УДК 517.925.7, 519.622
DOI: 10.25559/SITITO.17.202102.241-249

Оригинальная статья

Устойчивость системы Лоренца

В. В. Тихомиров, Р. Р. Исаев, А. В. Мальцева, В. В. Нефедов*
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва, Российская Федерация
119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
* vv_nefedov@mail.ru

Аннотация

В работе предложен вариационный метод получения необходимых (и достаточных) условий устойчивости возмущенных решений системы уравнений Лоренца. Этот метод позволяет установить необходимые условия устойчивости по Ляпунову. Он является эффективным даже в случаях, когда применение классического метода Ляпунова вызывает трудности, связанные с построением функции Ляпунова или с неточностями линеаризации по Тейлору, что характерно для динамических систем большой размерности.

В ряде случаев этот метод можно применить для нахождения областей фазовых переменных, в которых необходимые условия устойчивости совпадают с достаточными условиями устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову.

В этих случаях сама метрическая функция, как это показано в настоящей работе, может играть роль функции Ляпунова для получения достаточных условий устойчивости.

Ключевые слова: система Лоренца, нелинейная динамическая система, необходимые условия устойчивости, частные производные первого и второго порядков, аттрактор, бифуркация Андронова-Хопфа

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Устойчивость системы Лоренца / В. В. Тихомиров, Р. Р. Исаев, А. В. Мальцева, В. В. Нефедов. – DOI 10.25559/SITITO.17.202102.241-249 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2021. – Т. 17, № 2. — С. 241-249.

Original article

Stability of the Lorentz System

V. V. Tikhomirov, R. R. Isaev, A. V. Maltseva, V. V. Nefedov*
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation
* vv_nefedov@mail.ru

Abstract

In this paper, a variational method is proposed for obtaining the necessary (and sufficient) stability conditions for perturbed solutions of the system of Lorentz equations. This method allows us to establish the necessary conditions for Lyapunov stability. It is effective even in cases when the application of the classical Lyapunov method causes difficulties associated with the construction of the Lyapunov function or with inaccuracies of Taylor linearization, which is typical for dynamical systems of large dimension.

In some cases, this method can be used to find regions of phase variables in which the necessary stability conditions coincide with sufficient stability conditions (asymptotic stability) according to Lyapunov. In these cases, the metric function itself, as shown in this paper, can play the role of the Lyapunov function to obtain sufficient stability conditions.

Keywords: the Lorentz system, nonlinear dynamic system, necessary conditions for stability, partial derivatives of the first and second orders, the attractor, Andronov-Hopf bifurcation

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Tikhomirov V.V., Isaev R.R., Maltseva A.V., Nefedov V.V. Stability of the Lorentz System. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education.* 2021; 17(2):241-249. DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.241-249

Введение

Основы общей теории устойчивости динамических систем получены А.М. Ляпуновым в 1892 г. и позднее дополнены Н.Г. Четаевым, Н.Н. Красовским и другими авторами, которые для исследования разрабатывали различные критерии устойчивости. Однако, систематизированная общая постановка задач устойчивости движения предложена и глубоко проработана А.М. Ляпуновым. Метод функций Ляпунова позволяет точно оценивать устойчивость линейных динамических систем, но в случае нелинейных систем большой размерности он дает не всегда корректные результаты.

Первый недостаток этого метода обусловлен тем, что не всегда возможно построить знакоопределенную функцию Ляпунова $V(x)$ такую, что полная производная от нее по времени (в силу системы) должна быть знакоопределенной функцией противоположного знака относительно функции V.

Второй недостаток заключается в том, что функция Ляпунова $V(x)$ — только квадратичная форма, составленная из малых второго порядка при разложении правых частей дифференциальных уравнений в ряды Тейлора. Следует отметить, что квадратичная форма в существенно нелинейных задачах большой размерности ($n \geq 5$) с медленно сходящимися рядами Тейлора не дает возможности правильно интерпретировать результаты, ибо сумма всех членов разложения в ряд Тейлора третьего порядка (при больших n) может существенно превосходить любой член второго порядка, из которых строится функция Ляпунова.

Таким образом, в указанных случаях функция Ляпунова не учитывает полной информации о динамики системы. Это является причиной ошибок в оценке устойчивости по методу Ляпунова и существенного несовпадения областей устойчивости, получаемых на основе разных функций Ляпунова.

Цель данной работы:

рассмотреть в случае системы Лоренца вариационный метод исследования устойчивости, который имеет следующие положительные характеристики: не требуется предварительного разложения правых частей дифференциальных уравнений в ряды Тейлора; не требуется сложного и не всегда эффективного поиска функции Ляпунова; задача сводится к простой задаче поиска максимума функции конечного числа переменных. Такая методика позволяет определять необходимые условия устойчивости, в отличие от методики Ляпунова, основанной на достаточных условиях. Вариационный метод получения необходимых условий устойчивости основан на определении максимума скорости изменения евклидовой метрики $S(x)$ в пространстве X.

Описание вариационного метода

для получения необходимых условий устойчивости системы уравнений Лоренца.

Моделируя движение вязкой жидкости в конвекции Рэлея-Бернара, Лоренц предложил систему уравнений, которую записывают обычно в следующем виде:

$$\dot{x} = \sigma \cdot (y - x),$$

$$\dot{y} = x \cdot (r - z) - y, \quad (1)$$

$$\dot{z} = x \cdot y - b \cdot z,$$

где σ, r и b — числовые параметры системы.

Переменные, входящие в систему (1), являются безразмерными и имеют следующий физический смысл: x — характеризует скорость вращения конфекционных валов; y — определяет разность температур ΔT между входящим и нисходящим потоками; z — характеризует отклонение вертикального температурного профиля от линейной зависимости.

Три параметра σ, r и μ пропорциональны, соответственно, числу Прандтля, числу Рэлея и некоторому коэффициенту, отражающему геометрию области (геометрический параметр конвективной ячейки).

Параметр r пропорционален разности температур, между дном подогреваемой снизу жидкости и ее свободной поверхностью. Его называют управляющим (изменение параметра соответствует большему или меньшему нагреву жидкости).

Система (1) является примером хаотического (странного) аттрактора и принадлежит к числу катастроф типа сборки. Численное исследование этой системы обнаружило эффект ([1]) существенной зависимости решений от начальных данных (которую иногда называют эффектом бабочки). Этот факт позволяет сделать вывод о невозможности предсказания долгосрочных прогнозов погоды.

Система (1) имеет следующие свойства:

- однородность (автономность);

симметрия относительно переменных и (при изменении знака этих переменных система не меняется);

диссипативность (все траектории ограничены некоторым предельным множеством).

Действительно, дивергенция фазового потока равна

$$div(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{\partial}{\partial x}(-\sigma \cdot x + \sigma \cdot y) + \frac{\partial}{\partial y}(r \cdot x - y - x) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(x \cdot y - b \cdot z) = -\sigma - 1 - b < 0.$$

Последнее означает, что поток сжимает некоторый объем фазового пространства, т.е. все фазовые траектории будут ограничены некоторым предельным множеством.

Коротко остановимся на рассмотрении процесса конвекции движения жидкости. В жидкости с определенным коэффициентом теплового расширения разность температур ΔT порождает разность плотностей. Холодная, более плотная жидкость, которая расположена в верхней части слоя *(с температурой* T_0) стремится опуститься в нижнюю, более теплую (*с температурой* $T_0 + \Delta T$) и менее плотную.

В то же время, нижняя часть слоя стремится подняться на верх. Возникает движение жидкости, которое называют тепловой конвекцией. При малых значениях ΔT ($r < 1$) конвективное движение не возникает (из-за эффектов трения). При достижении определенной разности ΔT_c состояние покоя жидкости нарушается и начинается конвекция, в результате которой при значениях $\Delta T > \Delta T_c$ формируется структура валов (конвективные валы с параллельными горизонтальными

осями). Эти валы образованы чередующимися восходящими и нисходящими потоками. При этом движение жидкости однородно вдоль оси Oy. Потоки расположены эквидистантно с пространственным периодом L. Два соседних вала вращаются в противоположных направлениях.
При больших значениях $\Delta T > \Delta T_c$ структура движения валов полностью разрушается: движение становится хаотическим (турбулентным).

Система (1), помимо тривиального положения равновесия $M_0(0,0,0)$, имеет еще два положения равновесия $M_{1,2}(\pm a,\pm a, r-1)$, $a=\sqrt{b(r-1)}$, которые появляются при $r>1$. Очевидно, что значение параметра $r=1$ является бифуркационным и при переходе через этот параметр меняется сценарий бифуркационного процесса.
Основная идея вариационного метода состоит в определении максимума скорости изменения евклидовой метрики $S=\frac{1}{2}(x^2+y^2+z^2)$ ([2]) (полуметрика) в фазовом пространстве состояний, предполагая, что искомое решение не покидает области $S(x,y,z)<\varepsilon$.
Исследуем сначала на устойчивость нулевое положение равновесия $M_0(0,0,0)$, используя вариационную методику. С этой целью составим метрическую функцию

$$\dot S = x\cdot\dot x + y\cdot\dot y + z\cdot\dot z = \sigma\cdot x\cdot(y-x) + y\cdot(x\cdot(r-z)-y) + \quad (2)$$
$$+z\cdot(x\cdot y - b\cdot z),$$

которая равна производной по времени t функции $S(x,y,z)$ в силу системы (1). Как показано в [2], необходимые условия устойчивости возмущенного решения в окрестности нулевого положения равновесия для первых частных производных функции (2) по переменным x, y, z имеют вид

$$\frac{\partial \dot S}{\partial x} = -2\cdot\sigma\cdot x + \sigma\cdot y + y\cdot(r-z) + z\cdot y \le 0;$$
$$\frac{\partial \dot S}{\partial y} = \sigma\cdot x + x\cdot(r-z) - 2\cdot y + z\cdot x \le 0; \quad (3)$$
$$\frac{\partial \dot S}{\partial z} = -x\cdot y + x\cdot y - 2\cdot b\cdot z \le 0;$$

Для частных производных второго порядка функции $\dot S(\mathrm{x,y,z})$ необходимые условия устойчивости возмущенного решения в окрестности нулевого положения равновесия принимают вид:

$$\frac{\partial^2 \dot S}{\partial x^2} = -2\cdot\sigma < 0;\ \frac{\partial^2 \dot S}{\partial y^2} = -2 < 0;\ \frac{\partial^2 \dot S}{\partial z^2} = -2\cdot b < 0.$$

Эти соотношения равносильны условиям $\sigma>0$; $b>0$, $0<r<1$, и при этих условиях возмущенное решение системы (1) необходимо (асимптотически) устойчиво в окрестности положения равновесия $\mathrm{M}_0(0,0,0)$ (и неустойчиво в противном случае).
Замечание 1. Если в соотношениях (3) выполняются строгие неравенства:

$$\frac{\partial \dot S}{\partial x} < 0;\ \frac{\partial \dot S}{\partial y} < 0;\ \frac{\partial \dot S}{\partial z} < 0,$$

то функция $S(x,y,z)$, определенная выше, удовлетворяет всем условиям функции Ляпунова. В этом случае условия $\sigma>0$; $b>0$, $0<r<1$ являются достаточными для устойчивости по Ляпунову возмущенного решения в окрестности нулевого положения равновесия. Таким образом. справедлива
Теорема 1. Возмущенное решение системы (1) в окрестности нулевого положения равновесия необходимо (асимптотически) устойчиво при
$\sigma>0$; $b>0$, $0<r<1$.

Эти условия будут достаточными для устойчивости по Ляпунову возмущенных решений в области фазовых переменных

$$\frac{(\sigma+r)}{2}\cdot x < y < \frac{2\sigma}{(\sigma+r)}\cdot x \quad (4)$$

в окрестности нулевого положения равновесия $(0,0,0)$. При этом граничные поверхности в (4) содержат сепаратриссы точек бифуркаций в этом случае.
Далее для исследования на устойчивость положения равновесия
$M_2(a,a,r-1)$, $(r>1)$, $a=\sqrt{b\cdot(r-1)}$ сделаем предварительно замену $x=u+a$, $y=v+a$, $z=w+\beta$, $\beta=r-1$.
В новых переменных получаем систему

$$\dot u = \sigma\cdot(v-u), \dot v = -w\cdot(u+a)+u-v, \dot w = \quad (5)$$
$$= u\cdot v + a\cdot(u+v) - b\cdot w.$$

Систему (5) исследуем на устойчивость в окрестности точки $P_1(0,0,0)$, которая соответствует точке $\mathrm{M}_2(a,a,r-1)$.
Согласно вариационному методу составим метрическую функцию $\dot S = \dot S(u,v,w) = u\cdot\dot u + v\cdot\dot v + w\cdot\dot w = u\cdot[\sigma\cdot(v-u)] +$
$+v\cdot[u-v-w\cdot(u+a)] + w[u\cdot v + a\cdot(u+v) - b\cdot w]. \quad (6)$

Необходимые условия устойчивости возмущенного решения в окрестности нулевого положения равновесия для первых частных производных функции (6) по переменным u, v, w имеют вид:

$$\frac{\partial \dot S}{\partial u} = \sigma\cdot v - 2\cdot\sigma\cdot u + v - w\cdot v + w\cdot v + a\cdot w \le 0;$$
$$\frac{\partial \dot S}{\partial v} = \sigma\cdot u + u - 2\cdot v - w\cdot(u+a) + w\cdot u + a\cdot w \le 0;$$
$$\frac{\partial \dot S}{\partial w} = -v\cdot(u+a) + u\cdot v + a\cdot(u-v) - 2\cdot b\cdot w \le 0.$$

Для частных производных второго порядка функции $\dot S(u,v,w)$ необходимые условия (асимптотической) устойчивости возмущенного решения в окрестности нулевого положения равновесия системы (5) имеют вид

$$\frac{\partial^2 \dot S}{\partial u^2} = -2\cdot\sigma < 0;\ \frac{\partial^2 \dot S}{\partial v^2} = -2 < 0;\ \frac{\partial^2 \dot S}{\partial w^2} = -2\cdot b < 0.$$

Следовательно, при $\sigma>0$; $b>0$; $r>1$ возмущенное решение системы (5) необходимо (асимптотически) устойчиво в окрестности нулевого положения равновесия.

Замечание 2. Если в указанных соотношениях выполняются строгие неравенства

$$\frac{\partial \dot S}{\partial u}<0;\ \frac{\partial \dot S}{\partial v}<0;\ \frac{\partial \dot S}{\partial w}<0,$$

то функция $S=S(u,v,w)=\frac{1}{2}\left(u^2+v^2+w^2\right)$ становится функцией Ляпунова, и вопрос устойчивости решается на основе второго метода Ляпунова.

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Возмущенное решение в окрестности положения равновесия $M_2(a,a,r-1)$, $a=\sqrt{b\cdot(r-1)}$, $(r>1)$ системы (1) необходимо (асимптотически) устойчиво при $\sigma>0$; $b>0$, $r>1$.

Эти условия будут достаточными для устойчивости по Ляпунову возмущенных решений в области фазовых переменных:

$$\frac{(\sigma+1)}{2\cdot\sigma}\cdot v+\frac{a}{2\sigma}\cdot w<u<\frac{2}{\sigma+1}\cdot v;$$

$$\frac{(\sigma+1)}{2}\cdot v+\frac{a}{2\sigma}\cdot w<u<\frac{2b}{a}\cdot w; \qquad (7)$$

в окрестности положения равновесия $M_2(a,a,r-1)$. При этом граничные поверхности в (7) содержат сепаратриссы точек бифуркаций в этом случае.

Аналогично решается вопрос устойчивости для положения равновесия $M_3(-a,-a,r-1)$.

Интерес представляет решение вопроса устойчивости положений равновесия M_0, M_1, M_2 классическими методами путем линеаризации системы уравнений (1). Матрица Якоби линеаризованной системы в точке положения равновесия $M_i(x_i,y_i,z_i)$ имеет вид

$$A(M_i)=\begin{matrix}-\sigma & \sigma & 0\\ r-z_i & -1 & -x_i\\ y_i & x_i & -b\end{matrix} \qquad (8)$$

Для положения равновесия $M_0(0,0,0)$ характеристическое уравнение матрицы $A(M_i)$ принимает вид $(\lambda+b)\cdot(\lambda^2+(\sigma+1)\cdot\lambda+\sigma\cdot(1-r))=0$ и при $0<r<1$ все характеристические числа будут отрицательны, а значит, нулевое положение равновесия будет устойчиво по Ляпунову.

При $r>1$ оно не устойчиво. При $r=1$ точка M_0 является негиперболической.

Для положения равновесия $M_2(a,a,r-1)$, $a=\sqrt{b\cdot(r-1)}$, $r>1$ характеристическое уравнение матрицы Якоби (8) принимает вид

$$\lambda^3+(\sigma+b+1)\cdot\lambda^2+b\cdot(\sigma+r)\cdot\lambda+2b\cdot\sigma\cdot(r-1)=0$$

Необходимое условие устойчивости при $r>1$ выполнено и этот многочлен является многочленом Гурвица.

Составим матрицу Гурвица в точке M_2

$$G=\begin{matrix}\sigma+b+1 & 1 & 0\\ 2\sigma\cdot b\cdot(r-1) & (\sigma+r)\cdot b & \sigma+b+1\\ 0 & 0 & 2\sigma\cdot b\cdot(r-1)\end{matrix},$$

для которой главные миноры равны

$\Delta_1=\sigma+b+1$; $\Delta 2=\sigma\cdot(\sigma+b+3)+r\cdot(b+1-\sigma)$;

$\Delta_3=2\sigma\cdot b\cdot(r-1)\cdot\Delta_2$.

Тогда, согласно критерию Рауса-Гурвица условия асимптотической устойчивости по Ляпунову эквивалентны условиям $\Delta_1>0$, $\Delta_2>0$, $\Delta_3>0$.

Таким образом, условие (асимптотической) устойчивости равносильно соотношениям:

или $\sigma-b-1<0$;

или $\begin{cases}\sigma-b-1>0;\\ r>\dfrac{\sigma\cdot(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1}\end{cases}$

Замечание 3. Если (при $r>1$) выполнено условие λ^2 + $\lambda^2+\frac{2\sigma\cdot b\cdot(\sigma+1)}{\sigma-b-1}=0$, то характеристическое уравнение матрицы (8) имеет пару чисто мнимых корней, что соответствует бифуркации Андронова –Хопфа.

Приложение

В заключении приведем результаты численных расчетов решений системы Лоренца и графики фазовых портретов для иллюстрации бифуркационного процесса.

На рисунках 1а) и 1б) приведены фазовые траектории, соответствующие разным начальным условиям, иллюстрирующие смену аттрактора

при r = 10 (а) и r = 15 (б).

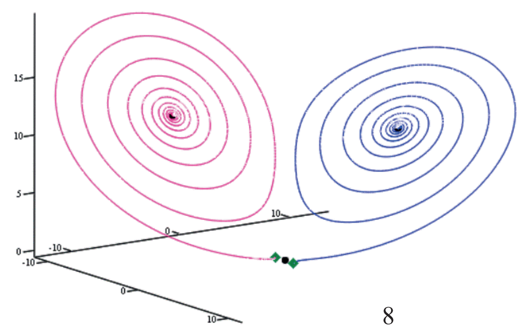


Рис. 1а. $r=10$, $\sigma=10$, $b=\frac{8}{3}$

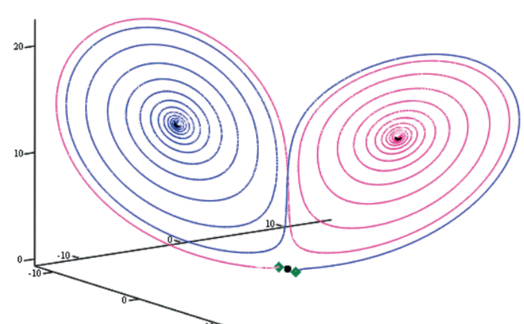
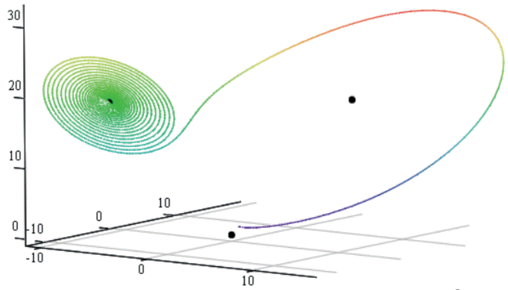


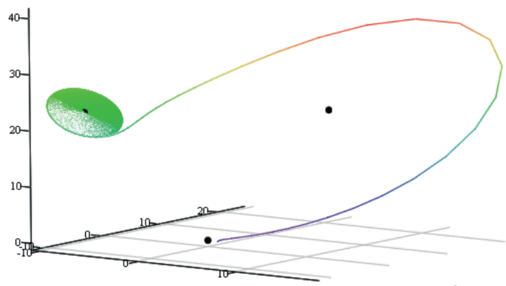
Рис. 1б. $r=15$, $\sigma=10$, $b=\frac{8}{3}$

Отметим, что с ростом r происходит уменьшение начального размаха колебаний, что иллюстрирует Рис. 2 в сравнении с Рис. 1.



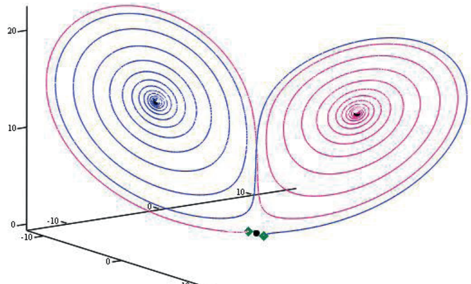
Р и с. 2а. Фазовые траектории $r = 20$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$.

F i g. 2a. Phase trajectories $r = 20$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$.



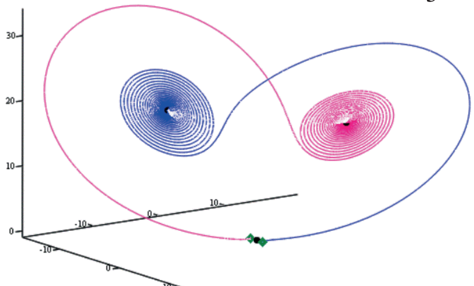
Р и с. 2б. Фазовые траектории $r = 24$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$.

F i g. 2b. Phase trajectories $r = 24$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$.



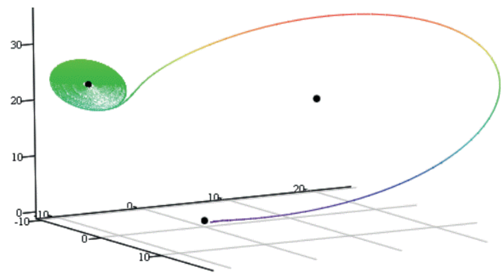
Р и с. 2в. Фазовые траектории $r = 19$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$

F i g. 2v. Phase trajectories $r = 19$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$



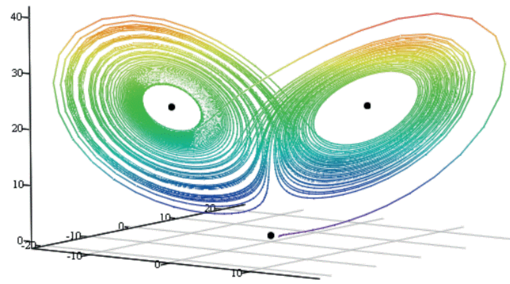
Р и с. 2г. Фазовые траектории $r = 24$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$

F i g. 2g. Phase trajectories $r = 24$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$



Р и с. 3а. Фазовые траектории $r = 24,05$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$

F i g. 3a. Phase trajectories $r = 24,05$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$



Р и с. 3б. Фазовые траектории $r = 24,06$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$

F i g. 3b. Phase trajectories $r = 24,06$, $\sigma = 10$, $b = \dfrac{8}{3}$

Таким образом, в интервале $r \in (24,05; 24,06)$ в системе существует три аттрактора – две неподвижные точки ($\pm a, \pm a, r{-}1$) и странный аттрактор.

Начиная с некоторого $r = r^*$ неподвижные точки $P_{1,2}$ теряют устойчивость.

И остается единственное притягивающее множество – странный аттрактор Лоренца.

Полученные результаты

В работе рассмотрены два метода исследования устойчивости решений системы уравнений Лоренца.

Первый метод использует вариационную методику, основанную на идее определения максимума скорости изменения евклидовой метрики (см. [13]), предполагая, что решение не покидает ε- окрестности положения равновесия. Этот метод, как показано выше, является эффективным для получения необходимых условий устойчивости и дает возможность для продолжения исследований (в целях определения достаточных условий). Результаты сформулированы в теоремах 1 и 2. Указаны области фазовых переменных в которых необходимые условия устойчивости являются к тому же и достаточными для устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову возмущенных решений в окрестности особых точек. Он позволяет выяснить сепаратриссы поверхностей точек бифуркации. В нашей задаче сепаратриссы точек бифуркаций системы (1) Лоренца принадлежат граничным поверхностям фазовых переменных, которые определяются соотношениями (4) в окрестности нулевого положения равновесия M_0 и соотношениями (7), соответственно, для положения равновесия M_1.

Другой метод исследования устойчивости основан на линеаризации систем уравнений (1) и (5), соответственно. Он позволяет определить достаточные условия устойчивости, если известна функция Ляпунова. В нашей задаче мы применили критерий Рауса-Гурвица.

Заключение

В работе для системы уравнений Лоренца показана эффективность применения вариационного метода получения необходимых условий устойчивости по Ляпунову и определения областей фазовых переменных, в которых эти условия становятся достаточными. Этот метод позволяет сделать вывод об универсальности применения этого метода для широкого класса динамических систем.

Список использованных источников

[1] Lorenz, E. N. Deterministic Nonperiodic Flow / E. N. Lorenz // Journal of the Atmospheric Sciences. — 1963. — Vol. 20. — Pp. 130-141. — URL: https://www.astro.puc.cl/~rparra/tools/PAPERS/lorenz1962.pdf (accessed 14.03.2021).
[2] Арнольд, В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений / В. И. Арнольд. — М.: Наука, 1978. — 304 с.
[3] Арнольд, В. И. Теория катастроф / В. И. Арнольд // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. — М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. — Т. 5. — С. 5-218.
[4] Berge, P. Order within Chaos / P. Berge, Y. Pomeau, C. Vidal. — Wiley-VCH, 1987. — 329 p.
[5] Теория показателей Ляпунова и её приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград [и др.]. — М.: Наука, 1966. — 576 с.
[6] Гершуни, Г. З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий. — М.: Наука, 1972. — 392 с.
[7] Евстигнеев, Н. М. О природе турбулентности в конвекции Рэлея-Бенара / Н. М. Евстигнеев, Н. А. Магницкий, С. В. Сидоров // Дифференциальные уравнения. — 2009. — Т. 45, № 6. — С. 890-893. — URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12450406 (дата обращения: 14.03.2021).
[8] Евстигнеев, Н. М. О возможных сценариях перехода к турбулентности в конвекции Рэлея-Бенара / Н. М. Евстигнеев, Н. А. Магницкий // Доклады Академии наук. — 2010. — Т. 433, № 3. — С. 318-322. — URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15142426 (дата обращения: 14.03.2021).
[9] Kaloshin, D. A. A Complete Bifurcation Diagram of Nonlocal Bifurcations of Singular Points in the Lorenz System / D. A. Kaloshin, N. A. Magnitskii. — DOI 10.1007/s10598-011-9112-z // Computational Mathematics and Modeling. — 2011. — Vol. 22, issue 4. — Pp. 444-453.
[10] Магницкий, Н. А. Теория динамического хаоса / Н. А. Магницкий. — М.: URSS, 2011. — 320 с.
[11] Magnitskii, N. A. Universal theory of dynamical chaos in nonlinear dissipative systems of differential equations / N. A. Magnitskii. — DOI 10.1016/j.cnsns.2006.05.006 // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2008. — Vol. 13, issue 2. — Pp. 416-433.
[12] Самарский, А. А. Численные методы / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука, 1989. — 430 с.
[13] Смольяков Э. Эффективный метод устойчивости существенно нелинейных динамических систем // Кибернетика и системный анализ. — 2019. — Т. 55, № 4. — С. 15-23.
[14] Симо, К. Современные проблемы хаоса и нелинейности / К. Симо, С. Смейл, А. Шенсине [и др.]; под ред. В. А. Садовничего. — Ижевск: ИКИ, 2002. — 304 с.
[15] Шильников, Л. П. Теория бифуркаций в модели Лоренца / Л. П. Шильников // Бифуркация рождения цикла и ее приложения; под ред. Дж. Марсден, М. Мак-Кракен. — М.: Мир, 1980. — С. 317-335.
[16] Шустер, Г. Детерминированный хаос: Введение / Г. Шустер. — М.: Мир, 1988. — 240 с.
[17] Четаев, Н. Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. — М.: Изд-во АН СССР, 1962. — 535 с.
[18] Chen, X. Lorenz Equations Part I: Existence and Nonexistence of Homoclinic Orbits / X. Chen. — DOI 10.1137/S0036141094264414 // SIAM Journal on Mathematical Analysis. — 1996. — Vol. 27, issue 4. — Pp. 1057-1069.
[19] Evstigneev, N. M. Nonlinear dynamics of laminar-turbulent transition in three dimensional Rayleigh-Benard convection / N. M. Evstigneev, N. A. Magnitskii, S. V. Sidorov. — DOI 10.1016/j.cnsns.2009.10.022 // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. — 2010. — Vol. 15, issue 10. — Pp. 2851-2859.
[20] Magnitskii, N. A. New Methods for Chaotic Dynamics / N. A. Magnitskii, S. V. Sidorov. — Singapore: World Scientific Publishing Co., 2006. — 384 p.
[21] Guckenheimer, J. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields / J. Guckenheimer, P. Holmes. — DOI 10.1007/978-1-4612-1140-2 // Applied Mathematical Sciences. — Vol. 42. Springer, New York, NY, 1983. — 462 p.
[22] Тихомиров, В. В. Применение вариационного метода для исследования устойчивости системы Лотки — Вальтеры (для 3 измерений) / В. В. Тихомирв, Р. Р. Исаев // Сб. трудов межд. конф. «Современные методы математической физики и их приложения». — Т. 2. — Ташкент, 2020. — С. 204-209.
[23] Shil'nikov, A. Normal forms and Lorenz attractors / A. Shil'nikov, L. Shil'nikov, D. Turaev. — DOI 10.1142/S0218127493000933 // International Journal of Bifurcation and Chaos. — 1993. — Vol. 03, No. 05. — Pp. 1123-1139.
[24] Sparrou, C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors / C. Sparrou. — DOI 10.1007/978-1-4612-5767-7 // Applied Mathematical Sciences. — Vol. 41. — Springer, New York, NY, 1982. — 270 p.
[25] Hirsch, M. W. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos / M. W. Hirsch, S. Smale, R. L. Devaney. — Academic Press, Elsevier, 2004. — 417 p.
[26] Численное исследование влияния стохастических воз-

мущений на поведение решений некоторых дифференциальных уравнений / А. Н. Фирсов, И. Н. Иновенков, В. В. Тихомиров, В. В. Нефедов. — DOI 10.25559/SITITO.17.202101.730 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. — 2021. — Т. 17, № 1. — С. 37-43.

[27] Bliss, G. A. Lectures on the calculus of variations / G. A. Bliss. — University of Chicago Press, 1947. — 296 p.

Поступила 14.03.2021; одобрена после рецензирования 20.05.2021; принята к публикации 10.06.2021.

Об авторах:

Тихомиров Василий Васильевич, доцент кафедры общей математики, факультет вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5569-1502**, zedum@cs.msu.ru

Исаев Рустам Русланович, студент факультета вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5310-9769**, xzidkeyx@gmail.com

Мальцева Анна Всеволодовна, младший научный сотрудник кафедры нелинейных динамических систем и процессов управления, факультет вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5701-3553,** amaltseva@cs.msu.ru

Нефедов Владимир Вадимович, доцент кафедры автоматизации научных исследований, факультет вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4602-5070**, vv_nefedov@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*. 1963; 20:130-141. Available at: https://www.astro.puc.cl/~rparra/tools/PAPERS/lorenz1962.pdf (accessed 14.03.2021). (In Eng.)

[2] Arnold V.I. *Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij* [Additional chapters of the theory of ordinary differential equations]. Moscow, Nauka; 1978. 304 p. (In Russ.)

[3] Arnold V.I. *Teorija katastrof* [Catastrophe Theory]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, vol. 5. VINITI, Moscow; 1985. p. 5-218. (In Russ.)

[4] Berge P., Pomeau Y., Vidal C. Order within Chaos. Wiley-VCH, 1987. 329 p. (In Eng.)

[5] Bylov B.F., Vinograd R.E., Grobman D.M., Nemyckii V.V. *Teorija pokazatelej Ljapunova i ee prilozhenija k voprosam ustojchivosti* [Theory of Ljapunov exponents and its application to problems of stability]. Izdat. Nauka, Moscow; 1966. 576 p. (In Russ.)

[6] Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Konvektivnaja ustojchivost' neszhimaemoj zhidkosti* [Convective Stability of Incompressible Fluids]. IPST; 1976. 336 p. (In Russ.)

[7] Evstigneev N.M., Magnitskii N.A., Sidorov S.V. On the nature of turbulence in Rayleigh-Benard convection. *Differential Equations*. 2009; 45(6):909-912. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266109060135

[8] Evstigneev N.M., Magnitskii N.A. On possible scenarios of the transition to turbulence in Rayleigh-Bénard convection. *Doklady Mathematics*. 2010. 82(1):659-662. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1134/S106456241004040X

[9] Kaloshin D.A., Magnitskii N.A. A Complete Bifurcation Diagram of Nonlocal Bifurcations of Singular Points in the Lorenz System. *Computational Mathematics and Modeling*. 2011; 22(4):444-453. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/s10598-011-9112-z

[10] Magnitskii N.A. *Teorija dinamicheskogo haosa* [Theory of Dynamical Chaos]. URSS, Moscow; 2011. 320 p. (In Russ.)

[11] Magnitskii N.A. Universal theory of dynamical chaos in nonlinear dissipative systems of differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2008; 13(2):416-433. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.05.006

[12] Samarsky A.A., Gilin A.V. *Chislennye metody* [Numerical Methods]. Izdat. Nauka, Moscow; 1989. 430 p. (In Russ.)

[13] Smol'yakov E.R. An efficient method of stability analysis for highly nonlinear dynamic systems. *Kibernetika i sistemnyj analiz*. 2019; 55(4):15-23. (In Russ., abstract in Eng.)

[14] Simo K., Shensine A. et al. *Sovremennyie problemyi haosa i nelineynosti* [Modern problems of chaos and nonlinearity]. ICS, Izhevsk; 2002. 304 p. (In Russ.)

[15] Shil'nikov, L.P. *Teorija bifurkacij v modeli Lorenca* [Bifurcation theory and the Lorentz model]. In: Ed. by J. Marsden, M. McCraken. Bifurcation of the cycle generation and its applications. Mir, Moscow; 1980. p. 317-335. (In Russ.)

[16] Schuster H.G. Deterministic Chaos: An Introduction. 3rd Ed. Wiley-VCH; 1995. 320 p. (In Eng.)

[17] Chetaev N.G. *Ustojchivost' dvizhenija. Raboty po analiticheskoj mehanike* [Stability of Motion. Works in Analytical Mechanics]. Izdat. AN SSSR, Moscow; 1962. 535 p. (In Russ.)

[18] Chen X. Lorenz Equations Part I: Existence and Nonexistence of Homoclinic Orbits. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1996; 27(4):1057-1069. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1137/S0036141094264414

[19] Evstigneev N.M., Magnitskii N.A., Sidorov S.V. Nonlinear dynamics of laminar-turbulent transition in three dimensional Rayleigh-Benard convection. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010; 15(10);2851-2859. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.10.022

[20] Magnitskii N.A., Sidorov S.V. New Methods for Chaotic Dynamics. World Scientific Publishing Co., Singapore; 2006.

384 p. (In Eng.)

[21] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. *Applied Mathematical Sciences*, vol. 42. Springer, New York, NY; 1983. 462 p. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2

[22] Tikhomirov V.V., Isaev R.R. *Primenenie variacionnogo metoda dlja issledovanija ustojchivosti sistemy Lotki — Val'tery (dlja 3 izmerenij)* [Application of the variational method for studying stability of the 3D Lotka — Volterra system]. *Proceedings of the International Conference on Modern Methods of Mathematical Physics and their Applications*, vol. 2. Tashkent; 2020. p. 204-209. (In Russ.)

[23] Shil'nikov A., Shil'nikov L., Turaev D. Normal forms and Lorenz attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1993; 03(05):1123-1139. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1142/S0218127493000933

[24] Sparrou C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. *Applied Mathematical Sciences*, vol. 41. Springer, New York, NY; 1982. 270 p. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5767-7

[25] Hirsch M.W., Smale S., Devaney R.L. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. Academic Press, Elsevier; 2004. 417 p. (In Eng.)

[26] Firsov A.N., Inovenkov I.N., Tikhomirov V.V., Nefedov V.V. Numerical Study of the Effect of Stochastic Disturbances on the Behavior of Solutions of Some Differential Equations. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2021; 17(1):37-43. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202101.730

[27] Bliss G.A. Lectures on the calculus of variations. University of Chicago Press; 1947. 296 p. (In Eng.)

Submitted 14.03.2021; approved after reviewing 20.05.2021; accepted for publication 10.06.2021.

About the authors:

Vasiliy V. Tikhomirov, Associate Professor of the Department of General Mathematics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5569-1502**, zedum@cs.msu.ru

Rustam R. Isaev, student of the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5310-9769**, xzidkeyx@gmail.com

Anna V. Maltseva, Junior Researcher of the Department of Nonlinear Dynamic Systems and Control Processes, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5701-3553,** amaltseva@cs.msu.ru

Vladimir V. Nefedov, Associate Professor of the Department of Automation for Scientific Research, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor**, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4602-5070,** vv_nefedov@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.