двухточечные колчаны с соотношениями // Известия вузов. Математика – 1986, №12 – С. 62–64.
12. Panov A.N. On the index of certain nilpotent lie algebras // Journal of Mathematical Sciences - 2009. Т. 161. № 1 - С. 122-129.
13. Eliseev D.Y. Tangent cones of schubert varieties for an of lower rank / A.N. Panov // Journal of Mathematical Sciences - 2013. Т. 188. № 5 - С. 596-600.
14. Vyatkina K.A. The field of u-invariants of the adjoint representation of the group GL(N, K) / Panov A.N. // Mathematical Notes - 2013. Т. 93. № 1-2 - С. 187-190.
15. Panov A.N. Invariants of coadjoint representations of regular factors // St. Petersburg Mathematical Journal - 2011. Т. 22. № 3 - С. 497-514.
16. Панов А.Н. Инварианты коприсоединенных представлений регулярных факторов // Алгебра и анализ - 2010. Т. 22. № 3 - С. 222-247.
17. Рудницкий В.Н. Синтез модели обратной нелинейной операции расширенного матричного криптографического преобразования / С.В. Пивнева, В.Г. Бабенко, Т.А. Стабецкая, К.В. Король // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. - 2014. - № 4 (30). - С. 18-21.
18. Бабенко В.Г. Параллельная реализация нелинейного расширенного матричного криптографического преобразования / С.В. Пивнева, О.Г. Мельник, Р.П. Мельник // Вектор науки Тольяттинского государственного университета. - 2014. - № 3. - С. 17-20.
19. Пивнева С.В. Метрическая оценка алгоритмов расчета расстояния строк ДНК / М.А. Трифонов // Южно-Сибирский научный вестник - 2014. № 2 (6) - С. 17-20.
20. Рудницкий В.Н. Распараллеливание процесса минимизации систем частично или полностью определенных булевых функций с большим числом переменных / С.В. Пивнева, С.В. Бурмистров // Вектор науки Тольяттинского государственного университета - 2014. № 1 (27) - С. 27-30.

References

1. Babenko VG (2014) Parallel`naya realizatsiya nelineynogo rasshirennogo matrichnogo kriptograficheskogo preobrazovaniya. Vektor nauki Tol`yattinskogo gosudarstvennogo universiteta 3: 17-20
2. Bekkert VI (1986) Ruchnye dvukhtochechnye kolchany s sootnosheniyami. Izvestiya vuzov. Matematika 12: 62-64
3. Danilov VI (1978) Geometriya toricheskikh mnogoobraziy. UMN T. 33. Vyp. 2(200): 85–134
4. Drozd YuA (1972) Predstavleniya kommutativnykh algebr. Funktsional`nyy analiz i ego prilozheniya 6(4): 41-43
5. Drozd YuA (1977) O ruchnykh i dikikh matrichnykh zadachakh. Matrichnye zadachi. Institut matematiki AN USSR, Kiev
6. Eliseev DY (2013) Tangent cones of schubert varieties for an of lower rank. Journal of Mathematical Sciences. Vol. 188. Issue 5: 596–600
7. Gel'fand IM, Ponomaryov VA (1969) Zamechaniya o klassifikatsii pary kommutiruyushchikh lineynykh preobrazovaniy v konechnomernom prostranstve. Funktsional`nyy analiz i ego prilozheniya. T. 3. Vyp. 4: 81-82
8. Gupta ChK (2013) O ruchnykh i dikikh avtomorfizmakh algebr. Fundamental`naya i prikladnaya matematika. Tsentr novykh informatsionnykh tekhnologiy MGU. T. 18. Vyp. 4: 79-88
9. Makedonsky EA (2013) O dikikh i ruchnykh konechnomernykh algebrakh Li. Funktsional`nyy analiz i ego prilozheniya. T. 47. Vyp. 4: 30-44
10. Panov AN (2009) On the index of certain nilpotent lie algebras. Journal of Mathematical Sciences. Vol. 161. Issue 1: 122–129
11. Panov AN (2010) Invarianty koprisoedinennykh predstavleniy regulyarnykh faktorov. Algebra i analiz. T. 22. Vyp. 3: 222-247

12. Panov AN (2011a) Invariants of coadjoint representations of regular factors. St. Petersburg Mathematical Journal. Vol. 22. Issue 3: 497–514
13. Panov AN (2011b) Predstavleniya unitreugol`noy gruppy. Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: Estestvennye i tekhnicheskie nauki. T. 16. Vyp. 6-2: 1722-1725
14. Panov AN (2012) Predstavleniya razreshimykh algebr li s fil`tratsiyami. Matematicheskiy sbornik. T. 203. Vyp. 1: 77-90
15. Piryatinskaya AYu (1995) Ruchnye i dikie zadachi teorii predstavleniy * - algebr: Dis...kand. fiz.- mat. nauk: 01.01.06. Kievskiy un-t im. T.G.Shevchenko, Kiev
16. Pivneva SV (2014) Metricheskaya otsenka algoritmov rascheta rasstoyaniya strok DNK. YUzhno-Sibirskiy nauchnyy vestnik 2(6): 17-20
17. Rudnitsky VN (2014a) Rasparallelivanie protsessa minimizatsii sistem chastichno ili polnost`yu opredelennykh bulevykh funktsiy s bol`shim chislom peremennykh. Vektor nauki Tol`yattinskogo gosudarstvennogo universiteta 1(27): 27-30
18. Rudnitsky VN (2014b) Sintez modeli obratnoy nelineynoy operatsii rasshirennogo matrichnogo kriptograficheskogo preobrazovaniya. Vektor nauki Tol`yattinskogo gosudarstvennogo universiteta 4(30): 18-21
19. Vershik AM, Kerov SV (1981) Asimptoticheskaya teoriya kharakterov simmetricheskoy gruppy. Funktsional`nyy analiz i ego prilozheniya. T. 15. Vyp. 4: 15-27
20. Vyatkina KA (2013) The field of u-invariants of the adjoint representation of the group GL (N, K). Mathematical Notes. Vol. 93. Issue 1-2: 187–190

Поступила 14.10.2016

Об авторах:

Пивнева Светлана Валентиновна, доцент кафедры высшей математики и математического моделирования Тольяттинского государственного университета, кандидат педагогических наук, tlt.swetlana@rambler.ru;

Мельников Борис Феликсович, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики Тольяттинского филиала Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева, bf-melnikov@yandex.ru;

Купцов Никита Андреевич, студент института ракетно-космической техники Самарского национального исследовательского университета имени академика С.П. Королева.