

УДК 510.52:372.851

DOI: 10.25559/SITITO.16.202004.961-969

Оригинальная статья

## Вопросы построения автоматизированной обучающей системы «Множества»

В. С. Рублев\*, М. Д. Кондаков, Д. Р. Вахмянин

ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова», г. Ярославль, Российская Федерация

150003, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14

\*roublev@mail.ru

### Аннотация

Целью построения автоматизированной обучающей системы «Множества» является помощь учащемуся в освоении одной из важных тем дисциплины «Дискретная математика», которая развивает логико-математическое мышление в этом направлении. Соответствующая тема включает материал, связанный с понятием множества, операциями над множествами, алгеброй множеств, доказательствами утверждений для множеств, выводом формул для количества элементов множества. В основе системы лежит построение с целью использования для обучения редактора доказательства утверждений для множества и редактора вывода формул для количества элементов множества. Первый из них позволяет студенту разбить исходное утверждение на ряд более простых утверждений, в совокупности эквивалентных исходному утверждению, выбрать метод доказательства каждого простого утверждения и провести их пошаговое доказательство. Второй редактор позволяет, используя формулу включения и исключения и формулу количества элементов дополнения, вывести пошагово формулу для количества элементов множества через заданные количества элементов, связанных с ним множеств. Важной частью системы является контроль правильности всех действий студента, и на этой основе разработана вся система обучения. Логический контроль правильности выбранного действия в первом редакторе осуществляется созданием системой булевой функции, соответствующей этому действию, и проверкой ее на тождественную истинность. Во втором редакторе для контроля используются такие инварианты, как *характеристическая строка множества* и *характеристическая строка количества элементов множества*. Остальная часть системы связана с обучением алгебре множеств и подготовке к использованию редакторов. При этом основное внимание уделяется стратегии обучения, при которой проверка понимания усвоенного материала является довольно строгой, исключающей случайный выбор ответов. Разбиение материала на секции с контролем успешности обучения не только тестами, но и упражнениями и задачами, позволяет студенту овладеть сложным логико-математическим аппаратом доказательства утверждений для множеств и вывода формулы для количества элементов множества.

**Ключевые слова:** компьютерное обучение, дискретные множества, алгебра множеств, утверждения для множеств, пошаговое доказательство, количество элементов множества, вывод формулы, контроль корректности.

**Финансирование:** Работа выполнена в рамках инициативной НИР ВИП-004 (номер государственной регистрации АААА-А16-116070610022-6).

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Рублев, В. С. Вопросы построения автоматизированной обучающей системы «Множества» / В. С. Рублев, М. Д. Кондаков, Д. Р. Вахмянин. – DOI 10.25559/SITITO.16.202004.961-969 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2020. – Т. 16, № 4. – С. 961-969.

© Рублев В. С., Кондаков М. Д., Вахмянин Д. Р., 2020



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Questions of Building an Automated Teaching System “Sets”

V. S. Rublev\*, M. D. Kondakov, D. R. Vakhmyanin

P.G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russian Federation

14 Sovetskaya Str., Yaroslavl 150003, Russian Federation

\* roublev@mail.ru

### Abstract

The purpose of building an automated teaching system “Sets” is to help the student in mastering one of the important topics of the discipline “Discrete Mathematics”, which develops logical and mathematical thinking in this direction. Relevant topic includes a material related to the concept of a set, operations on sets, algebra of sets, proofs of statements for sets, and the derivation of formulas for the number of set elements. The system is based on a construction of *the statements proof editor for a set* and *of the formulas derivation editor for the number of set elements*, both editors are to be used for teaching. The first of these allows students to split the original statement into a number of simpler statements, taken together equivalent to the original statement, to choose a method of proving each simple statement and to conduct their step-by-step proof. The second editor allows us (using the inclusion-exclusion principle and the formula of the number of complement elements) to derive a step-by-step formula for the number of set elements through the specified numbers of elements for sets from which the resulting set is constructed. An important part of the system is to monitor the correctness of all actions of students, and on this basis the entire learning system is developed. The logical supervision over the correctness of the selected action in the first editor is performed by a Boolean function created by the system and corresponding to this action, and by checking it for identical truth. In the second editor, invariants such as *characteristic strings of the set and of its number of elements* are used for verification. The rest of the system is related to learning of set algebra and to preparation to editors usage. The main focus here is on the learning strategy, in which testing the understanding of the learned material is rather rigorous and eliminating the random choice of answers. The division of the material into sections with verification of the success of teaching not only by tests, but also by exercises and tasks, allows students to master the complex logical and mathematical techniques of proving statements for sets and derivation of formulas for the number of set elements.

**Keywords:** computer learning, discrete sets, set algebra, statements for sets, step-by-step proof, number of set elements, formula derivation, correctness control.

**Funding:** This work was supported by initiative program VIP-004 (state registration number AAAA-A16-116070610022-6).

*The authors declare no conflict of interest.*

**For citation:** Rublev V.S., Kondakov M.D., Vakhmyanin D.R. Questions of Buildings an Automated Teaching System “Sets”. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2020; 16(4):961-969. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITI-T0.16.202004.961-969>



## Введение

Проблема обучения основной массы студентов математическим и компьютерным наукам вызвана низким качеством школьного образования, ориентированного не на развитие мышления, а на запоминание алгоритмов решения некоторых типовых задач. Эта проблема в области подготовки профессиональной деятельности студентов по разработке новых компьютерных технологий может быть решена только индивидуальным обучением. Но такой подход требует от преподавателя огромных дополнительных временных затрат. Выходом является разработка компьютерных автоматизированных обучающих систем (АОС), с помощью которых можно не только контролировать знания, но и вести обучение базовому уровню [1]. Большинство программных систем, называемых обучающими (например, Moodle, Claroline<sup>1</sup>, Dokeos, ATutor [2-14]), не поддерживают полный цикл обучения (методики) – это всего лишь приложения, которые предоставляют доступ к текстам, выдают тесты и проверяют память студента<sup>2</sup>. Лучшим решением является использование в процессе обучения различных методик адаптивного обучения, которые ориентированы на конкретный предмет обучения и на индивидуальные особенности студента<sup>3</sup>. Их особенностями являются:

- интеллектуальный анализ решений задач;
- интерактивная поддержка в решении задач;
- поддержка в решении задач на примерах;
- адаптивная поддержка в навигации;
- адаптивное представление;
- адаптивная поддержка сотрудничества пользователей системы (обучающихся).

Это обеспечивает систему гибкостью в отношении к пользователю и в отношении к представлению материала для изучения. В дополнение к этому *теоретической и методологической базой* становится утверждение о том, что обучение может быть сведено к совокупности следующих составляющих:

- информации, необходимой для изучения;
- контрольным мероприятиям, позволяющим проверять знания по данным материалам;
- способу оценки уровня полученных знаний;
- последующему управлению – важному и самому сложному механизму, делающему систему именно обучающей.

При разработке такой системы необходимо решить ряд задач: как провести разбиение материала, как вести контроль и насколько гибкой будет система по отношению к пользователю. Контроль тестированием памяти студента является недостаточным для АОС разделов точных наук, которые должны обучать анализу данных, их формализации, анализу, рассуждениям и преобразованиям. Использование компьютерной алгебры<sup>4</sup> [15-18] лежит в основе построения таких систем. Например, один из авторов данной работы использовал это

для построения АОС вычислительной сложности алгоритмов [19-23].

В данной работе рассматриваются модели компьютерного обучения доказательству утверждений для множеств и выводу формул количества элементов множества через заданные количества элементов других множеств. Эти модели можно разделить на 2 группы: модели проведения доказательства утверждения или вывода формул количества элементов множества и модели обучения, подготавливающие студента к использованию моделей первой группы. Модели первой группы, воплощенные в редакторе доказательства утверждений для множеств, описаны в [1]. Поэтому перейдем к описанию построения редактора вывода формул для количества элементов множества.

## Редактор вывода формул для количества элементов множества

Работу студента с этим редактором можно разбить на следующие этапы:

1. Вывод формулы для *искомого* множества, заданного задачами, через исходные множества задачи;
2. Преобразование формулы искомого множества;
3. Вывод формулы для количества элементов искомого множества через заданные количества элементов других множеств задачи с использованием формулы включений и исключений или с использованием формул для дополнений множеств задачи.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

*85% горожан ежегодно посещают зрелищные мероприятия: театры, музеи, кинотеатры. Причем 43% посещают театры, 25% посещают музеи, 7% посещают кинотеатры и музеи, 15% посещают театры и кинотеатры, а 5% посещают все 3 зрелища, но 45% не посещает ни театров, ни музеев. Каков процент горожан, кроме посещающих только 1 вид зрелищ?*

Прежде всего, студент должен ввести обозначения исходных множеств и написать формулу для искомого множества. Введем обозначения  $T$ ,  $M$ ,  $K$  соответственно для множеств горожан, которые посещают театры, музеи, кинотеатры.

Студент может написать формулу для искомого множества, основываясь на дополнении множества тех, кто посещает только одно зрелище:

$$X \equiv \overline{T \setminus (M \cup K) \cup M \setminus (T \cup K) \cup (K \setminus (T \cup M))}, \quad (1)$$

но может написать и другую формулу, основываясь на объединении тех, кто ничего не посещает, и тех, кто посещает не менее 2 видов зрелищ:

$$X \equiv \overline{T \cup M \cup K \cup T \cap M \cup T \cap K \cup M \cap K}. \quad (2)$$

Система должна проверить правильность соответствия введенной формулы условиям задачи. Для этого разобьем универсальное множество  $U$  на 8 попарно непересекающихся подмножеств в следующем порядке:

<sup>1</sup> Consortium page on Claroline.net [Электронный ресурс]. URL: <https://claroline.net> (дата обращения: 24.08.2020).

<sup>2</sup> Clark S., Baggaley J. Technical Evaluation Report. 37. Assistive Software for Disabled Learners // International Review of Research in Open and Distributed Learning. 2004. Vol. 5, No. 3. DOI: 10.19173/irrodl.v5i3.198

<sup>3</sup> Allen I. E., Seaman J. Changing Course: Ten Years of Tracking Online Education in the United States. Babson Survey Research Group and Quahog Research Group, LLC, 2013. P. 4.

<sup>4</sup> Таранчук В. Б. Основные функции систем компьютерной алгебры. Минск: БГУ, 2013.



$$\begin{pmatrix} \bar{T} \cup \bar{M} \cup \bar{K}, \bar{T} \cup \bar{M} \cup K, \bar{T} \cup M \cup \bar{K}, \bar{T} \cup M \cup K, \\ T \cup \bar{M} \cup \bar{K}, T \cup \bar{M} \cup K, T \cup M \cup \bar{K}, T \cup M \cup K \end{pmatrix}.$$

Поставим каждому множеству из  $U$  в соответствие *характеристическую строку* (ХС) из  $\{0,1\}$ , в котором единицами определены все его части. Так, например, для вышеописанного искомого множества задачи  $ХС=(10010111)$ . Для множеств  $T, M, K$  их ХС соответственно равны  $(00001111)$ ,  $(00110011)$ ,  $(01010101)$ . Для искомого множества  $X$  его ХС получается применением к ХС исходных множеств операций поразрядной конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, соответствующих операциям пересечения, объединения и дополнения, входящих в формулу множества. Обоснование этого следует, например, из<sup>5</sup> [1]. Поэтому правильность любого преобразования множества контролируется системой сравнением с ХС этого множества.

При выводе формулы для количества элементов используются формулы включений и исключений, а также формула для количества элементов дополнения множества. Правильность их использования нужно также контролировать. Для этого вводится *характеристическая строка количества* (ХСК) элементов множества, которая подобна ХС. Ее элементы равны множителю, с которым количество элементов соответствующей части множества входит в сумму количества элементов множества. При сложении (или вычитании) таких строк происходит поразрядное сложение (вычитание) их элементов. Заметим, что если для количества элементов множества в ХСК все элементы из  $\{0,1\}$ , то ХСК совпадает с ХС этого множества. Поясним это на рассматриваемом примере. Сначала введем количества исходно заданных множеств:

$$|T \cup M \cup K| = 85, |T| = 43, |M| = 25, |T \cap K| = 15, |M \cap K| = 7, |\bar{T} \cap \bar{M}| = 45$$

Возьмем более простую формулу (2) для определения количества элементов множества  $X$ . Она является объединением 2 непересекающихся множеств: дополнения к объединению основных множеств  $X_1, X_2, X_3$  и объединения попарных пересечений этих множеств. Поэтому, используя формулу включений и исключений, получим

$$|X| = |T \cup M \cup K| + |T \cap M \cup T \cap K \cup M \cap K|. \quad (3)$$

Первое слагаемое в (3), используя количество элементов дополнения, заменим разностью множеств

$$|T \cup M \cup K| = |U| - |\bar{T} \cup \bar{M} \cup \bar{K}|, \quad (4)$$

а второе раскроем по формуле включений и исключений

$$|T \cap M \cup T \cap K \cup M \cap K| = \quad (5)$$

$$= |T \cap M| + |T \cap K| + |M \cap K| - 2|T \cap M \cap K|.$$

Проверка ХСК для (5) также дает верное равенство

$$(00010111) = (00000011) + (00000101) + (00010001) - 2(00000001).$$

Используя равенства (4) и (5), произведем замену в (3)

$$|X| = |U| - |\bar{T} \cup \bar{M} \cup \bar{K}| + |T \cap M| + \quad (6)$$

$$+ |T \cap K| + |M \cap K| - 2|T \cap M \cap K|.$$

В полученной формуле (6) известны все слагаемые кроме  $|T \cap M|$ . Выразим для него формулу через дополнение

$$|T \cap M| = |U| - |\overline{T \cap M}| = |U| - |\bar{T} \cup \bar{M}|. \quad (7)$$

Преобразуем вычитаемое в (7) при помощи формулы включений и исключений и далее, используя формулу для дополнений, получим

$$|\bar{T} \cup \bar{M}| = |\bar{T}| + |\bar{M}| - |\bar{T} \cap \bar{M}| = 2|U| - |T| - |M| - |\bar{T} \cap \bar{M}|. \quad (8)$$

Подставим результат в формулу (7)

$$|T \cap M| = -|U| + |T| + |M| + |\bar{T} \cap \bar{M}|, \text{ а затем после подстановки в (6) получим окончательную формулу (9)}$$

$$|X| = |T| + |M| + |\bar{T} \cap \bar{M}| + |T \cap K| + \quad (9)$$

$$|M \cap K| - 2|T \cap M \cap K| - |T \cup M \cup K|.$$

Ее проверка при помощи выполнения действий над ХСК слагаемых

$$(00001111) + (00110011) + (11000000) + (00000101) + (00010001) - (00000002) - (01111111) = (11121224) - (01111113) = (10010111)$$

показывает совпадение с ХСК искомого множества. Подставляя в формулу (9) значения слагаемых

$$|X| = 43 + 25 + 45 + 15 + 7 - 2 \cdot 5 - 85 = 40, \quad (10)$$

получаем ответ на вопрос задачи: *40% горожан, кроме посещающих только 1 вид зрелищ.*

## Контроль редактором корректности вывода формулы

Приведенный выше пример решения задачи с контролем показывает, как редактор может контролировать логику вывода формулы. Но такой контроль не является еще полным, так как, во-первых, не определен контроль синтаксической правильности вводимых выражений, а, во-вторых, не определены точные шаги вывода формулы. Для ввода выражений надо использовать контроль синтаксиса с помощью автоматной грамматики, описанной в [1]. Для пошагового вывода надо ввести систему элементарных преобразований формул для множества и для количества его элементов. При этом элементарное преобразование выполняется для выделенного фрагмента преобразуемой формулы.

Для формул множеств в систему включим следующие элементарные преобразования:

1. Снятие двойного дополнения;
2. Перестановка множеств в пересечении;
3. Перестановка множеств в объединении;
4. Поглощение для пересечения – повторы множеств в пересечении или пересечение с универсальным множеством убираются;
5. Поглощение для объединения – повторы множеств в объединении или объединение с пустым множеством убираются;
6. Раскрытие скобок – использование закона дистрибутивности для пересечения с объединением множеств;
7. Вынесение за скобки – использование закона дистрибутивности для объединения пересечений;
8. Преобразование разности – замена вычитания на пересечение с дополнением;
9. Снятие знака дополнения — использование закона двойственности;

<sup>5</sup> Рублев В. С. Множества (индивидуальная работа №1 по дисциплине «Дискретная математика»). Ярославль: ЯрГУ, 2018. 53 с.; Рублев В. С. Булевы функции (индивидуальные работы № 4 и 5 по дисциплине «Дискретная математика»). Ярославль: ЯрГУ, 2018. 56 с.



10. Включение знака дополнения — использование закона двойственности;
11. Введение обозначения части множества — введение новой формулы;
12. Подстановка формулы — замена обозначения множества на его формулу;
13. Замена объединения с дополнением на универсальное множество;
14. Замена универсального множества на объединение произвольного множества с его дополнением;
15. Замена пересечения с дополнением на пустое множество;
16. Замена пустого множества на пересечение произвольного множества с его дополнением.

Использование элементарных преобразований множества может приводить к длинному выводу. Поэтому наряду со списком элементарных преобразований введем список *группированных* преобразований:

1. Множественное применение операции – если имеется несколько выделенных в формуле фрагментов, то элементарная операция применяется к каждому фрагменту;
2. Множественное поглощение – в выделенном фрагменте пересечения или объединения множеств повторы множеств убираются, как и объединения с пустым множеством или пересечение с универсальным множеством.

При выводе формулы количества элементов множества будем использовать следующие преобразования:

1. Формула включений и исключений для объединения заданного числа множеств;
2. Замена количества разности множеств на разность их количеств – если вычитаемое множество включено в уменьшаемое;
3. Замена количества элементов множества на разность количеств универсального множества и дополнения множества;
4. Взаимное удаление – подобных членов с разными знаками;
5. Удаление членов с пустыми пересечениями;
6. Приведение подобных членов – проверяет подобие всех выделенных членов и правильность вычисления коэффициента.

## Модели обучения

### Стратегия обучения

Весь материал для обучения можно разделить на две большие категории. В первую категорию войдут секции, дающие основные теоретические знания и понятия по определению множества, операций со множествами и алгебре множеств. Основная цель этих секций – развитие и тренировка памяти студента с использованием навыков запоминания. Контроль этих секций, чаще всего, производится с помощью тестирования.

Однако, в программу курса также входит обучение неформальному использованию математического аппарата, и в этом месте возникают дополнительные трудности. К ним относятся технические трудности, связанные с вводом формул и их пре-

образованием, и трудности, связанные с недостаточным уровнем логического мышления студента. Он должен достигнуть цели, разбивая вывод или доказательство на части, выбирая методы для этих частей и конструируя последовательность выводов, ведущих к цели. Таким образом, определяется вторая категория секций, связанных с математической методикой проведения доказательства утверждения для множеств или вывода формулы количества элементов множества.

Выделяются следующие черты, отличающие вторую категорию секций от первой. Во-первых, контроль материала секций второй категории не может быть основан только на тестировании, потому что необходимо проверять умение студента использовать различные математические приёмы. Во-вторых, при изучении материала требуется научить студента связывать отдельные приёмы в целенаправленный процесс путём конструирования последовательности изученных приёмов. В-третьих, нужно проконтролировать умение связывать несколько процессов при решении итоговой задачи. Одним из инструментов, используемых в контроле материала секций второй категории, является алгоритм проверки синтаксической правильности ввода и алгоритм контроля правильности вывода.

Материал и контроль взаимодействуют с помощью третьего компонента системы, ответственного за определение объёма материала за один сеанс, и задают набор заданий и их количество, а также другие параметры системы. Именно этот компонент придаёт системе гибкость и отличает АОС от приложения, которое умеет только выдавать текст и набор тестов по нему [24], [25]. Далее следует описание предлагаемого сценария взаимодействия системы и пользователя.

При входе в систему пользователь видит список секций курса, которые делятся на доступные и недоступные в соответствии с планом прохождения курса. Секции должны быть пройдены одна за другой по порядку (принцип линейного обучения). При входе в секцию студенту предоставляется для изучения её материал. После изучения материала он переходит к контролю полученных знаний, для прохождения которого он должен выполнить определённое в секции начальное количество заданий (тестов, упражнений, задач). На каждый вопрос теста предлагается несколько вариантов ответов (обычно 6), случайно выбранных из заранее определённого для каждого задания множества ответов. Среди предлагаемых ответов может быть несколько правильных, или все правильные, или ни одного правильного. Студент должен отметить все правильные ответы. Но если, по его мнению, правильных ответов нет, то он должен выбрать именно такой ответ. Система считает задание выполненным, если студент отметил все правильные ответы и ни одного неправильного. В противном случае она выводит на экран один из текстов: «Не все правильные ответы отмечены», «Некоторые из отмеченных ответов не верны», или их комбинацию и предоставляет фрагмент текста материала секции, связанный с совершенной ошибкой. После изучения этого фрагмента или повторного изучения всего материала секции студент имеет возможность повторно ответить на вопрос задания. Если же он опять не выполнит задание, то оно будет заменено на два дополнительных задания. Таким образом, число заданий для прохождения секции может расти. Сеанс работы со студентом будет прекращён при достижении





некоторого предельного количества заданий секции, и он сможет вернуться к обучению только после определённого перерыва. Если студент достигает прерывания сеанса несколько раз подряд, то его учётная запись в системе временно блокируется, а сам он вызывается к преподавателю. В случае, когда сначала студент заработал много дополнительных заданий, а затем начал отвечать безошибочно, число контрольных заданий начинает снижаться по некоторой прогрессии. Такой подход заставляет студента внимательно и вдумчиво относиться к материалу секции. Таким образом, организуется не только контроль знаний секции, но и обучение. Только после выполнения всех заданий студент сможет перейти к изучению материала следующей секции.

Однако, существуют секции, материал которых опирается на предыдущие секции и не может быть освоен без безусловного владения материалом этих предыдущих секций. В таких секциях проводится дополнительный контроль знаний предыдущих секций. При этом количество начальных заданий для повторения секции снижается до одного.

Отметим еще, что для настройки АОС определяются настраиваемые параметры обучения. Например, начальное количество контрольных заданий в каждой секции или подсекции, количество добавляемых заданий при ошибочном ответе, количество сокращаемых заданий при каждых 2 последовательных правильных ответах и др.

#### Разбиение на секции

Весь материал разобьем на следующие секции и подсекции.

1. *Определение множества.* Тесты на определение верных или неверных ответов.
2. *Отношения множеств:*
  - 2.1. Отношение равенства. Тесты на определение верных или неверных ответов.
  - 2.2. Отношение включения. Тесты на определение верных или неверных ответов.
3. *Операции над множествами:*
  - 3.1. Объединение множеств. Тесты на определение верных или неверных ответов. Упражнения на доказательство и преобразование.
  - 3.2. Пересечение и дополнение множеств. Тесты на определение верных или неверных ответов. Упражнения на доказательство и преобразование.
4. *Алгебра множеств.* Тесты на определение верных или неверных ответов. Упражнения на задание формул множеств.
5. *Методика доказательства утверждений для множеств.*
  - 5.1. Посылки и заключение шага доказательства. Тесты на определение верных или неверных ответов. Упражнения на вывод заключения из заданных посылок. Упражнения на определение посылок для заданного заключения.
  - 5.2. Разбиение на случаи. Тесты на определение верных или неверных ответов относительно ветвей доказательства. Упражнения для разбиения на обычные и альтернативные случаи.
  - 5.3. Прямой метод доказательства. Тесты на определение верных или неверных ответов относительно завершения ветвей доказательства. Упражнения на определение начальной посылки и вывод из нее.
  - 5.4. Косвенный метод доказательства. Тесты на определение верных и неверных ответов относительно вет-

вей доказательства и их завершения. Упражнения на задание начальной посылки. Упражнения на двойное разбиение на случаи.

6. *Ошибки в доказательстве.* Тесты на определение верных и неверных ответов.

7. *Система преобразований формул для множества.*

7.1. Элементарные преобразования. Тесты на определение верных и неверных ответов.

7.1.1. Перестановки и поглощения. Упражнения на преобразование.

7.1.2. Преобразования со скобками. Упражнения на преобразование.

7.1.3. Преобразования с дополнением. Упражнения на преобразование.

7.1.4. Обозначения и подстановка формул. Упражнения на преобразование.

7.2. Множественные преобразования.

7.2.1. Множественное применение операции. Упражнения на преобразование.

7.2.2. Множественное поглощение. Упражнения на преобразование.

8. *Итоговая секция для доказательства утверждения.* Задача доказательства утверждения для множеств.

8.1. Числовые примеры с общими случаями выполнения всех условий утверждения и с невыполнением каждого из условий.

8.2. Диаграммы Венна с общими случаями выполнения всех условий утверждения и невыполнением каждого из условий.

9. *Формулы, связывающие количество элементов множеств.*

9.1. Формула включений и исключений. Тесты на определение верных и неверных ответов. Упражнения на вывод формулы при особенностях множеств.

9.2. Формула для количества элементов разности множеств и дополнении множества. Тесты на определение верных и неверных ответов.

10. *Система преобразований формул для количества элементов множества.* Тесты на определение верных или неверных ответов.

10.1. Формула включений и исключений для объединения заданного числа множеств. Упражнения на преобразование.

10.2. Замена количества разности множеств на разность их количеств. Упражнения на преобразование.

10.3. Замена количества элементов множества на разность количеств универсального множества и дополнения множества. Упражнения на преобразование.

10.4. Взаимное удаление подобных членов с разными знаками. Упражнения на преобразование.

10.5. Удаление членов с пустыми пересечениями. Упражнения на преобразование.

10.6. Приведение подобных членов. Упражнения на преобразование.

10.7. Обозначения и подстановка формул. Упражнения на преобразование.

11. *Итоговая секция для формул количества элементов множества.* Задача на вывод формулы для количества элементов множества.



## Заключение

Выражаем надежду, что описанный подход к построению автоматизированной обучающей системы доказательству утверждений для множеств будет реализован и покажет эффективность в обучении этому предмету и развитию логико-математического мышления студентов.

## Список использованных источников

- [1] Рублев, В. С. Автоматизированная обучающая система «Доказательство утверждений для множеств» / В. С. Рублев, Д. Р. Вахмянин. – DOI 10.25559/SITITO.15.201904.866-875 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2019. – Т. 15, № 4. – С. 866-875. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=43575604> (дата обращения: 24.08.2020). – Рез. англ.
- [2] Büchner, A. Moodle 3 Administration / A. Büchner. – Third Edition. – Packt Publishing, 2016. – 492 p.
- [3] Udaya Sri, K. E-Learning: Technological Development in Teaching for school kids / K. Udaya Sri, T. V. Vamsi Krishna // International Journal of Computer Science and Information Technologies. – 2014. – Vol. 5, issue 5. – Pp. 6124-6126. – URL: <http://www.ijcsit.com/docs/Volume%205/vol5issue05/ijcsit2014050527.pdf> (дата обращения: 24.08.2020).
- [4] Kerres, M. Mediendidaktik / M. Kerres, A. Preußler. – DOI 10.3262/EE018120258 // Enzyklopädie Erziehungswissenschaft Online. Fachgebiet Medienpädagogik; ed. by D. Meister, F. Gross, U. Sander. – Weinheim/Basel: Beltz Juventa, 2012.
- [5] Awang, N. B. Evaluation of an Open Source Learning Management System: Claroline / N. B. Awang, M. Y. B. Darus. – DOI 10.1016/j.sbspro.2012.11.346 // Procedia - Social and Behavioral Sciences. – 2012. – Vol. 67. – Pp. 416-426. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042812053323> (дата обращения: 24.08.2020).
- [6] Cavus, N. A Comparison of Open Source Learning Management Systems / N. Cavus, T. Zabadi. – DOI 10.1016/j.sbspro.2014.07.430 // Procedia - Social and Behavioral Sciences. – 2014. – Vol. 143. – Pp. 521-526. – URL: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877042814043584> (дата обращения: 24.08.2020).
- [7] Liu, J. Comparative Study of Open-Source E-Learning Management Platform / J. Liu, H. Men, J. Han. – DOI 10.1109/CISE.2009.5365185 // 2009 International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering. – Wuhan, China, 2009. – Pp. 1-4.
- [8] Nagy, A. The Impact of E-Learning / A. Nagy. – DOI 10.1007/3-540-26387-X\_4 // E-Content; ed. by P. A. Bruck, Z. Karssen, A. Buchholz, A. Zerfass. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2005. – Pp. 79-96.
- [9] Rodríguez, F. M. Teacher training for the creation of accessible courses at ATutor / F. M. Rodríguez. – DOI 10.1109/LACLO.2017.8120931 // 2017 Twelfth Latin American Conference on Learning Technologies (LACLO). – La Plata, Argentina, 2017. – Pp. 1-8.
- [10] Cano, L. D. A Novel Keyword Ontology Generator Method Tested on “Digital Transformation in Higher Education” Topic / L. D. Cano, D. Burgos [et al.]. – DOI 10.1007/978-3-030-31284-8\_14 // Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online. HELMeTO 2019. Communications in Computer and Information Science; ed. by D. Burgos et al. – Springer, Cham. – 2019. – Vol. 1091. – Pp. 179-191. – URL: [https://rd.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-31284-8\\_14](https://rd.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-31284-8_14) (дата обращения: 24.08.2020).
- [11] Machine Learning and Knowledge Extraction. Third IFIP TC 5, TC 12, WG 8.4, WG 8.9, WG 12.9 International Cross-Domain Conference, CD-MAKE 2019. Canterbury, UK, August 26-29, 2019, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science / ed. by A. Holzinger, P. Kieseberg, A. M. Tjoa, E. Weippl. – DOI 10.1007/978-3-030-29726-8. – Springer, Cham. – 2019. – Vol. 11713. – URL: <https://rd.springer.com/book/10.1007/978-3-030-29726-8> (дата обращения: 24.08.2020).
- [12] Handbook of Mobile Teaching and Learning / ed. Y. Zhang, D. Cristol. – DOI 10.1007/978-981-13-2766-7. – Springer, Singapore, 2019. – URL: <https://rd.springer.com/referencework/10.1007%2F978-981-13-2766-7> (дата обращения: 24.08.2020).
- [13] Computational Thinking Education / ed. by S. Kong, H. Abelson. – DOI 10.1007/978-981-13-6528-7. – Springer, Singapore, 2019. – URL: <https://rd.springer.com/book/10.1007%2F978-981-13-6528-7> (дата обращения: 24.08.2020).
- [14] Proof Technology in Mathematics Research and Teaching / ed. by G. Hanna, D. A. Reid, M. de Villiers. – DOI 10.1007/978-3-030-28483-1. – Springer, Cham, 2019. – URL: <https://rd.springer.com/book/10.1007%2F978-3-030-28483-1> (дата обращения: 24.08.2020).
- [15] Computer Algebra in Scientific Computing. 21st International Workshop, CASC 2019, Moscow, Russia, August 26-30, 2019, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science / ed. by M. England, W. Koepf, T. M. Sadykov, W. M. Seiler, E. V. Vorozhtsov. – DOI 10.1007/978-3-030-26831-2. – Springer, Cham. – 2019. – Vol. 11661. – URL: <https://rd.springer.com/book/10.1007/978-3-030-26831-2> (дата обращения: 24.08.2020).
- [16] Davenport, J. H. Computer algebra: systems and algorithms for algebraic computation / J. H. Davenport, Y. Siret, E. Tournier. – Academic Press Ltd., GBR, 1988.
- [17] Gathen, J. Modern Computer Algebra / J. Gathen, J. Gerhard. – DOI 10.1017/CBO9781139856065. – Third Edition. – Cambridge University Press, 2013.
- [18] Fuchs, K. J. Computer algebra systems in mathematics education / K. J. Fuchs. – DOI 10.1007/BF02652762 // Zentralblatt für Didaktik der Mathematik. – 2003. – Vol. 35, issue 1. – Pp. 20-23.
- [19] Ермилова, А. В. Проблемы развития математического мышления учащихся на примере обучающей системы по курсу «Алгоритмы и анализ сложности» / А. В. Ермилова, В. С. Рублев // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2014. – № 10. – С. 297-304. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23020647> (дата обращения: 24.08.2020).



- [20] Рублев, В. С. Автоматизированная система для обучения анализу вычислительной сложности алгоритмов / В. С. Рублев, М. Т. Юсуфов // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. – 2016. – Т. 12, № 1. – С. 135-145. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27539228> (дата обращения: 24.08.2020). – Рез. англ.
- [21] Рублев, В. С. Автоматизированная обучающая система «Анализ вычислительной сложности алгоритмов» (исследование организации 1-ой части проекта) / В. С. Рублев, М. Т. Юсуфов. – DOI 10.25559/SITITO.2017.2.237 // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. – 2017. – Т. 13, № 2. – С. 170-178. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30258672> (дата обращения: 24.08.2020). – Рез. англ.
- [22] Рублев, В. С. Автоматизированная обучающая система для обучения курсу анализа сложности алгоритмов / В. С. Рублев, М. Т. Юсуфов. – DOI 10.18255/1818-1015-2017-4-481-495 // *Моделирование и анализ информационных систем*. – 2017. – Т. 24, № 4. – С. 481-495. – URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29864499> (дата обращения: 24.08.2020).
- [23] Рублев, В. С. Модели обучения анализу сложности алгоритма / В. С. Рублев, М. Т. Юсуфов // *Компьютерная алгебра и информационные технологии: труды III Международной конференции*. – Одесса: ОНУ, 2018. – С. 157-160. – URL: <http://confit.onu.edu.ua/content/CAIT-Odesa-2018.pdf> (дата обращения: 24.08.2020).
- [24] Dadeau, F. Testing adaptation policies for software components / F. Dadeau, J. P. Gros, O. Kouchnarenko. – DOI 10.1007/s11219-019-09487-w // *Software Quality Journal*. – 2020. – Vol. 28, issue 3. – Pp. 1347-1378.
- [25] Coulson, J. E. Automated teaching and individual differences / J. E. Coulson, H. F. Silberman. – DOI 10.1007/BF02767490 // *Audio-visual communication review*. – 1961. – Vol. 9, issue 1. – Pp. 5-15.

Поступила 24.08.2020; одобрена после рецензирования 15.10.2020; принята к публикации 23.11.2020.

#### Об авторах:

**Рублев Вадим Сергеевич**, профессор кафедры теоретической информатики, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова» (150003, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0252-9958>, [roublev@mail.ru](mailto:roublev@mail.ru)

**Кондаков Максим Дмитриевич**, студент кафедры теоретической информатики, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова» (150003, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7238-3675>, [kondakovmd99@mail.ru](mailto:kondakovmd99@mail.ru)

**Вахмянин Даниил Растиславович**, студент кафедры теоретической информатики, ФГБОУ ВО «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова» (150003, Российская Федерация, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8836-0865>, [vakhmyanin282@mail.ru](mailto:vakhmyanin282@mail.ru)

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

## References

- [1] Rublev V.S., Vahmyanin D.R. Automated Training System "Proof of Statements for the Set". *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2019; 15(4):866-875. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.15.201904.866-875>
- [2] Büchner A. Moodle 3 Administration. Third Edition. Packt Publishing; 2016. (In Eng.)
- [3] Udaya Sri K., Vamsi Krishna T. V. E-Learning: Technological Development in Teaching for school kids. *International Journal of Computer Science and Information Technologies*. 2014; 5(5):6124-6126. Available at: <http://www.ijcsit.com/docs/Volume%205/vol5issue05/ijcsit2014050527.pdf> (accessed 24.08.2020). (In Eng.)
- [4] Kerres M., Preußler A. Mediendidaktik. In: Meister D., Gross F., Sander U. (ed.). *Enzyklopädie Erziehungswissenschaft Online*. Fachgebiet Medienpädagogik. Weinheim/Basel: Beltz Juventa; 2012. (In German). DOI: <https://doi.org/10.3262/EE018120258>
- [5] Awang N.B., Darus M.Y.B. Evaluation of an Open Source Learning Management System: Claroline. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 2012; 67:416-426. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.11.346>
- [6] Cavus N., Zabadi T. A Comparison of Open Source Learning Management Systems. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. 2014; 143:521-526. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2014.07.430>
- [7] Liu J., Men H., Han J. Comparative Study of Open-Source E-Learning Management Platform. In: 2009 International Conference on Computational Intelligence and Software Engineering. Wuhan, China; 2009. p. 1-4. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/CISE.2009.5365185>
- [8] Nagy A. The Impact of E-Learning. In: Bruck P.A., Karssen Z., Buchholz A., Zerfass A. (ed.) *E-Content*. Springer, Berlin, Heidelberg; 2005. p. 79-96. (In Eng.) DOI: [https://doi.org/10.1007/3-540-26387-X\\_4](https://doi.org/10.1007/3-540-26387-X_4)
- [9] Rodríguez F.M. Teacher training for the creation of accessible courses at ATutor. In: 2017 Twelfth Latin American Conference on Learning Technologies (LACLO). La Plata, Argentina; 2017. p. 1-8. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/LACLO.2017.8120931>
- [10] Cano L.D., Burgos D., Fernández C., Branch J.W., Arango M.D. A Novel Keyword Ontology Generator Method Tested on "Digital Transformation in Higher Education" Topic. In: Burgos D. et al. (ed.) *Higher Education Learning Methodologies and Technologies Online*. HELMeTO 2019. *Communications in Computer and Information Science*. 2019; 1091:179-191. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-31284-8\\_14](https://doi.org/10.1007/978-3-030-31284-8_14)
- [11] Holzinger A., Kieseberg P., Tjoa A.M., Weippl E. Machine Learning and Knowledge Extraction. Third IFIP TC 5, TC 12, WG 8.4, WG 8.9, WG 12.9 International Cross-Domain Conference, CD-MAKE 2019. Canterbury, UK, August 26-29, 2019, Proceedings. *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 11713. Springer, Cham; 2019. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-29726-8>





- [12] Zhang Y., Cristol D. Handbook of Mobile Teaching and Learning. Springer, Singapore; 2019. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-13-2766-7>
- [13] Kong S., Abelson H. Computational Thinking Education. Springer, Singapore; 2019. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-981-13-6528-7>
- [14] Hanna G., Reid D.A., de Villiers M. Proof Technology in Mathematics Research and Teaching. Springer, Cham; 2019. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-28483-1>
- [15] England M., Koepf W., Sadykov T.M., Seiler W.M., Vorozhtsov E.V. Computer Algebra in Scientific Computing. 21st International Workshop, CASC 2019, Moscow, Russia, August 26-30, 2019, Proceedings. Lecture Notes in Computer Science, vol. 11661. Springer, Cham; 2019. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-26831-2>
- [16] Davenport J.H., Siret Y., Tournier E. Computer algebra: systems and algorithms for algebraic computation. Academic Press Ltd., GBR; 1988. (In Eng.)
- [17] Gathen J., Gerhard J. Modern Computer Algebra. Third Edition. Cambridge University Press; 2013. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9781139856065>
- [18] Fuchs K.J. Computer algebra systems in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 2003; 35(1):20-23. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02652762>
- [19] Ermilova A.V., Rublev V.S. *Problemy razvitiya matematicheskogo myshleniya uchashchikhsya na primere obuchayushchey sistemy po kursu "Algoritmy i analiz slozhnosti"* [Problems of developing students' mathematical thinking on the example of a training system for the course "Algorithms and complexity analysis"]. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2014; (10):297-304. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23020647> (accessed 24.08.2020). (In Russ.)
- [20] Rublev V.S., Yusufov M.T. Automated System for Teaching Computational Complexity of Algorithms Course. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2016; 12(1):135-145. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27539228> (accessed 24.08.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [21] Rublev V.S., Yusufov M.T. Development of the First Part of the Automated System for Teaching Computational Complexity of Algorithms Course. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2017; 13(2):170-178. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.2017.2.237>
- [22] Rublev V.S., Yusufov M.T. Automated System for Teaching Computational Complexity of Algorithms Course. *Modeling and Analysis of Information Systems*. 2017; 24(4):481-495. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.18255/1818-1015-2017-4-481-495>
- [23] Rublev V.S., Yusufov M.T. Algorithm complexity analysis teaching models. In: *Proceedings of the 3rd International Conference on Computer Algebra and Information Technologies*. ONU, Odessa, Ukraine; 2018. p. 157-160. Available at: <http://confit.onu.edu.ua/content/CAIT-Odessa-2018.pdf> (accessed 24.08.2020). (In Russ., abstract in Eng.)
- [24] Dadeau F., Gros J.P., Kouchnarenko O. Testing adaptation policies for software components. *Software Quality Journal*. 2020; 28(3):1347-1378. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s11219-019-09487-w>
- [25] Coulson J.E., Silberman H.F. Automated teaching and individual differences. *Audiovisual communication review*. 1961; 9(1):5-15. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02767490>

Submitted 14.09.2020; approved after reviewing 25.10.2020;  
accepted for publication 17.11.2020.

#### About the authors:

**Vadim S. Rublev**, Professor of the Department of Theoretical Informatics, P.G. Demidov Yaroslavl State University (14 Sovetskaya Str., Yaroslavl 150003, Russian Federation), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0252-9958>, [roublev@mail.ru](mailto:roublev@mail.ru)

**Maxim D. Kondakov**, student of the Department of Theoretical Informatics, P.G. Demidov Yaroslavl State University (14 Sovetskaya Str., Yaroslavl 150003, Russian Federation), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7238-3675>, [kondakovmd99@mail.ru](mailto:kondakovmd99@mail.ru)

**Daniel R. Vakhmyanin**, student of the Department of Theoretical Informatics, P.G. Demidov Yaroslavl State University (14 Sovetskaya Str., Yaroslavl 150003, Russian Federation), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8836-0865>, [vakhmyanin282@mail.ru](mailto:vakhmyanin282@mail.ru)

All authors have read and approved the final manuscript.

