УДК 519.62, 519.63, 519.682.3
DOI: 10.25559/SITITO.17.202102.404-414

Оригинальная статья

Изучение дисциплины вычислительные методы с помощью проектного подхода

А. И. Эгамов*, О. В. Приставченко
ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», г. Нижний Новгород, Российская Федерация
603022, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23
* albert810@yandex.ru

Аннотация

В настоящей статье рассказывается об опыте освоения дисциплины «Вычислительные методы» студентами направления подготовки 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского с помощью проектного подхода, где студент под общим руководством наставника самостоятельно осуществляет исследовательскую работу, повторяя и закрепляя теоретические знания и формируя умения и навыки общепрофессиональных и профессиональных компетенций в том числе IT-направления. Именно элементы исследовательского обучения способствуют более активной самостоятельной работе студента, что не всегда является успешно достижимым в вузах и потому считается актуальным в преподавательской деятельности. Далее в статье обосновывается выбор тем. Следом авторы описывают ход реализации одной из работ: задачей нахождения оптимального управления с начально-краевой задачей для уравнения гиперболического типа и фазовым ограничением. В ней показан переход к интегрально-дифференциальному уравнению для автоматического удовлетворения фазового ограничения. Студент, применяя один из методов нахождения минимума, находит оптимальное значение усеченной задачи, получая, тем самым, минимизирующую последовательность. Доказывается сходимость последовательности оптимальных значений целевых функций усеченных задач к оптимальному значению исходной. Представлены скриншоты программы, написанной популярном алгоритмическом языке Python, выполненной одним из студентов. Таким образом, авторы дают описания своего опыта слияния в образовательном процессе науки и IT-индустрии, где одно без другого не сможет подготовить конкурентоспособного выпускника.

Ключевые слова: проектный подход, вычислительные методы, оптимальное управление, дифференциальные уравнения, язык программирования Python

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Эгамов, А. И. Изучение дисциплины вычислительные методы с помощью проектного подхода / А. И. Эгамов, О. В. Приставченко. – DOI 10.25559/SITITO.17.202102.404-414 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2021. – Т. 17, № 2. – С. 404-414.

Original article

Studying the Discipline of Computational Methods Using a Design Approach

A. I. Egamov*, O. V. Pristavchenko
National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603022, Russian Federation
* albert810@yandex.ru

Abstract
This article is about of the experience of mastering the discipline "Computational Methods" by students of the direction 02.03.02 "Fundamental Informatics and Information Technologies" of Nizhny Novgorod State University, where a student, under the general guidance of a mentor, independently carries out research work, repeating and consolidating theoretical knowledge and forming the skills and abilities of general professional and professional competencies, including IT-directions. It is the elements of research education that contribute to a more active independent work of the student, which is not always successfully attainable in universities and therefore is considered relevant in teaching. Further, in the article the choice of topics is justified. Next, the authors describe the progress of one of the works: the problem of finding the optimal control with an initial-boundary value problem for an equation of hyperbolic type and a phase constraint. It shows the transition to an integral-differential equation to automatically satisfy the phase constraint. The student, applying one of the methods for finding the minimum, finds the optimal value of the truncated problem, thereby obtaining a minimizing sequence. The convergence of the sequence of optimal values of the objective functions of the truncated problems to the optimal value of the original is proved. Screenshots of a program written by the popular algorithmic Python language, performed by one of the students, are presented. Thus, the authors describe their experience of merging in the educational process of science and the IT-industry, where one cannot prepare a competitive graduate without the other.

Keywords: design approach, computational methods, optimal control, differential equations, Python programming language

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Egamov A.I., Pristavchenko O.V. Studying the Discipline of Computational Methods Using a Design Approach. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education.* 2021; 17(2):404-414. DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.404-414

Введение

Компетентностный подход в вузовском обучении не новость. Это основное требование современных федеральных государственных образовательных стандартов [1-8]. При этом не всегда удается осуществить продуктивное освоение компетенций. Причин этому множество: от непонимания преподавателем сущности компетенций до материальной базы вуза, и, как итог, бюрократический формализм в обучении. Чтобы этого избежать Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского (далее – ННГУ) пошел по пути модернизации образовательных программ, в том числе с помощью выполнения ряда образовательных отечественных и международных проектов, в частности, проектов TUNING RUSSIA [9-12] и META-MATH [13, 14]. Опыт участия в данных проектах привел к необходимости ННГУ разработать собственные образовательные стандарты в области информационно-коммуникационных технологий [15-17], что позволило не противореча федеральным государственным стандартам, разработать максимально адаптированную под университет рабочую методическую документацию.

По направлению 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» (далее – ФИИТ) ННГУ имеется два типа задач профессиональной деятельности: научно-исследовательский и производственно-технологический. Соответственно, профессиональные компетенции (далее - ПК) делятся на две группы по двум типам задач. В проектом подходе для дисциплины «Вычислительные методы» раскрывается следующая ПК, связанная с научно-исследовательскими задачами: ПК-2: применение общенаучных базовых знаний математических и естественных наук, фундаментальной информатики и информационных технологий; применение в профессиональной деятельности современных языков программирования и методы параллельной обработки данных, операционные системы, электронные библиотеки и пакеты программ, сетевые технологии. И профессиональная компетенция, связанная с производственно-технологическими задачами: ПК-5: использование современных инструментальных и вычислительных средств информационных технологий. Также дисциплина «Вычислительные методы» направлена на освоение общепрофессиональной компетенции ОПК-2: применение компьютерные/суперкомпьютерные методы, современное программное обеспечение, в том числе отечественного происхождения, для решения задач профессиональной деятельности[1].

Для раскрытия этих компетенций проект должен иметь в основе своей хороший математический аппарат, при этом обладая программой, написанной на современном языке программирования, с красивой графикой и дружелюбным интерфейсом. Причем время работы программы должно быть приемлемым для пользователя, а для этого перед студентов ставится еще одна задача: оптимизировать алгоритм для увеличения ее быстродействия.

Методология преподавания вычислительных методов

Добиться положительного результата от применения средств электронного обучения можно только в случае, когда их внедрение будет опираться на системный пересмотр методики преподавания, адекватно интегрирующий новые технические возможности в образовательный процесс [18]. Учитывая вышесказанное, перепробовав несколько вариантов проектов, выбор был остановлен на задаче управления с распределенными параметрами – оптимизационной задаче минимизации критерия качества терминального типа начально-краевой задачи для уравнения с частными производными с фазовым ограничением. Кроме профессионального интереса к подобным задачам, авторами преследовались еще несколько целей.

Первая – изучение студентом отдельных глав курса «Уравнения математической физики». Дело в том, что в учебной программе направления ФИИТ этого курса нет[2]. А ведь, именно там, широко применяется метод Фурье разложения по собственным функциям и метод Галеркина [19, 20], которые близки по своей сути к разложению сигнала по гармоникам, что входит в число интересов данного направления.

Вторая – изучение студентом отдельных глав курса «Методы оптимизации». Этот предмет представлен в учебной программе направления ФИИТ семестровым курсом[3]. В него входят и дискретная, и непрерывная оптимизация, а также динамическое программирование и вариационное исчисление. Повторить выпускнику без спешки, хотя бы, основы оптимизации считаем также весьма полезным. Современные информационные технологии сами внутри себя содержат принцип оптимальности, например, быстродействие, уменьшение времени обработки чего-либо, различные алгоритмы, лучшие относительно той или иной целевой функции и т.п., поэтому IT-образование должно включать достаточно времени для изучения методов оптимизации и задач оптимального управления.

Третья – умение работать с «бесконечностью». После некоторых преобразований в работе получается бесконечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений. Умению сводить бесконечномерные задачи к конечномерным обучают, мягко говоря, не везде и не всегда, а оно также несомненно полезно выпускнику, получившему IT-образование, так как он должен четко понимать, что, работая на компьютере, он имеет дело с огромным, но конечным и дискретным набором чисел. А решение любой конечной системы принципиально отличается от решения для бесконечномерной системы.

Четвертая – проведение исследование задач, позволяющих бу-

[1] ФГОС ВО – бакалавриат по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии: утв. приказом Министерства образования и науки Российской Федерации 23 августа 2017 г. № 808 [Электронный ресурс]. URL: http://fgosvo.ru/uploadfiles/FGOS%20VO%203++/Bak/020302_B_3_15062021.pdf (дата обращения: 21.06.2021); О введении в действие образовательных стандартов высшего образования – бакалавриат в новой редакции: приказ ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» от 21.06.2021 г. № 349-ОД. URL: http://www.unn.ru/sveden/files/docs/edustandarts/2021/02_03_02_349_OD.pdf (дата обращения: 21.06.2021).

[2] Учебный план по направлению подготовки 02.03.02 Фундаментальная информатика и информационные технологии Института информационных технологий, математики и механики ННГУ [Электронный ресурс]. URL: http://www.unn.ru/sveden/education/edu-op.php (дата обращения: 21.06.2021).

[3] Там же.

дущим программистам увидеть значимость математических понятий для их профессиональной деятельности [21]. Составлять алгоритмы для корректной работы программы.

Пятая – научиться выдавать ответ в наиболее презентабельном виде, чтобы принимающий работу и другие слушатели могли оценить правильность работы программы, точнее, чтобы при просмотре полученных выходных графиков не было противоречия с теоретическими выкладками. А также, чтобы они четко показывали специфику задачи, например, неотрицательность функции, краевые условия, минимизацию на определенных участках и т.п.

Шестая – считаем актуальным для будущей профессии разработчика требование к учебному проекту написать свою программу решения поставленной задачи.

Естественно, для каждого студента руководителю проекта необходимо предложить различные начально-краевые задачи, критерии качества – целевые функции, разные ограничения на управляющие функции (например, ограничение на множество значений функции, ограничение по норме различных пространств, ограничение на некоторые члены ряда Фурье и т.п.), различные фазовые ограничения. Студенту также предоставляется время подумать сначала над управляемостью: каким условиям должно удовлетворять управление и какой иметь вид, чтобы выполнялось фазовое ограничение. Затем над алгоритмом нахождения оптимальных параметров.

Краткое изложение одного из таких учебных проектов с комментариями относительно некоторых принципиальных моментов авторы представляют в настоящей статье.

Реализация проектного подхода

Ниже рассматривается уравнение гиперболического типа. С версией задачи для уравнения параболического типа и подробными доказательствами можно ознакомиться в работах [22, 23]. С теоретической основой для решения начально-краевой задачи и подбора соответствующего управления для гиперболического случая см. [16], [24]. О задаче оптимального управления для него см. [7]. Понятно, что гиперболический вариант, более трудный, он предлагается в основном более заинтересованным студентам.

На множестве $Q=[0,l]\times[0,T]$ рассматривается задача

$$y''_{tt}=y''_{xx}+u(x,t) \tag{1}$$

с краевыми $y'_x(0,t)=y'_x(l,t)=0$, (2)
и начальными условиями $y(x,0)=\phi(x),\quad y'_t(x,0)=\psi(x)$.

$u(x,t)$ – управление, начальные функции удовлетворяют условия связи (2), $\phi(x)\in C^3[0,l]$, $\psi(x)\in C^2[0,l]$. На них также наложены ограничения:

$$\int_0^l \phi^2(x)\,dx=1,\quad \int_0^l \phi(x)\psi(x)\,dx=0. \tag{3}$$

Пусть имеет место фазовое ограничение: $\int_0^l y^2(x,t)\,dx=1$, при $\forall t\in[0,T]$. Будем искать управление как управление с обратной связью в виде: $u(x,t)=(b(x)+\eta(t))y(x,t)+\hat q(t)y'_t(x,t)$,

где $b(x),\eta(t)$ – управляющие непрерывные функции, $\hat q$ – некоторая вспомогательная функция для возможности перехода к вспомогательной линейной задачи.

Умножим обе части уравнения на $y(t)$, получается

$$\int_0^l yy''_{tt}\,dx=\int_0^l yy''_{xx}\,dx+\int_0^l b(x)y^2\,dx+\eta(t)\int_0^l y^2dx+\hat q(t)\int_0^l yy_t\,dx.$$

Два раза применяя метод интегрирования по частям, имеем

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^l y^2dx-\int_0^l y_t'^2dx=-\int_0^l y_x'^2dx+\int_0^l b(x)y^2\,dx+\eta(t)\cdot 1+\hat q(t)\int_0^l yy'_t\,dx$$

Нетрудно видеть, что при выполнении фазового ограничения верны неравенства (3). Кроме того, справедливы равенства:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^l y^2dx=\hat q(t)\int_0^l yy'_tdx=0.$$

Поэтому $\hat q$ – любая непрерывная функция, а $\eta(t)=-\int_0^l (b(x)y^2+y_t'^2-y_x'^2)dx$. Осталась одна управляющая функция $b(x)$. Возьмем, согласно [16], [24],

$$\hat q(t)=-2q(t)=-2\int_0^l zz'_t\,dx\Big/\int_0^l z^2\,dx,$$

где $z(x,t)$ – решение задачи

$$z''_{tt}=z''_{xx}+b(x)z, \tag{4}$$

$$z'_x(0,t)=z'_x(l,t)=0,$$

$$z'(x,0)=\phi(x),\quad z'_t(x,0)=\psi(x).$$

Кроме того, если для $\forall t\in[0,T]$ не выполняется условие $z(x,t)\equiv 0$, то имеется [24] зависимость,

$$y(x,t)=z(x,t)\Big/\sqrt{\int_0^l z^2(x,t)\,dx}. \tag{5}$$

Уравнение (1) запишется в виде

$$y''_{tt}=y''_{xx}+b(x)y-2q(t)y'_t-y\int_0^l (b(x)y^2+y_t'^2-y_x'^2)\,dx.$$

Теоретическая часть. Задача оптимального управления

Поставим задачу оптимального управления: за фиксированное время *T>0* минимизировать целевую функцию $J^{00}=\int_0^l (y(x,T)-Y(x))^2\,dx\to\min$, где $Y(x)$ – заданная непрерывная функция, на которую наложены ограничения $\int_0^l Y^2(x)dx=1$ и $Y'_x(0)=Y'_x(l)=0$ Из вида целевой функции понятно, что требуется за время T приблизить решение к заданной функции. Пусть на управляющую функцию наложено ограничение: $\int_0^l b^2(x)dx\le c^2$, а также функция $b(x)$ удовлетво-

ряет краевым условиям типа условий (2).
Функции, удовлетворяющие краевым условиям типа 2, можно разложить по системе косинусов, которая ортогональна на отрезке $[0,l]$. Пусть $v_0 = 1$, $v_k = \cos(\frac{\pi kx}{l}) \equiv \cos\lambda_k x$, $k = \overline{1;+\infty}$, – система косинусов. $\int_0^l v_0^2(x)dx = l$ $\int_0^l v_k^2(x)dx = \frac{l}{2}$. Разложим функции по системе косинусов: $y(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \vartheta_k(t)v_k(x)$,

$$z(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k(t)v_k(x), \quad \phi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \phi_k v_k(x), \quad b(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k v_k(x),$$

$$Y(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} Y_k v_k(x),\ \psi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \psi_k v_k(x);$$

$$b(x)z(x,t) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k v_k(x) \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k(t)v_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k(t)v_k(x), \qquad (6)$$

где $p_k(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} c_{kj}\xi_j(t)$. Представление произведения функций в виде (6), как правило, предоставляется провести студенту.

Теоретическая часть. Система дифференциальных уравнений. Действуя стандартным образом [20], умножим обе части (4) на $v_k = \cos(\frac{\pi kx}{l})$ и возьмем интеграл по переменной *x* от *0* до *l*, после несложных преобразований получим бесконечномерную систему дифференциальных уравнений с начальными условиями, которая в матричном виде перепишется в виде

$$\xi''_{tt}(t) = (C - \Lambda)\xi(t),\ \xi_k(t) = \phi_k,\ \xi'_k(t) = \psi_k,\ k = \overline{0;+\infty} \qquad (7)$$

Здесь $\xi(t)$ – бесконечномерная вектор-функция, C – бесконечномерная матрица, с элементами $A_{00} = b_0$, $A_{0j} = \frac{1}{2}b_j$, $A_{ii} = b_0 + \frac{1}{2}b_{2j}$, $A_{ij} = \frac{1}{2}(b_{i+j} + b_{|i-j|})$, $i \uparrow j$. Λ – бесконечномерная диагональная матрица с диагональными элементами $-\lambda_j^2$.
Перейдем к усеченной системе. Пусть $\xi_k(t) = 0$, $k \ge N+1$. Обозначим $!_N$ – главный минор N-го порядка матрицы $(C - \Lambda)$. Усеченная система для системы (6) имеет вид

$$\xi''_{tt}(t) = C_N\xi(t),\ \xi_k(t) = \phi_k,\ \xi'_k(t) = \psi_k,\ k = \overline{0;N}. \qquad (8)$$

Нетрудно заметить, что в матрицу C_N коэффициенты b_j входят только при $j \le 2N$.
Выпускнику предлагается выбрать любой из способов численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений, большой выбор методов представлен, например в [25].
Самый простой из них: решить систему (8) методом сеток [24], получим разностное уравнение:

$$\frac{\varsigma_{n+1} - 2\varsigma_n + \varsigma_{n-1}}{\tau^2} = C_N\varsigma_{n+1},\ \varsigma_0(t) = \bar{\phi}_N,\ \frac{\varsigma_1 - \varsigma_0}{\tau} = \bar{\psi}_N,\ n = \overline{1;s}, \quad (9)$$

где $\bar{\phi}_N$ – вектор $(\phi_0,\ldots,\phi_N)^T$,..., ϕ_N), $\bar{\psi}_N$ – вектор $(\psi_0,\ldots,\psi_N)^T$, достаточно малый шаг τ подобран так, что $s = T/\tau$ – натуральное число. После преобразований

$$\varsigma_{n+1} = (E - \tau^2 C_N)^{-1}(2\varsigma_n - \varsigma_{n-1}). \qquad (10)$$

Так как матрица C_N стационарна, обратная матрица находится только один раз. После решения разностного уравнения (10) получим усеченное решение $\xi(t)$ с погрешностью $O(\tau)$. В этом случае, также многие студенты выписывают решение в явном виде, особенно в случае рассмотрения задачи параболического типа.
Обозначим

$$\sqrt{\int_0^l z^2(x,T)\,dx} = \sqrt{l}\Theta(\bar{\xi}) = \sqrt{l}\sqrt{(\xi_0^2(T) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\xi_k^2(T))}.$$

$\Theta_N(\bar{\xi}) = \sqrt{(\xi_0^2(T) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\xi_k^2(T))}$. Целевая функция перепишется через коэффициенты Фурье в виде:

$$J^{00} = \int_0^l (y(x,t) - Y(x))^2\,dx = 1 + 1 - 2l(\theta_0(T)Y_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\theta_k(T)Y_k)).$$

Иливэквивалентномвиде $J^0 = \theta_0(T)Y_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\theta_k(T)Y_k \to \max$.

Или, согласно уравнению связи (4):

$$J = \frac{\xi_0(T)}{\Theta(\bar{\xi})}Y_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\xi_k(T)}{\Theta(\bar{\xi})}Y_k \to \max.$$

Ограничение на управляющую функцию: $lb_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{+\infty} b_k^2 \le c^2$.

Для усеченной системы ограничения на управляющую функцию и целевая функция перепишутся в следующем виде:

$$lb_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{2N} b_k^2 \le c^2, \qquad (11)$$

$$J^N = \frac{\xi_0(T)}{\Theta_N(\bar{\xi})}Y_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{\xi_k(T)}{\Theta_N(\bar{\xi})}Y_k \to \max. \qquad (12)$$

В данном случае $\xi_i(T)$ – решение усеченной системы. Итак, задача свелась к отысканию максимального значения целевой функции, область допустимых управляющих параметров принадлежит замкнутой ограниченной области, а точнее, *2N+1*-мерному эллипсоиду. Если J^{00} могло достигать нуля, то после пересчета, нетрудно видеть, что $J'' \frac{1}{\sqrt{l}}$.

Экспериментальная часть. Поиск алгоритма

Выбор метода нахождения экстремума целевой функции также остается за студентом [26]. Проще всего запрограммировать метод последовательного перебора или как его называют в англоязычной научной литературе – «метод грубой силы» (bruce force method). Перебор происходит покоординатно по *2N+1*-мерному параллелепипеду, в который вписан эллипсоид управляющих параметров, для точек, удовлетворяющих неравенству (11). Доказана сходимость последовательности оптимальных значений целевых функций усеченных задач к оптимальному значению исходной. Однако при его применении все зависит от шага перебора по каждой из координатной оси, уменьшая шаг в *2* раза время работы программы увеличивается приблизительно в 2^{2N+1} раз, так как основное время тратится на решение системы (8). Иначе теряем в точности решения. Своеобразное «Curse of Dimensionality». Данный термин введен Беллманом в 1961 году. Современная трактовка см. [27].
Если студент затрудняется привести доказательство сходимости последовательности оптимальных значений целевых

функций усеченных задач к оптимальному значению исходной, то ему разрешается экспериментально «доказать» фундаментальность последовательности оптимальных значений целевых функций усеченных задач, то есть рассмотреть несколько значений N и показать, что при увеличении N разность оптимальных значений целевых функций для соседних N уменьшается (предположительно, стремится к нулю). В этом случае с точки зрения быстродействия разумно брать $4 \leq N \leq 6$. Если программу планируется запускать небольшое количество раз (не нужно делать проверку выдаваемых результатов, например, есть тестовый пример, по которому видно правильно ли работает программа), то N можно увеличить до *8*. Этого достаточно, потому что у гладких функций с возрастанием номера их коэффициенты Фурье уменьшаются довольно-таки быстро.

Численные методы решения задач оптимального управления занимают важное место: в теории оптимизации. Особую роль играют методы, построенные на основе конечномерной аппроксимации посредством разложения соответствующих решений в ряд Фурье, например, [28-30], аналогичная задача ставится в настоящей статье. После изучения теории, студент приступает к написанию программы. В качестве алгоритмического языка для написания программы студенты все чаще выбирают язык программирования Python.

Экспериментальная часть. Алгоритмический язык Python

Python – компьютерный язык программирования, который оптимизирован для обеспечения высокой продуктивности программистов и качества программного обеспечения. Язык программирования Python использует ряд стандартных библиотек, которые позволяют работать с различными математическими объектами, в частности, функциями от матриц [31]. И это дает им преимущество перед языками, которые таких библиотек не используют. Библиотека SciPy с открытым исходным кодом создана для работы с массивами библиотеки NumPy и предоставляет множество удобных и эффективных числовых процедур, предназначенная для выполнения научных и инженерных расчетов. NumPy и SciPy входят в состав семи основных библиотек часто используемых в Python, они «... просты в использовании, но достаточно мощны, чтобы на них могли положиться ведущие мировые ученые и инженеры»[4]. Однако, такие методы нужно использовать аккуратно, имея четкое понимание математических основ, в нашем случае, это связано с неоднозначностью операции извлечения корня из произвольной матрицы. В библиотеке SciPy имеется раздел, связанный с оптимизацией, но поставленная задача не входит в число стандартных, входящих в эту библиотеку.

Библиотека Numpy считается одной из самых популярных библиотек машинного обучения в Python. Она используется для выполнения некоторых операций не только с матрицами, но и с тензорами. Интерфейс массива – это лучшая и самая важная особенность Numpy. Кроме того, библиотеки для Python постоянно пополняются и модифицируются, а некоторые в настоящее время находится в стадии разработки, в том числе в Российской Федерации (СПб, ИТМО) [32].

Экспериментальная часть. Программирование основного меню

Ниже рассматриваются основное меню и скриншоты программы одного из студентов. Программа написана на языке Python. При написании программы требуется обдумать предоставление удобного меню для загрузки основных параметров задачи, а также способ задания начальных функций $\phi(x)$, $\psi(x)$ и функции $Y(x)$. Как правило, выбрав N, их задают через коэффициенты Фурье. А после осуществить вывод оптимального J и коэффициентов Фурье оптимальной управляющей функции $b(x)$ и графика функции $y(x,t)$. При задании функций $\phi(x)$, $\psi(x)$ и $Y(x)$ – программа должна провести автоматический пересчет последнего значимого коэффициента Фурье для того, чтобы выполнялись равенства (3) и $\int_0^l Y^2(x)dx = 1$. В пересчете на коэффициенты Фурье усеченной задачи эти равенства запишутся в виде

$$l\phi_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{N}\phi_k^2 = 1, \quad lY_0^2 + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{N}Y_k^2 = 1,$$

$$l\phi_0\psi_0 + \frac{l}{2}\sum_{k=1}^{N}\phi_k\psi_k = 1 \qquad (13)$$

Чтобы эти равенства были верны, то есть чтобы ввод был правильным в основном меню программы должна быть проверка вводимых коэффициентов Фурье. Для контроля может быть предусмотрена кнопка «Пересчитать коэффициенты». Если коэффициенты какой-то функции введены «с избытком» появляется сообщение об ошибке и предлагается их ввести заново, если «с недостатком», то высчитывается и правильно заполняется последнее значимое окно. Значимые окошки имеют белый фон (например, при *N=4* последние два окна для каждой из функций серого цвета, при *N=6* – все окна белого цвета). Для расчетов необходимо нажать кнопку «Запуск». Скриншот основного меню представлен на рисунке 1.

[4] Руководство пользователя библиотекой SciPy [Электронный ресурс] // The SciPy community. 2021. URL: https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.linalg.expm.html (дата обращения: 16.03.2021).

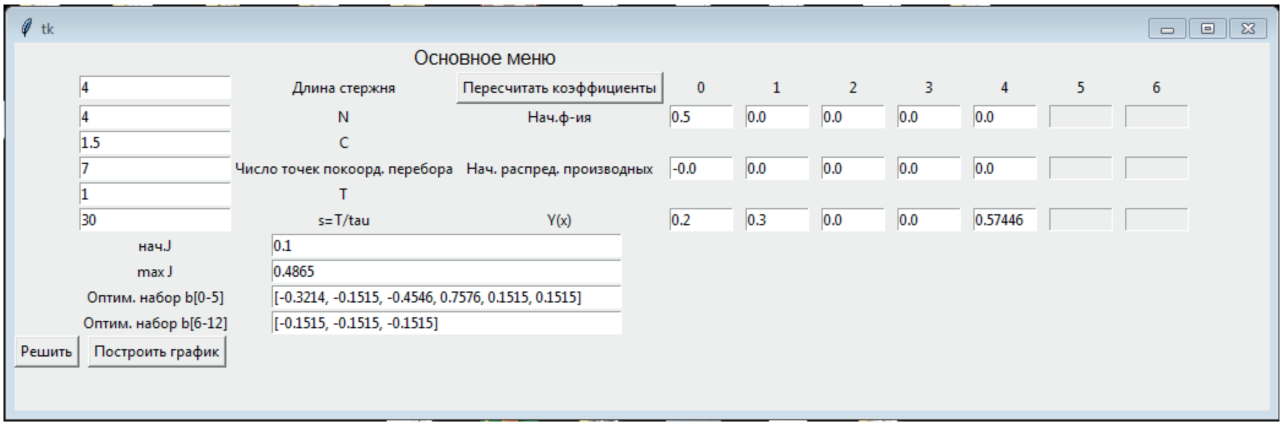

Рис. 1.
Fig. 1.

Экспериментальная часть. Вывод результатов

В конце работы программы после вывода оптимальных *max J* и *b(x)* для получения наглядной информации необходимо нажать кнопку «Построить график». Рисуются сразу три функции. Начальная функция $\phi(x)$ рисуется красным цветом, *Y(x)* – синим, а $\phi(x)$ – черным.

Скриншот вывода графиков функций $\phi(x)$, $Y(x)$ и $y(x,T)$ представлен на рисунке 2.

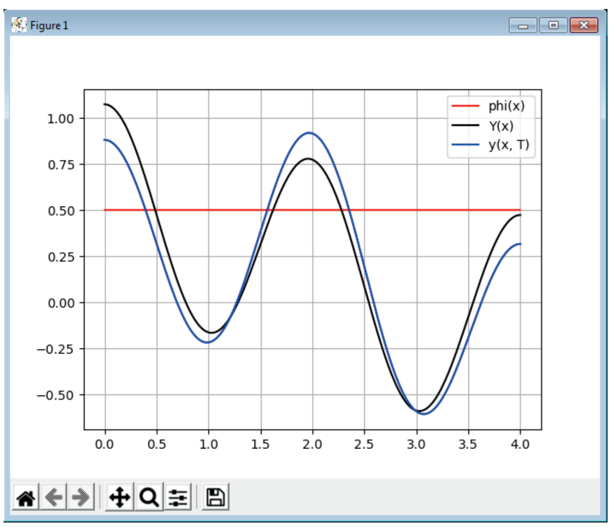

Рис. 2.
Fig. 2.

Оценка проектной деятельности студентов

При оценке выполненного и представленного проекта учитывается степень освоения знаний и умений по следующий общепрофессиональным (ОПК) и профессиональным компетенциям (ПК):

ОПК-2: применение компьютерные/суперкомпьютерные методы, современное программное обеспечение, в том числе отечественного происхождения, для решения задач профессиональной деятельности

ПК-2: применение общенаучных базовых знаний математических и естественных наук, фундаментальной информатики и информационных технологий; применение в профессиональной деятельности современных языков программирования и методов параллельной обработки данных, операционные системы, электронные библиотеки и пакеты программ, сетевые технологии.

ПК-5: использование современных инструментальных и вычислительных средств информационных технологий.

Для удобства преподавателя и прозрачности оценивания применяются оценочные листы следующего вида (Таблица 1):

Таблица 1. **Сформированность компетенций по итогам выполнения проектной работы в рамках курса «Вычислительные методы» направления ФИИТ**

Table 1. **Formation of competencies based on the results of the project work within the framework of the course “Computational Methods” of the direction “Fundamental Informatics and Information Technologies”**

Задания	Компетенции	Обобщенная оценка уровня сформированности компетенции (высокий, средний, низкий)
Решение задачи оптимального управления	ПК-2	*высокий*
Система дифференциальных уравнений	ПК-2	*высокий*
Поиск и применение алгоритма	ОПК-2	*высокий*
Оптимизация алгоритма	ОПК-2	*высокий*
Интерфейс (программирование)	ПК-5	*средний*
Корректность вывода результатов (программирование)	ПК-5	*высокий*
...		

Заключение

В статье показан вариант студенческого проекта по дисциплине «Вычислительные методы» направления 02.03.02 «Фундаментальная информатика и информационные технологии» Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, который позволяет как улучшить свои знания по теоретической части решения дифференциальных уравнений с частными производными и методам оптимизации, так и отточить умения в составлении алгоритма вычислений, написании программы, повысить мастерство оперирования математическими библиотеками и написания различных меню, удобных для пользователя. Для разработки программной реализации алгоритмов рекомендуется современная версия языка Python. Все это в целом, повышает уровень знаний и умений в соответствии с компетенциями образовательного стандарта, а также шансы выпускника найти на рынке IT-вакансий престижное место работы по выбранному направлению.

Список использованных источников

[1] Pohjolainen, S. Modern Mathematics Education for Engineering Curricula in Europe A Comparative Analysis of EU, Russia, Georgia and Armenia / S. Pohjolainen, T. Myllykoski, Ch. Mercat, S. Sosnovsky. – DOI 10.1007/978-3-319-71416-5. – Birkhäuser Basel: Cham Springer International Publishing, 2018. – 196 p.

[2] Gonzales, H. Universities contribution to Bologna Process / H. Gonzales, R. Wangenaar. – Bilbao: University of Deusto, 2008. – 164 p.

[3] Smirnova, E. V. Handbook of Research on Engineering Education in a Global Context / E. V. Smirnova, R. P. Clark. – DOI 10.4018/978-1-5225-3395-5. – University of Warwick, UK: IGI Global, 2018. – 543 p.

[4] Teachers' opinions on quality criteria for Competency Assessment Programs / L. K. J. Baartman, T. J. Bastiaens, P. A. Kirschner, C.P.M. Van der Vleuten. – DOI 10.1016/j.tate.2006.04.043 // Teaching and Teacher Education. – 2007. – Vol. 23, issue 6. – Pp. 857-867.

[5] Гергель, В. П. Разработка образовательного стандарта Нижегородского госуниверситета по направлению «Фундаментальная информатика и информационные технологии» / В. П. Гергель, Е. В. Гугина, О. А. Кузенков // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2010. – Т. 6, № 1. – С. 51-60. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24172758 (дата обращения: 16.03.2021).

[6] Кузенков, О. А. Модернизация математических программ на основе российских и международных стандартов / О. А. Кузенков, И. В. Захарова. – DOI 10.25559/SITITO.14.201801.233-244 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2018. – Т. 14, № 1. – С. 233-244. – Рез. англ.

[7] Бедный, Б. И. Интегрированные программы подготовки научно-педагогических кадров высшей квалификации / Б. И. Бедный, О. А. Кузенков. – DOI 10.15507/1991-9468.089.021.201704.637-650 // Интеграция образования. – 2017. – Т. 21, № 4. – С. 637-650. – Рез. англ.

[8] Захарова, И. В. Опыт реализаций требований образовательных и профессиональных стандартов в области ИКТ в Российском образовании / И. В. Захарова, О. А. Кузенков // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Т. 1761. – С. 17-31. – URL: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper02.pdf (дата обращения: 16.03.2021). – Рез. англ.

[9] Петрова, И. Ю. Ключевые ориентиры для разработки и реализации образовательных программ в предметной области «Информационно-коммуникационные технологии» / И. Ю. Петрова [и др.]; под ред. И. Дюкарева, Е. Караваевой, Е. Ковтун. – Бильбао: Университет Деусто, 2013. – 86 с. – URL: http://www.deusto-publicaciones.es/deusto/pdfs/tuning/tuning37.pdf (дата обращения: 16.03.2021).

[10] Кузенков, О. А. Взаимосвязь между проектом MetaMath и продолжающейся реформой высшего образования в России / О. А. Кузенков, И. В. Захарова // Образовательные технологии и общество. – 2017. – Т. 20, № 3. – С. 279-291. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29438091 (дата обращения: 16.03.2021). – Рез. англ.

[11] Bednyi, A. Modernising educational programmes in ICT based on the Tuning methodology / A. Bednyi, L. Erushkina, O. Kuzenkov. – DOI 10.18543/ tjhe-1(2)-2014pp387-404 // Tuning Journal for Higher Education. – 2014. – Vol. 1, issue 2. – Pp. 387-404.

[12] Кузенков, О. А. Использование методологии TUNING при разработке национальных рамок компетенций в области ИКТ / О. А. Кузенков, В. В. Тихомиров // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2013. – № 9. – С. 77-87. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23020512 (дата обращения: 16.03.2021).

[13] Zakharova, I. V. Using SEFI framework for modernization of requirements system for mathematical education in Russia / I. V. Zakharova [и др.] // Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 – Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016). – Finland: SEFI, 2016. – 15 p. – URL: http://sefibenvwh.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/zakharova-using-sefi-framework-for-modernization-of-requirements-system-for-mathematical-education-155.pdf (дата обращения: 16.03.2021).

[14] Кузенков, О. А. Разработка фонда оценочных средств с использованием пакета Math-Bridge / О. А. Кузенков, Г. В. Кузенкова, Р. С. Бирюков // Образовательные технологии и общество. – 2016. – Т. 19, № 4. – С. 465-478. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27163069 (дата обращения: 16.03.2021).

[15] Опыт разработки образовательных стандартов (в соответствии с ФГОС 3 ++) / О. А. Кузенков, А. В. Грезина, Н. В. Шестакова, С. Н. Карпенко // Образовательные технологии и общество. – 2020. – Т. 23, № 1. – С. 159-169. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41828165 (дата обращения: 16.03.2021).

[16] Egamov, A. I. The Existence and Uniqueness Theorem for Initial-Boundary Value Problem of the Same Class of Integro-Differential PDEs / A. I. Egamov. – DOI 10.1007/978-3-030-37157-9_12 // Network Algorithms, Data Mining,

and Applications. NET 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics; ed. by I. Bychkov, V. Kalyagin, P. Pardalos, O. Prokopyev. – Springer, Cham, 2020. – Vol. 315. – Pp. 173-186.

[17] Эгамов, А. И. Построение минимизирующей последовательности для оптимизационной задачи колебания струны с фазовым ограничением / А. И. Эгамов // Математическое моделирование и суперкомпьютерные технологии: Труды XX Межд. конф.; под ред. В. П. Гергеля. – Нижний Новгород: ННГУ, 2020. – С. 417-423. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44388176 (дата обращения: 16.03.2021).

[18] Кузенков, О. А. Компьютерная поддержка учебно-исследовательских проектов в области математического моделирования процессов отбора / О. А. Кузенков, Г. В. Кузенкова, Т. П. Киселева // Образовательные технологии и общество. – 2019. – Т. 22, № 1. – С. 152-163. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37037790 (дата обращения: 16.03.2021). – Рез. англ.

[19] Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – М.: Наука, 1979. – 799 с.

[20] Владимиров, В. С. Уравнения математической физики / В. С. Владимиров, В. В. Жаринов. – 2-ое изд. – М.: Физматлит, 2004. – 400 с.

[21] Кузенков, О. А. Проектный подход при изучении математического анализа студентами инженерных специальностей / О. А. Кузенков, Е. А. Рябова // Образовательные технологии и общество. – 2019. – Т. 22, № 4. – С. 225-232. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41233717 (дата обращения: 16.03.2021).

[22] Эгамов, А. И. Построение минимизирующей последовательности для задачи охлаждения заданных участков стержня с фазовым ограничением / А. И. Эгамов. – DOI 10.26907/2541-7746.2020.2.193-210 // Ученые записки Казанского университета. Серия: Физико-математические науки. – 2020. – Т. 162, № 2. – С. 193-210. – Рез. англ.

[23] Kouzenkov, O. A. The optimal control for nonlinear distributed system described by an integro-differential equation / O. A. Kouzenkov, A. I. Agamov. – DOI 10.1109/COC.1997.633534 // 1997 1st International Conference, Control of Oscillations and Chaos Proceedings (Cat. No.97TH8329). – Vol. 1. – IEEE Press, St. Petersburg, Russia, 1997. – Pp. 177-178.

[24] Бураго, П. Н. О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения / П. Н. Бураго, А. И. Эгамов. – DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.413-429 // Журнал Средневолжского математического общества. – 2019. – Т.21, № 4. – С.413-429. – Рез. англ.

[25] Скворцов, Л. М. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциально-алгебраических уравнений / Л. М. Скворцов. – М.: ДМК Пресс, 2018. – 230 с.

[26] Kochenderfer, M. J. Algorithms for Optimization / M. J. Kochenderfer, T. A. Wheeler. – Cambridge, MA: The MIT Press, 2018. – 520 p.

[27] The Elements of Statistical Learning / T. Hastie, R. Tibshirani, J. Friedman. – DOI 10.1007/978-0-387-84858-7 // Springer Series in Statistics. – Springer, New York, NY, 2009. – 745 p.

[28] Обобщенный метод моментов в задачах оптимального управления / Ф. П. Васильев, А. З. Ишмухаметов, М. М. Потапов. – М.: Изд-во МГУ, 1989. – 142 с.

[29] Егоров, А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами / А. И. Егоров. – М.: Наука, 1979. – 464 с.

[30] Kuzenkov, O. A. Optimal control of measure dynamics / O. A. Kuzenkov, A. V. Novozhenin. – DOI 10.1016/j.cnsns.2014.08.024 // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. – 2015. – Vol. 21, issues 1-3. – Pp. 159-171.

[31] Harrison, M. Illustrated Guide to Python 3: A Complete Walkthrough of Beginning Python with Unique Illustrations Showing how Python Really Works / M. Harrison. – CreateSpace Independent Publishing Platform, 2017. – 256 p.

[32] Pilnenskiy, N. Feature Selection Algorithms as One of the Python Data Analytical Tools / N. Pilnenskiy, I. Smetannikov. – DOI 10.3390/fi12030054 // Future Internet. – 2020. – Vol. 12, issue 3. – Article 54.

Поступила 16.03.2021; одобрена после рецензирования 21.05.2021; принята к публикации 08.06.2021.

Об авторах:

Эгамов Альберт Исмаилович, доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3630-7237**, albert810@yandex.ru

Приставченко Оксана Викторовна, учебный мастер кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5483-8314**, pristavchenko@unn.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Pohjolainen S., Myllykoski T., Mercat Ch., Sosnovsky S. *Modern Mathematics Education for Engineering Curricula in Europe: A Comparative Analysis of EU, Russia, Georgia and Armenia*. Birkhäuser Basel: Cham Springer International Publishing; 2018. 196 p. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-71416-5

[2] Gonzales H., Wangenaar R. Universities contribution to Bologna Process. Bilbao: University of Deusto; 2008. 164 p. (In Eng.)

[3] Smirnova E.V., Clark R.P. Handbook of Research on Engineering Education in a Global Context. University of Warwick, UK: IGI Global; 2018. 543 p. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.4018/978-1-5225-3395-5

[4] Baartman L.K.J., Bastiaens T. J., Kirschner P.A., Van der Vleuten C.P.M. Teachers' opinions on quality criteria for Competency Assessment Programs. *Teaching and Teacher Education*. 2007; 23(6):857-867. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.04.043

[5] Gergel V.P., Gugina E.V., Kuzenkov O.A. *Razrabotka obrazovatel'nogo standarta Nizhegorodskogo gosuniversiteta po napravleniju "Fundamental'naja informatika i informacionnye tehnologii"* [Development of the Educational Standard of the Nizhny Novgorod State University in the direction of "Fundamental Informatics and Information Technologies"]. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2010; 6(1):51-60. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24172758 (accessed 16.03.2021). (In Russ.)

[6] Kuzenkov O.A., Zakharova I.V. Mathematical Programs Modernization Based on Russian and International Standards. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2018; 14(1):233-244. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201801.233-244

[7] Bednyi B.I., Kuzenkov O.A. Integrated programmes for master's degree and PhD students. *Integratsiya obrazovaniya* = Integration of Education. 2017; 21(4):637-650. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.15507/1991-9468.089.021.201704.637-650

[8] Zakharova I., Kuzenkov O. Experience in implementing the requirements of the educational and professional standards in the field of ICT in Russian Education. *CEUR Workshop Proceedings*. 2016; 1761:17-31. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper02.pdf (accessed 16.03.2021). (In Russ., abstract in Eng.)

[9] Petrova I.Yu. *Kljuchevye orientiry dlja razrabotki i realizacii obrazovatel'nyh programm v predmetnoj oblasti "Informacionno-kommunikacionnye tehnologii"* [Key reference points for development and implementation of educational programs in subject domain "Information and Communication Technologies"]. In: Ed. by I. Djukarev, E. Karavaeva, E. Kovtun. Universitet Deusto, Bilbao; 2013. 86 p. Available at: http://www.deusto-publicaciones.es/deusto/pdfs/tuning/tuning37.pdf (accessed 16.03.2021). (In Russ.)

[10] Kuzenkov O.A., Zakharova I.V. The relationship between the MetaMath project and the ongoing reform of higher education in Russia. *Educational Technology & Society.* 2017; 20(3):279-291. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29438091 (accessed 16.03.2021). (In Russ., abstract in Eng.)

[11] Bednyi A., Erushkina L., Kuzenkov O. Modernising educational programmes in ICT based on the Tuning methodology. *Tuning Journal for Higher Education*. 2014; 1(2):387-404. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.18543/ tjhe-1(2)-2014pp387-404

[12] Kuzenkov O. A., Tikhomirov V.V. *Ispol'zovanie metodologii TUNING pri razrabotke nacional'nyh ramok kompetencij v oblasti IKT* [The use of the TUNING methodology in the development of national competence frameworks in the field of ICT]. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2013; (9):77-87. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23020512 (accessed 16.03.2021). (In Russ.)

[13] Zakharova I.V., et al. Using SEFI framework for modernization of requirements system for mathematical education in Russia. *Proceedings of the 44th SEFI Annual Conference 2016 – Engineering Education on Top of the World: Industry University Cooperation (SEFI 2016).* Finland: SEFI; 2016. 15 p. Available at: http://sefibenvwh.cluster023.hosting.ovh.net/wp-content/uploads/2017/09/zakharova-using-sefi-framework-for-modernization-of-requirements-system-for-mathematical-education-155.pdf (accessed 16.03.2021). (In Eng.)

[14] Kuzenkov O.A., Kuzenkova G.V., Biryukov R.S. *Razrabotka fonda ocenochnyh sredstv s ispol'zovaniem paketa Math-Bridge* [Development of a fund of assessment tools using the Math-Bridge package]. *Educational Technology & Society.* 2016; 19(4):465-478. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27163069 (accessed 16.03.2021). (In Russ.)

[15] Kuzenkov O.A., Grezina A.V., Shestakova N.V., Karpenko S.N. *Opyt razrabotki obrazovatel'nyh standartov (v sootvetstvii s FGOS 3 ++)* [Experience in the development of educational standards (in accordance with the Federal State Educational Standards 3 ++)]. *Educational Technology & Society.* 2020; 23(1):159-169. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41828165 (accessed 16.03.2021). (In Russ.)

[16] Egamov A.I. The Existence and Uniqueness Theorem for Initial-Boundary Value Problem of the Same Class of Integro-Differential PDEs. In: Ed. by I. Bychkov, V. Kalyagin, P. Pardalos, O. Prokopyev. *Network Algorithms, Data Mining, and Applications. NET 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics.* 2020; 315:173-186. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-37157-9_12

[17] Egamov A.I. *Postroenie minimizirujushhej posledovatel'nosti dlja optimizacionnoj zadachi kolebanija struny s fazovym ogranicheniem* [Construction of a minimizing sequence for an optimization problem of oscillating a string with a phase constraint]. In: Ed. by V. P. Gergel. *Proceedings of the XX International Conference on Mathematical modeling and supercomputer technologies.* Nizhny Novgorod: UNN Press; 2020. p. 417-423. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44388176 (accessed 16.03.2021). (In Russ.)

[18] Kuzenkov O., Kuzenkova G., Kiseleva T. Computer support of educational research projects in the field of mathematical modeling of selection processes. *Educational Technology & Society.* 2019; 22(1):152-163. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=37037790 (accessed 16.03.2021). (In Russ., abstract in Eng.)

[19] Tikhonov A.N., Samarskii A.A. Equations of Mathematical Physics. *International Series of Monographs on Pure and Applied Mathematics*, vol. 39. Pergamon Press, Oxford, New York; 1963. 765 p. (In Eng.)

[20] Vladimirov V.S., Zharinov V.V. *Uravneniia matematicheskoi fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Fizmatlit, Moscow; 2004. 398 p. (In Russ.)

[21] Kuzenkov O.A., Ryabova E.A. *Proektnyj podhod pri izuchenii matematicheskogo analiza studentami inzhenernyh special'nostej* [Project approach in the study of mathematical analysis by students of engineering specialties]. *Educational Technology & Society.* 2019; 22(4):225-232. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=41233717 (accessed 16.03.2021). (In Russ.)

[22] Egamov A.I. Construction of a minimizing sequence for the problem of cooling of the given segments of the rod with phase constraint. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*. 2020; 162(2):193-210. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.26907/2541-7746.2020.2.193-210

[23] Kouzenkov O.A., Agamov A.I. The optimal control for nonlinear distributed system described by an integro-differential equation. *1997 1st International Conference, Control of Oscillations and Chaos Proceedings (Cat. No.97TH8329).* IEEE Press, St. Petersburg, Russia; 1997; 1:177-178. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1109/COC.1997.633534

[24] Burago P.N., Egamov A.I. On the connection between solutions of initial boundary-value problems for a some class of integro-differential PDE and a linear hyperbolic equation. *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva* = Middle Volga Mathematical Society Journal. 2019; 21(4):413-429. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201904.413-429

[25] Skvortsov L.M. *Chislennoe reshenie obyknovennyh differencial'nyh uravnenij i differencial'no-algebraicheskih uravnenij* [Numerical solution of ordinary differential equations and differential-algebraic equations]. DMK Press, Moscow; 2018. 230 p. (In Russ.)

[26] Kochenderfer M.J., Wheeler T.A. Algorithms for Optimization. The MIT Press, Cambridge, MA; 2018. 520 p. (In Eng.)

[27] Hastie T., Tibshirani R., Friedman J. The Elements of Statistical Learning. *Springer Series in Statistics*. Springer, New York, NY; 2009. 745 p. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-84858-7

[28] Vasilyev F.P., Ishmukhametov A.Z., Potapov M.M. *Obobshchennyi metod momentov v zadachakh optimal'nogo upravleniya* [Generalized Method of Moments in Optimal Control Problems]. MSU Publ., Moscow; 1989. 142 p. (In Russ.)

[29] Egorov A.I. *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi processami* [Optimal control of thermal and diffusion processes]. Nauka, Moscow; 1979. 464 p. (In Russ.)

[30] Kuzenkov O.A., Novozhenin A.V. Optimal control of measure dynamics. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2015; 21(1-3):159-171. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2014.08.024

[31] Harrison M. Illustrated Guide to Python 3: A Complete Walkthrough of Beginning Python with Unique Illustrations Showing how Python Really Works. CreateSpace Independent Publishing Platform; 2017. 256 p. (In Eng.)

[32] Pilnenskiy N., Smetannikov I. Feature Selection Algorithms as One of the Python Data Analytical Tools. *Future Internet.* 2020; 12(3):54. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.3390/fi12030054

Submitted 16.03.2021; approved after reviewing 21.05.2021; accepted for publication 08.06.2021.

About the authors:

Albert I. Egamov, Associate Professor of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603022, Russian Federation), Ph.D. (Phys.-Math.), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3630-7237**, albert810@yandex.ru

Oksana V. Pristavchenko, Educational Master of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603022, Russian Federation), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5483-8314**, pristavchenko@unn.ru

All authors have read and approved the final manuscript.