

УДК 517.977.5  
DOI: 10.25559/SITITO.17.202102.285-294

Оригинальная статья

## Синтез нелинейного наблюдателя для оценивания динамических сбоев с применением спектральной $H_\infty$ -оптимизации

Я. В. Князькин

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация  
199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9  
yaroslavknyazkin@gmail.com

### Аннотация

В представленной работе рассматривается задача синтеза наблюдателей - фильтров для оценивания воздействия аддитивных динамических сбоев в системах с липщицевой нелинейной частью. За счет выбора параметров асимптотического наблюдателя-фильтра обеспечивается его невосприимчивость к внешнему возмущению, в том числе обладающему известными спектральными свойствами. В основе предложенного метода лежит специальный спектральный подход в частотной области, использующий параметризацию множества передаточных функций замкнутой системы, дробно-рациональную матричную интерполяцию и условие асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия динамики ошибки оценивания. Предложен новый метод аналитического синтеза адаптивного нелинейного наблюдателя для оценивания воздействия динамических сбоев, эффективность которого продемонстрирована на практическом примере - движении морского судна в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью под действием морского волнения. Для проведения имитационного моделирования динамики судна используется среда MATLAB.

**Ключевые слова:** нелинейный наблюдатель, линейно-квадратичный функционал,  $H_\infty$ -оптимизация, оценка сбойного воздействия, спектральный подход, устойчивость

**Финансирование:** исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-07-00531 «Разработка теоретических основ, практических методов и цифровых технологий для решения задач многоцелевого интеллектуального управления подвижными объектами».

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

**Для цитирования:** Князькин, Я. В. Синтез нелинейного наблюдателя для оценивания динамических сбоев с применением спектральной  $H_\infty$ -оптимизации / Я. В. Князькин. – DOI 10.25559/SITITO.17.202102.285-294 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2021. – Т. 17, № 2. – С. 285-294.

© Князькин Я. В., 2021



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Nonlinear Fault Estimation Observer Design Based on Spectral Approach to $H_\infty$ Optimization

Y. V. Knyazkin

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation  
7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation  
yaroslavknyazkin@gmail.com

### Abstract

The presented paper is devoted to the problem of the fault estimation observers design in case of plants with the Lipschitz system nonlinearity. Insensitivity of the observer to external disturbances, including ones with the given spectral properties, is to be guaranteed by the choice of its parameters. The proposed method is based on the special spectral approach in frequency domain, using parametrization of the set of transfer functions of the closed-loop system, Nevanlinna-Pick rational function interpolation and the condition of asymptotic stability of the zero equilibrium position of the estimation error dynamics. A novel approach to analytical synthesis of the adaptive nonlinear fault estimation observer is proposed, and its effectiveness is demonstrated on the practical example – the marine ship horizontal motion with the constant longitudinal speed under the sea waves action. The MATLAB package is used for numerical simulation of the ship dynamics.

**Keywords:** Nonlinear observer, Linear-quadratic functional,  $H_\infty$ -optimization, fault estimation, optimal control, spectral approach, stability

**Funding:** The study was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research within the framework of the scientific project No. 20-07-00531 “Development of Theoretical Foundations, Practical Methods and Digital Technologies for Solving Problems of Multi-Purpose Intelligent Control of Mobile Objects.”

*The author declare no conflict of interest.*

**For citation:** Knyazkin Y.V. Nonlinear Fault Estimation Observer Design Based on Spectral Approach to  $H_\infty$  Optimization. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021; 17(2):285-294. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITI-TO.17.202102.285-294>



## Введение

Постоянный рост сложности управляемых объектов приводит к росту вероятности различных сбоев, которые могут привести к снижению эффективности управления или даже к потере устойчивости. Данные обстоятельства делают задачу обеспечения безопасности и отказоустойчивости критически важной на протяжении нескольких последних десятилетий [1]. Для подавления сбойного воздействия используются различные методы противоаварийного управления (Fault Tolerant Control). Одним из наиболее часто используемых типов такого управления является активное – коррекция закона управления, основанная на оценке в реальном времени воздействия неисправности, генерируемой адаптивным оценивающим наблюдателем (Fault Estimation (FE) observer). Очевидно, что эффективность такого управления напрямую зависит от быстрой и точной оценки сбойного воздействия.

В связи с данными обстоятельствами, задаче оценивания воздействия, вызванного динамическим сбоем, за последние двадцать лет уделялось серьезное внимание, например, в монографиях [2, 3] излагается ее достаточно подробная история. Также следует упомянуть известные исследования [4-9]. В большинстве из них требуемое распределение корней характеристического полинома и значение  $H_\infty$  нормы передаточной функции ошибки оценивания обеспечивается за счет решения системы линейных матричных неравенств. Приведенные практические примеры демонстрируют эффективность таких методов, обеспечивая достаточную скорость и точность обнаружения сбойного воздействия.

Несмотря на сказанное выше, существуют возможности повысить эффективность синтеза, в первую очередь за счет уменьшения вычислительной сложности, что особенно важно в случае использования бортовых систем управления, обладающих ограниченной мощностью, и управлении в режиме реального времени. Это преимущество может быть обеспечено за счет применения специального спектрального подхода к  $H_\infty$ -оптимизации в частотной области, основанного на параметризации, предложенной в [10, 11], и схожего с алгоритмами, представленными в [12-21]. Применение спектральных методов также обеспечивает неединственность решения, позволяющую более гибко настраивать наблюдатель, и получать оценку его эффективности до завершения процедуры синтеза. В дополнение к этому, по аналогии с [22, 23], рассматривается вопрос обеспечения глобальной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия для уравнения ошибки наблюдения с учетом липшицевости их нелинейной компоненты.

Данная работа имеет приведенную ниже структуру. В следующей секции описываются уравнения управляемого объекта, спектральные свойства внешнего возмущения, структура адаптивного наблюдателя-фильтра и формулируется математическая постановка задачи. В Секции 3 изложен спектральный подход к  $H_\infty$ -оптимизации для MIMO (Multiple Input and Multiple Output) систем. В Секции 4 приводится условие асимптотической устойчивости нелинейного наблюдателя. Процесс синтеза наблюдателя для управляемого объекта (морского судна, движущегося в горизонтальной плоскости) и внешнего возмущения с заданными параметрами представлен в

Секции 5. Наконец, в Секции 6 обсуждаются результаты исследования, достоинства и недостатки предложенного подхода и упоминаются некоторые направления дальнейших исследований.

## Постановка задачи

Рассмотрим объект, представленный системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{f} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) + \mathbf{h}d(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

где  $\mathbf{x} \in R^{n_0}$  – вектор состояния объекта,  $\mathbf{u} \in R^{n_r}$  – управляющий сигнал,  $d$  – внешнее возмущение (для простоты предполагаемое скалярным),  $\mathbf{f} \in R^{n_f}$  – сбойное воздействие,  $\mathbf{y} \in R^m$  – измеряемый сигнал,  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f})$  – заданная нелинейная липшицева функция с константой Липшица  $\lambda$ , т.е.

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}_1, \mathbf{f}_1) - \mathbf{g}(\mathbf{x}_2, \mathbf{u}_2, \mathbf{f}_2)\| \leq \lambda \|\tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_1\|, \quad (2)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = (\mathbf{x}_1^T \mathbf{u}_1^T \mathbf{f}_1^T)^T, \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = (\mathbf{x}_2^T \mathbf{u}_2^T \mathbf{f}_2^T)^T,$$

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^{n_0}, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in R^{n_r}, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \in R^{n_f}.$$

Предполагается, что все компоненты матриц  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{E}, \mathbf{H}$  – известные постоянные величины, а также то, что пары  $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$  и  $\{\mathbf{A}, \mathbf{C}\}$  являются наблюдаемыми и управляемыми соответственно.

Внешнее возмущение  $d(t)$  рассматривается как выход формирующего фильтра с заданной передаточной функцией  $S_0(s)$

$$d(t) = S_0(s)i_0(s), \quad (3)$$

$$S_0(s) = N_d(s) / T_d(s),$$

где  $N_d(s), T_d(s)$  – Гурвицевы полиномы, а частотные свойства сигнала  $i_0$  полностью неизвестны. Передаточная функция  $S_0(s)$  может быть представлена в пространстве состояний следующим образом:

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{A}_d \mathbf{x}_d + \mathbf{b}_d i_0, \quad (4)$$

$$d = \mathbf{c}_d \mathbf{x}_d + d_d i_0,$$

$$\text{где } \mathbf{x}_d \in R^{n_s}.$$

Величина сбойного возмущения  $\mathbf{f}(t)$  оценивается при помощи адаптивного наблюдателя-фильтра, имеющего вид

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\hat{\mathbf{f}} + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}}) + \mathbf{h}\mathbf{c}_d \hat{\mathbf{x}}_d + \mathbf{v}_x,$$

$$\dot{\hat{\mathbf{f}}} = \mathbf{v}_f,$$

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}_d = \mathbf{A}_d \hat{\mathbf{x}}_d + \mathbf{v}_d, \quad (5)$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}},$$

$$\mathbf{v}_x(s) = \mathbf{L}_x(s)(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}), \quad \mathbf{v}_f(s) = \mathbf{L}_f(s)(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}),$$

$$\mathbf{v}_d(s) = \mathbf{L}_d(s)(\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}),$$

где  $\frac{1}{s}, \frac{1}{s^2}, \frac{1}{s^3}$  – корректирующие сигналы, а  $\mathbf{L}_x(s), \mathbf{L}_f(s)$  и  $\mathbf{L}_d(s)$  – передаточные матрицы, которые требуется найти в процессе синтеза. Введем обозначения  $\mathbf{e}_x = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{e}_y = \mathbf{C}\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_f = \mathbf{f} - \hat{\mathbf{f}}, \mathbf{e}_{x_d} = \mathbf{x}_d - \hat{\mathbf{x}}_d$  и рассмотрим поведение ошибки оценивания



$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{e}_x + \mathbf{E}\mathbf{e}_f + \mathbf{h}\mathbf{c}_d\mathbf{e}_{x_d} + \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) - \\ &- \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}}) - \mathbf{v}_x + \mathbf{h}\mathbf{d}_d i_0, \\ \dot{\mathbf{e}}_f &= -\mathbf{v}_f + \dot{\mathbf{f}}, \\ \dot{\mathbf{e}}_{x_d} &= \mathbf{A}_d\mathbf{e}_{x_d} + \mathbf{b}_d i_0 - \mathbf{v}_d, \\ \mathbf{v}_x(s) &= \mathbf{L}_x(s)\mathbf{e}_y, \mathbf{v}_f(s) = \mathbf{L}_f(s)\mathbf{e}_y, \mathbf{v}_d(s) = \mathbf{L}_d(s)\mathbf{e}_y, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{A}} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{E} & \mathbf{h}\mathbf{c}_d \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_d \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} d_d\mathbf{h} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_f \\ \mathbf{b}_d & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{L}} = \begin{pmatrix} \mathbf{L}_x \\ \mathbf{L}_f \\ \mathbf{L}_d \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_f \\ \mathbf{x}_d \end{pmatrix}, \\ \hat{\mathbf{x}} &= \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{f}} \\ \hat{\mathbf{x}}_d \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) \\ \mathbf{0}_{n_f \times 1} \\ \mathbf{0}_{n_d \times 1} \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_x \\ \mathbf{v}_f \\ \mathbf{v}_d \end{pmatrix}, \bar{\mathbf{d}} = \begin{pmatrix} i_0 \\ \mathbf{f} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{A}_f^{ij} &= \begin{cases} 0, & \text{если } i \neq j, \\ \max |f_i|, & \text{если } i = j, \end{cases} \\ \bar{\mathbf{C}} &= (\mathbf{C} \quad \mathbf{0}_{m \times n_f} \quad \mathbf{0}_{m \times n_d}), \bar{\mathbf{e}} \in R^n, \mathbf{C}_f = (\mathbf{0}_{n_f \times n_0} \quad \mathbf{I}_{n_f} \quad \mathbf{0}_{n_f \times n_s}), \end{aligned}$$

где перепишем (5) в более краткой форме:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{e}}} &= \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{e}} - \mathbf{v} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) - \bar{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}}) + \bar{\mathbf{H}}\bar{\mathbf{d}}, \\ \mathbf{e}_y &= \bar{\mathbf{C}}\bar{\mathbf{e}}, \mathbf{v} = \bar{\mathbf{L}}(s)\mathbf{e}_y. \end{aligned} \quad (7)$$

Аналогично [2], сформируем функционал, характеризующий чувствительность наблюдателя (5) к внешнему возмущению и скорость его реакции на изменение сбойного воздействия  $\mathbf{f}$  со временем

$$J = J(\bar{\mathbf{L}}(s)) = \|\mathbf{F}_{e,\bar{\mathbf{d}}}(s)\|_{\infty}^2, \quad (8)$$

где  $\mathbf{F}_{e,\bar{\mathbf{d}}}(s)$  – передаточная матрица от  $\bar{\mathbf{d}}$  к  $\mathbf{e}_f$

$$\mathbf{F}_{e,\bar{\mathbf{d}}}(s) = \mathbf{C}_f (s\mathbf{I} - \bar{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{L}}\bar{\mathbf{C}})^{-1} \bar{\mathbf{H}},$$

и задачу его минимизации

$$J \rightarrow \min_{\bar{\mathbf{L}} \in \bar{\mathcal{L}}}, \quad (9)$$

где  $\bar{\mathcal{L}}$  – множество передаточных матричных функций  $\bar{\mathbf{L}}(s)$ , обеспечивающих асимптотическую устойчивость нелинейной замкнутой системы (7), вопрос которой будет затронут ниже. Рассмотрим вспомогательную линейную стационарную систему

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_1 &= \mathbf{A}_1\mathbf{x}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{u}_1 + \mathbf{H}_1\mathbf{d}_1, \\ \mathbf{e}_1 &= \mathbf{C}_1\mathbf{x}_1, \\ \mathbf{u}_1 &= \mathbf{W}(s)\mathbf{x}_1, \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\mathbf{A}_1 = \bar{\mathbf{A}}^T$ ,  $\mathbf{B}_1 = -\bar{\mathbf{C}}^T$ ,  $\mathbf{H}_1 = \mathbf{C}_f^T$ ,  $\mathbf{W}(s) = \bar{\mathbf{L}}^T(s)$ ,  $\mathbf{C}_1 = \bar{\mathbf{H}}^T$ . Управляющий сигнал  $\mathbf{u}_1$  формируется при помощи регулятора, имеющего вид

$$\mathbf{u}_1 = \bar{\mathbf{L}}^T(s)\mathbf{x}_1 = \mathbf{W}(s)\mathbf{x}_1 = \mathbf{W}_2^{-1}(s)\mathbf{W}_1(s)\mathbf{x}_1. \quad (11)$$

Несложно заметить, что

$$\mathbf{F}_{e,\bar{\mathbf{d}}}(s) = \mathbf{C}_1 (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1\mathbf{W}(s))^{-1} \mathbf{H}_1 = \mathbf{F}_{e,\bar{\mathbf{d}}}^T,$$

что позволяет решить задачу (9) с применением спектрального подхода к  $H_{\infty}$ -оптимизации, представленного в [20]. В соот-

ветствии с ним рассмотрим передаточные функции замкнутой системы (10), (11)

$$\mathbf{F}_{x_1}(s) = (\mathbf{I}s - \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{W})^{-1} \mathbf{H}_1, \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_{u_1}(s) = \mathbf{W}(\mathbf{I}s - \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\mathbf{W})^{-1} \mathbf{H}_1,$$

и введем вспомогательную передаточную функцию  $F_0(s)$ , такую что

$$\mathbf{F}_0(-s)\mathbf{F}_0(s) = \mathbf{F}_{x_1}^T(-s)\mathbf{R}\mathbf{F}_{x_1}(s) + k^2\mathbf{F}_{u_1}^T(s)\mathbf{Q}\mathbf{F}_{u_1}(s),$$

где  $\mathbf{R} = \bar{\mathbf{H}}_1^T\bar{\mathbf{H}}_1$ , заданное малое положительное число, а  $\mathbf{Q}$  – положительно определенная симметричная матрица, например единичная. Рассмотрим среднеквадратичный функционал

$$\tilde{J}(\mathbf{W}) = \|\mathbf{F}_0(s, \mathbf{W})\mathbf{S}_1(s)\|_{\infty}^2, \quad (13)$$

где  $\mathbf{S}_1(s)$  – передаточная матрица формирующего фильтра сигнала  $\mathbf{d}_1$ , которая предполагается единичной  $\mathbf{S}_1(s) = T_{d_1}^{-1}\mathbf{N}_{d_1} = \mathbf{I}$ , но может быть деформирована [15], для обеспечения нужных свойств замкнутой системы. Очевидно, что  $\tilde{J}(\mathbf{W}) \xrightarrow{k \rightarrow 0} J(\mathbf{W}^T)$  и задача синтеза наблюдателя (5), обеспечивающего минимальное значение (8), эквивалентна задаче минимизации  $\tilde{J}(\mathbf{W})$

$$\tilde{J}(\mathbf{W}) \rightarrow \min_{\mathbf{W} \in \Omega_{\mathbf{W}}}, \quad (14)$$

где  $\Omega_{\mathbf{W}}$  – регуляторов (10), стабилизирующих объект (10).

## Спектральный подход к $H_{\infty}$ оптимизации для МИМО систем

Для решения задачи (14) с помощью спектрального подхода, изложенного в [12], перепишем функционал (13) в частотной области, используя обозначения (12)

$$\tilde{J} = \frac{1}{j\pi} \int_0^{j\infty} \text{tr} \{ \mathbf{S}_1^*(s) [\mathbf{F}_{x_1}^T(-s)\mathbf{R}\mathbf{F}_{x_1}(s) + k^2\mathbf{F}_{u_1}^T(-s)\mathbf{Q}\mathbf{F}_{u_1}(s)] \mathbf{S}_1(s) \} ds, \quad (15)$$

Учитывая сложную нелинейную зависимость функционала  $\tilde{J}$  от  $\mathbf{W}(s)$  и его среднеквадратичную зависимость от дробно-рациональных функций  $\mathbf{F}_{x_1}(s)$ ,  $\mathbf{F}_{u_1}(s)$  (11), введем параметризацию, предложенную в [10]. Введём в рассмотрение матричную дробно-рациональную функцию-параметр  $\Phi(s)$ , аналитическую в замкнутой правой полуплоскости.

$$\Phi(s) = \alpha(s)\mathbf{F}_{x_1}(s) + \beta(s)\mathbf{F}_{u_1}(s), \quad (16)$$

где  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  –  $(m \times n)$  и  $(m \times m)$  полиномиальные матрицы. Значение параметра  $\Phi(s)$  характеризует связь между передаточными функциями  $\mathbf{F}_{x_1}(s)$ ,  $\mathbf{F}_{u_1}(s)$  и однозначно соответствует паре  $\{\mathbf{F}_{x_1}(\Phi(s)), \mathbf{F}_{u_1}(\Phi(s))\}$ . Выбор параметров  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  может быть осуществлен в соответствии с подходом, предложенным в [10]:

$$\alpha(s) = \alpha_0 = \frac{1}{k^2} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{B}_1^T \mathbf{S}, \quad \beta(s) = \beta_0 = \mathbf{I}, \quad (17)$$

где  $\mathbf{S}$  – решение уравнения Риккати

$$\mathbf{S}\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_1^T \mathbf{S} - \frac{1}{k^2} \mathbf{S}\mathbf{B}_1\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{B}_1^T \mathbf{S} + \mathbf{R} = 0. \quad (18)$$

После этого введем дополнительные обозначения

$$\Theta(s) = A_s(s)\beta(s) + \alpha(s)\mathbf{B}_{1s}(s),$$

$$\mathbf{B}_{1s}(s) \equiv A_s(s)(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{B}_1,$$

$$\mathbf{H}_{1s}(s) \equiv A_s(s)(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)^{-1} \mathbf{H}_1, \quad \mathbf{P}(s) \equiv (s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1),$$



перепишем уравнения (9) в частотной области:

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1)\mathbf{F}_{x_1} - \mathbf{B}_1\mathbf{F}_{u_1} = \mathbf{H}_1,$$

и выразим из них  $\mathbf{F}_{x_1}$ ,  $\mathbf{F}_{u_1}$ , используя формулы (17)-(18)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F}_{x_1} \\ \mathbf{F}_{u_1} \end{pmatrix} = \mathbf{M}_\Phi^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \Phi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M}_\Phi = \begin{pmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 & -\mathbf{B}_1 \\ \alpha_0 & \beta_0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Применяя формулу Фробениуса для вычисления обратной матрицы  $\mathbf{M}_\Phi^{-1}(s)$  и принимая во внимание равенство

$$\begin{aligned} (\beta(s) + \alpha(s)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1)^{-1} &= A_s(s)(A_s(s)\beta(s) + \\ &+ \alpha(s)\mathbf{B}_1(s))^{-1} = A_s\Theta^{-1}(s), \end{aligned}$$

получим обратную матрицу  $\mathbf{M}_\Phi^{-1}$

$$\mathbf{M}_\Phi^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}^{-1} - \mathbf{B}_{1s}(s)\Theta^{-1}(s)\alpha(s)\mathbf{P}^{-1} & \mathbf{B}_{1s}(s)\Theta^{-1}(s) \\ -A_s(s)\Theta^{-1}(s)\alpha(s)\mathbf{P}^{-1} & A_s(s)\Theta^{-1}(s) \end{pmatrix},$$

после подстановки которой в (18) получим выражение  $\mathbf{F}_{x_1}(s)$ ,  $\mathbf{F}_{u_1}(s)$  как функций параметра  $\Phi(s)$ :

$$\mathbf{F}_{x_1}(\Phi) = \mathbf{H}_s(s) / A_s(s) + \mathbf{B}_{1s}(s)\Theta^{-1}(s)(\Phi - \alpha_0\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}_1), \quad (20)$$

$$\mathbf{F}_{u_1}(\Phi) = A_s(s)\Theta^{-1}(s)(\Phi - \alpha_0\mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}_1).$$

После этого, используя обозначения

$$\mathbf{B}_{1s} = D_{1s}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\alpha_0)^{-1}\mathbf{B}_1,$$

$$D_{1s} = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1\alpha_0),$$

преобразуем передаточную функцию  $\Theta^{-1}(s)$  следующим образом

$$\Theta^{-1}(s) = (\alpha_0\mathbf{B}_{1s} + \mathbf{I}A_{1s})^{-1} = A_{1s}^{-1}\mathbf{I} - A_{1s}^{-1}\alpha_0(\mathbf{B}_{1s}\alpha_0 +$$

$$+ \mathbf{I}A_{1s})^{-1}\mathbf{B}_{1s} = A_{1s}^{-1}\mathbf{I} - A_{1s}^{-1}\alpha_0(\mathbf{I} + \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1\alpha_0)^{-1}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}_1 =$$

$$= A_{1s}^{-1}\mathbf{I} - A_{1s}^{-1}\alpha_0(\mathbf{P} + \mathbf{B}_1\alpha_0)^{-1}\mathbf{B}_1 = A_{1s}^{-1}\mathbf{I} -$$

$$-A_{1s}^{-1}\alpha_0 D_{1s}^{-1}\mathbf{B}_{1s} = \frac{1}{A_{1s}D_{1s}}(D_{1s}\mathbf{I} - \alpha_0\mathbf{B}_{1s}),$$

а также упомянем равенства, доказанные в [10], в соответствии с которыми при выборе параметров  $\alpha(s)$ ,  $\beta(s)$  в соответствии с формулами (17), (18)

$$\Theta_*^{-1}(\mathbf{B}_{1s}^*\mathbf{R}\mathbf{B}_{1s} + k^2\mathbf{Q}A_s^*A_s)\Theta^{-1} = k^2\mathbf{Q},$$

$$(k\sqrt{\mathbf{Q}})^{-1} \sim^{-1} [\mathbf{B}_{1s}^*\mathbf{R} - (\mathbf{B}_{1s}^*\mathbf{R}\mathbf{B}_{1s} +$$

$$+ k^2\mathbf{Q}A_s^*A_s) \sim^{-1} \pm_0] \mathbf{P}^{-1}\mathbf{H}_1 =$$

$$= (k\sqrt{\mathbf{Q}})^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{P} + \mathbf{B}_1\pm_0)^{-1} \mathbf{S}\mathbf{H}_1,$$

существенно упрощающие последующие выкладки.

С учетом изложенных выше соображений, представим подынтегральное выражение в (15) как функцию параметра  $\Phi(s)$ ,

$$\mathbf{F}_0^*\mathbf{F}_0 \equiv (\mathbf{T}_1^* + \mathbf{T}_2^*)(\mathbf{T}_1 + \mathbf{T}_2) + \mathbf{T}_3, \quad (21)$$

$$\mathbf{T}_1(s) = (k\sqrt{\mathbf{Q}})^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{P} + \mathbf{B}_1\pm_0)^{-1} \mathbf{S}\mathbf{H}_1,$$

$$\mathbf{T}_2(s) = k\sqrt{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{T}_3(s) = \text{tr}[\mathbf{H}_{1s}^*\mathbf{R}\mathbf{H}_{1s} / A_{1s}A_{1s}^* -$$

$$- \mathbf{H}_{1s}^*\mathbf{R}\mathbf{B}_{1s} \sim^{-1} (k^2\mathbf{Q})^{-1} \sim^{-1} \mathbf{B}_{1s}^*\mathbf{R}\mathbf{H}_{1s}].$$

Очевидно, что слагаемое  $\mathbf{T}_3(s)$  не зависит от значения параметра  $\Phi(s)$ , следовательно, значение

$$J_a = \max_{\omega \in [0, \infty)} (\text{tr}\{\mathbf{S}_1^*(j\omega)\mathbf{T}_3(j\omega)\mathbf{S}_1(j\omega)\}) =$$

$$= \text{tr}\{\mathbf{S}_1^*(j\omega_0)\mathbf{T}_3(j\omega_0)\mathbf{S}_1(j\omega_0)\}, \quad (22)$$

$$\omega_0 = \arg \max \text{tr}\{\mathbf{S}_1^*(j\omega)\mathbf{T}_3(j\omega)\mathbf{S}_1(j\omega)\},$$

может рассматриваться как нижняя граница значения функционала (15) и задача (14) может быть сведена к поиску значения параметра  $\Phi(s)$  обеспечивающего выполнение неравенства

$$\tilde{J}(\Phi) \leq \rho^2, \quad \rho^2 = J_a + \varepsilon, \quad (23)$$

где  $\varepsilon$  – неотрицательное вещественное число. Очевидно, что минимальное значения  $\tilde{J}(\Phi)$  определяется следующим образом:

$$\tilde{J}_0(\Phi(s)) = \min_{\Phi \in \Omega_\Phi} \{ \rho^2 : \exists \Phi \in \Omega_\Phi : \forall \omega \in [0, \infty)$$

$$\|(\mathbf{T}_1(j\omega) + \mathbf{T}_2(j\omega)\Phi(j\omega))\mathbf{S}_1(j\omega)\|^2 +$$

$$+ \text{tr}(\mathbf{S}_1^*(j\omega)\mathbf{T}_3(j\omega)\mathbf{S}_1(j\omega)) \leq \rho^2 \}.$$

Перепишем выражение (23) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{T}_1(j\omega) + \mathbf{T}_2(j\omega)\Phi(j\omega))\mathbf{S}_1(j\omega)\|^2 \leq \rho^2 - \\ - \text{tr}(\mathbf{S}_1^*(j\omega)\mathbf{T}_3(j\omega)\mathbf{S}_1(j\omega)), \end{aligned}$$

после чего введем в рассмотрение полином  $R_\rho(s)$ , и передаточную функцию  $\tilde{L}(s)$ , определяемые формулами

$$\frac{R_\rho(s)R_\rho(-s)}{D_s D_s^* T_{d_1} T_{d_1}^*} = \rho^2 - \text{tr}(\mathbf{S}_1^*(s)\mathbf{T}_3(s)\mathbf{S}_1(s)) \quad (24)$$

$$\tilde{L}(s) = \frac{D_s T_{d_1}}{R_\rho} \cdot \frac{D_s^*}{D_s},$$

и перейдем к соотношению

$$\|(\mathbf{T}_1(s) + \mathbf{T}_2(s)\Phi(s))\mathbf{S}_1(s)\tilde{L}(s)\|_\infty^2 \leq 1. \quad (26)$$

Рассмотрим выражение  $\mathbf{Z}(s)$  под знаком нормы в (26)

$$\mathbf{Z}(s) = (\mathbf{T}_1(s) + \mathbf{T}_2(s)\Phi(s))\mathbf{S}_1(s) \frac{D_s^* T_{d_1}}{R_\rho(s)} =$$

$$= \left[ (k\sqrt{\mathbf{Q}})^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{P} + \mathbf{B}_1\alpha_0)^{-1} \mathbf{S}\mathbf{H}_1 + k\sqrt{\mathbf{Q}}\Phi \right] \frac{D_s^* \mathbf{N}_{d_1}}{R_\rho},$$

несложно заметить, что в точках  $s = d_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ), таких что  $D_s(-d_i) = 0$ , коэффициент перед параметром  $\Phi(s)$  обращается в нуль, что позволяет вычислить значения  $\mathbf{Z}(d_i)$

$$\mathbf{Z}_i = (k\sqrt{\mathbf{Q}})^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{P} + \mathbf{B}_1\pm_0)^{-1} \mathbf{S}\mathbf{H}_1 \frac{D_s^* \mathbf{N}_{d_i}}{R_\rho} \Big|_{s=d_i}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (27)$$

Таким образом, исходная задача (14) сводится к поиску устойчивой передаточной матрицы  $\mathbf{Z}(s)$ , удовлетворяющей следующим условиям

$$\|\mathbf{Z}(s)\|_\infty^2 \leq 1, \quad \mathbf{Z}(g_i) = \mathbf{Z}_i, \quad i = \overline{1, n}, \quad (28)$$

т.е. к решению матричного варианта задачи Неванлинны-Пика [24, 25]. Запишем условие существования решения поставленной задачи: матрица  $\mathbf{Z}(s)$  с дробно-рациональными элементами, интерполирующая множество  $\langle d_i, \mathbf{Z}_i \rangle$ , аналитическая в замкнутой правой полуплоскости и удовлетворяющая условию (27) существует тогда и только когда матрица Пика





$$\Lambda = \{\Lambda_{i,j}\}, \Lambda_{i,j} = \left[ \frac{\mathbf{I} - \mathbf{Z}_i^H \mathbf{Z}_j}{\bar{d}_i + d_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n}, \quad (29)$$

неотрицательно определена, т.е. ее минимальное собственное число  $q_n \geq 0$ . Приведем один из способов решения задачи (27): введем обозначения

$$\mathbf{C}_- = [\mathbf{I}_{n_f} \ \mathbf{I}_{n_f} \ \dots \ \mathbf{I}_{n_f}], \quad (30)$$

$$\mathbf{C}_+ = [\mathbf{Z}_1 \ \mathbf{Z}_2 \ \dots \ \mathbf{Z}_n], \text{ и} \quad (31)$$

$$\mathbf{A}_\pi = \begin{bmatrix} d_1 \mathbf{I}_{n_f} & \mathbf{0}_{n_f} & \mathbf{0}_{n_f} \\ \mathbf{0}_{n_f} & \ddots & \mathbf{0}_{n_f} \\ \mathbf{0}_{n_f} & & d_n \mathbf{I}_{n_f} \end{bmatrix}, \quad (32)$$

а также блочную матричную передаточную функцию

$$\Xi(s) = \mathbf{I}_{m+n_f} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_+ \\ \mathbf{C}_- \end{bmatrix} (s\mathbf{I}_{n-n_f} - \mathbf{A}_\pi)^{-1} \Lambda^{-1} [-\mathbf{C}_+^H \ \mathbf{C}_-^H]^T, \quad (33)$$

после чего представим множество решений задачи (27) в виде  $\mathbf{Z}(s) = [\Xi_{1,1}(s)\Psi(s) + \Xi_{1,2}(s)][\Xi_{2,1}(s)\Psi(s) + \Xi_{2,2}(s)]^{-1}$ , (34) где  $\Psi(s) - m \times n_f$  устойчивая передаточная матрица, удовлетворяющая условию

$$\|\Psi(s)\|_\infty \leq 1.$$

Вычислив передаточную матрицу  $\mathbf{Z}_0(s) = \mathbf{Z}_{01}(s) / \mathbf{Z}_{02}(s)$ , удовлетворяющую условиям (27) для выбранного параметра  $\rho$ , выразим из равенства (26) соответствующее ему значение параметра  $\Phi_0(s)$  (16):

$$\Phi_0(s) = (k\sqrt{\mathbf{Q}})^{-1} \frac{\mathbf{Z}_1(s)}{\mathbf{Z}_2(s)} \left( \frac{\mathbf{N}_{d_1}(s) D_s^*}{R_p(s)} \right)^{-1} - (k^2 \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{B}_1^T (\mathbf{P} + \mathbf{B}_1 \alpha_0)^{-1} \mathbf{S} \mathbf{H}_1. \quad (35)$$

Учитывая условия интерполяции (27), несложно проверить что деление на полином  $D_s(-s)$  в (34) осуществляется нацело. Подставив полученное значение  $\Phi_0(s)$  в (21), получим передаточные функции оптимальной замкнутой системы (10), (11):

$$\mathbf{F}_{x_1}(\Phi_0) = \mathbf{H}_{1s}(s) / A_{1s}(s) + \quad (36)$$

$$+ \mathbf{B}_{1s}(s) \Theta^{-1}(s) (\Phi_0 - \alpha_0 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{H}_1),$$

$$\mathbf{F}_{u_1}(\Phi_0) = A_{1s}(s) \Theta^{-1}(s) (\Phi_0 - \alpha_0 \mathbf{P}^{-1} \mathbf{H}_1).$$

после чего вычислим передаточную матрицу оптимального регулятора  $\mathbf{W}_0(s) = \mathbf{W}_{02}^{-1}(s) \mathbf{W}_{01}(s)$  как решение матричного полиномиального уравнения

$$\mathbf{W}_{02}(s) \mathbf{F}_{u_1}(s) - \mathbf{W}_{01}(s) \mathbf{F}_{x_1}(s) = \mathbf{0}. \quad (37)$$

Наконец, получим оптимальную передаточную матрицу  $\tilde{\mathbf{L}}_0(s) = \mathbf{W}_0^T(s)$ . (38)

**Замечание 3.1.** Отметим, что при использовании данного подхода элементы передаточных матриц оптимальной замкнутой системы (36) могут не оказаться строго правильными дробно-рациональными функциями. В этом случае динамика замкнутой системы не может быть обеспечена при помощи регулятора, представимого в виде правильной дробно-рациональной функции. Данная сложность может быть преодолена при помощи деформации спектральной плотности внешнего возмущения (3), т.е. использованием вместо  $\mathbf{S}_1(s)$  передаточной матрицы  $\tilde{\mathbf{S}}_1(s) = T_{d_1}^{-1} \tilde{\mathbf{N}}_{d_1}(s)$ , где

$$\tilde{\mathbf{N}}(s) = \mathbf{N}(s) \hat{\mathbf{N}}(s),$$

где  $\hat{\mathbf{N}}(s)$  – полиномиальная матрица размерности  $n_f \times n_f$ , такая, что  $\det(\hat{\mathbf{N}}(s))$  – Гурвицев полином.

**Замечание 3.2.** В соответствии с известными свойствами полиномиальных уравнений [26, 27], решение системы (37) не единственно. Следует отметить, что характеристический полином  $\Delta(s)$  замкнутой системы, соответствующий параметру  $\Phi(s)$ , имеет вид

$$\Delta(s) = \tilde{\Delta}(s) C_0(s),$$

где  $C_0(s)$  – общий множитель числителей и знаменателей элементов передаточных матриц  $\mathbf{F}_{x_1}(s)$ ,  $\mathbf{F}_{u_1}(s)$ . Как упоминается в [13], возможна ситуация, когда корни  $C_0(s)$  лежат в правой полуплоскости, приводящая к потере устойчивости. Простейший способ избежать ее – выбрать минимальный порядок регулятора (11), при котором  $C_0(s) \equiv 1$ .

## Обеспечение асимптотической устойчивости нелинейного наблюдателя

Предположив, что передаточная матрица  $\mathbf{L}_0(s)$ , полученная в предыдущем разделе, имеет минимальную реализацию в пространстве состояний  $[\mathbf{A}_L, \mathbf{B}_L, \mathbf{C}_L, \mathbf{D}_L]$ , и учитывая наличие нелинейной составляющей, перепишем уравнения (6) в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{\tilde{\mathbf{e}}} \\ \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \mathbf{D}_L \bar{\mathbf{C}} & -\mathbf{C}_L \\ \mathbf{B}_L \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{A}_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{x}}_L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{H}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \bar{\mathbf{d}},$$

что, в свою очередь, эквивалентно  $\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) - \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}}) + \tilde{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{d}}$ , где (39)

$$\tilde{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}} \\ \tilde{\mathbf{x}}_L \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{H}} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) \\ \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}} - \mathbf{D}_L \bar{\mathbf{C}} & -\mathbf{C}_L \\ \mathbf{B}_L \bar{\mathbf{C}} & \mathbf{A}_L \end{pmatrix}.$$

После этого сформулируем условие устойчивости нелинейного наблюдателя (6).

**Теорема 1.** Если для заданной передаточной матрицы  $\mathbf{L}_0(s)$ , обеспечивающей гурвицевость характеристического полинома матрицы  $\tilde{\mathbf{A}}$  в (38), выполняется неравенство

$$\frac{\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{R}})}{2\sigma_{\max}(\tilde{\mathbf{P}})} > \lambda', \quad (40)$$

где  $\sigma$  – собственные числа, а  $\tilde{\mathbf{P}}$  – решение уравнения Ляпунова

$$\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}} = -\tilde{\mathbf{R}} \quad (41)$$

для заданной положительно определенной симметричной матрицы  $\tilde{\mathbf{R}}$ , то нулевое положение равновесия в уравнении (38) для ошибки наблюдения является глобально асимптотически устойчивым.

**Доказательство.** Перепишем уравнение (40) для ошибки наблюдения в виде

$$\dot{\tilde{\mathbf{e}}} = \tilde{\mathbf{A}} \tilde{\mathbf{e}} + \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) - \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}}), \quad (42)$$

и на его движениях рассмотрим квадратичную форму  $V(\tilde{\mathbf{e}}) = \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}}$  с положительно определенной симметричной матрицей  $\tilde{\mathbf{P}}$ , удовлетворяющей матричному уравнению (41). Заметим, что при указанных выше условиях такая матрица существует и является единственной. Рассмотрим производную функции  $V$  по времени на движении (41)

$$\begin{aligned} W(\tilde{\mathbf{e}}) &= \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}})_{(41)} = \tilde{\mathbf{e}}^T (\tilde{\mathbf{A}}^T \tilde{\mathbf{P}} + \tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{A}}) \tilde{\mathbf{e}} + \\ &+ 2\tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} (\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) - \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}})) = \\ &= -\tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{e}} + 2\tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{P}} (\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) - \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}})) \end{aligned} \quad (43)$$

Теперь учтем известное неравенство  $\|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 \sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{R}}) \leq \tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{e}} \leq \sigma_{\max}(\tilde{\mathbf{R}}) \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2$ , из которого следует

$$-\tilde{\mathbf{e}}^T \tilde{\mathbf{R}} \tilde{\mathbf{e}} \leq -\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{R}}) \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2, \quad (44)$$

а также свойство Липшица (2), из которого следует

$$\|\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) - \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}})\| \leq \lambda \|\tilde{\mathbf{e}}\|, \quad (45)$$

Тогда, обращаясь к (42)-(44), получим

$$\begin{aligned} W(\tilde{\mathbf{e}}) &= \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}})_{(41)} \leq -\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{R}}) \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 + \\ &+ 2\|\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}}\| \|\tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{f}) - \tilde{\mathbf{g}}(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \hat{\mathbf{f}})\| = \\ &= -\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{R}}) \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2 + 2\|\tilde{\mathbf{P}} \tilde{\mathbf{e}}\| \lambda \|\tilde{\mathbf{e}}\| \leq \\ &\leq (-\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{R}}) + 2\sigma_{\max}(\tilde{\mathbf{P}}) \lambda) \|\tilde{\mathbf{e}}\|^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что при выполнении условия (41) справедливо строгое неравенство  $W(\tilde{\mathbf{e}}) = \dot{V}(\tilde{\mathbf{e}})_{(41)} < 0$ . Это свидетельствует об асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия для уравнений (42).

Как было показано в [28], максимум верхней границы допустимой величины константы Липшица, функции  $\lambda_m(\tilde{\mathbf{R}})$

$$\lambda_m = \lambda_m(\tilde{\mathbf{R}}) = \frac{\sigma_{\min}(\tilde{\mathbf{R}})}{2\sigma_{\max}(\tilde{\mathbf{P}})},$$

достигается при условии  $\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{I}$ , из чего вытекает условие устойчивости системы (39):

$$\lambda < \frac{1}{2\sigma_{\max}(\tilde{\mathbf{P}})}. \quad (46)$$

## Пример синтеза нелинейного наблюдателя

Продemonстрируем практическое применение предложенного подхода на примере упрощенной нелинейной модели движения морского судна в горизонтальной плоскости с постоянной скоростью  $V$  [13], которое может быть описано уравнениями (1) со следующими параметрами

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \delta, f) = \begin{pmatrix} \frac{0.002(V^2 + \omega^2 L_R^2)}{V} - b_1 \\ 0.00016(V^2 + \omega^2 L_R^2) - b_2 \\ 0 \end{pmatrix} (\delta + f)$$

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0.41 \\ 0.0076 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $a_{11} = -0.00936V$ ,  $a_{12} = 0.693$ ,  $a_{21} = 0.00048V^2$ ,  $a_{22} = -0.717$ ,  $b_1 = 0.00195V$ ,  $b_2 = 0.000160V^2$ ,  $V = 10$  м/с. Вектор  $\mathbf{x} = (\beta \quad \omega \quad \phi)^T$  состоит из угла дрейфа  $\beta$ , угловой скорости вращения по курсу  $\omega$  и курса судна  $\phi$ ; все эти величины, а также отклонение вертикального руля, измеряются в радианах. Формирующий фильтр внешнего возмущения  $d(t)$  имеет параметры (3)

$$N_d(s) = 0.1, \quad T_d(s) = s^2 + 0.1 + 0.2025,$$

и представление (4) его передаточной функции в пространстве состояний имеет параметры

$$\mathbf{A}_d = \begin{pmatrix} -0.1 & -0.405 \\ 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_d = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_d = (0 \quad 1), \quad d_d = 0.$$

На множестве рассматриваемых движений константа Липшица (2)  $\lambda = 3.5 \cdot 10^{-4}$ , следовательно для решения (41)  $\tilde{\mathbf{P}}$  должна выполняться неравенство  $\sigma_{\max}(\tilde{\mathbf{P}}) \leq 1430$ , которое можно обеспечить за счет выбора параметров  $k$ ,  $A_f$  и  $\ddot{\mathbf{r}}(s)$  в (34). Выберем матрицу  $\mathbf{C}_r = (0 \quad 0 \quad 1)$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}$ ,  $k = 0.05$ ,  $A_f = 0.2$  и  $\ddot{\mathbf{r}}(s) \equiv \mathbf{0}$ , сформируем систему (10), после чего произведем вычисления (18)-(22), получим нижнюю границу значения функционала (14)  $J_a = 0.2562$ . Затем, постепенно, увеличивая значения  $\rho$  в (23), произведем вычисления (24)-(29) до того как получим положительно определенную матрицу Пика (29) при  $\rho = 0.8435$ . После этого по формулам (30)-(36) получим передаточные матрицы оптимальной замкнутой системы

$$\mathbf{F}_{x_1}(s) = \Delta^{-1}(s) \cdot \begin{pmatrix} -1.48s^4 + 0.86s^3 + 8.27s^2 + 18.16s + 18.66 \\ -124.3s^3 - 490.5s^2 - 996s - 1011 \\ -123.3s^4 - 580.2s^3 - 1353s^2 - 1738s - 737.8 \\ s^5 + 12.34s^4 + 49.29s^3 + 107.4s^2 + 132.9s + 65.36 \\ -0.607s^2 - 0.532s - 0.163 \\ -0.607s^3 - 0.592s^2 - 0.216s - 0.016 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_{u_1}(s) = \Delta^{-1}(s) \cdot \begin{pmatrix} 1.48s^5 - 0.72s^4 - 14.31s^3 - 42.48s^2 - 68.18s - 50.28 \\ 123.3s^5 + 580.2s^4 + 1353s^3 + 1738s^2 + 737.8s \end{pmatrix},$$

где

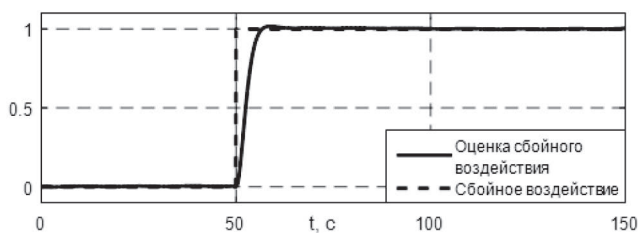
$$\Delta(s) = s^6 + 12.34s^5 + 49.31s^4 + 109.4s^3 + 140.7s^2 + 81.03s + 15.81.$$

Исходя из замечания 3.2 выберем нулевой порядок  $\mathbf{L}(s)$  и, решив полиномиальное уравнение (37), оптимальную передаточную матрицу (38)



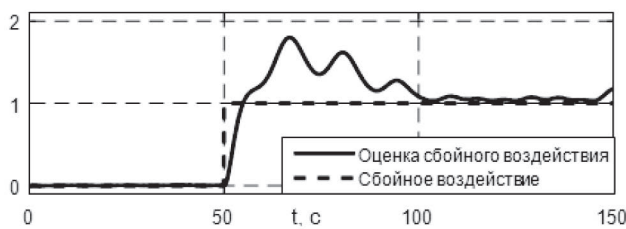
$$L_0 = \begin{pmatrix} 3.807 & 0.934 \\ 0.134 & 2.424 \\ 0.108 & 7.622 \\ 1.481 & 123.282 \\ 16.413 & 12.652 \\ 18.274 & 1.159 \end{pmatrix}$$

Для нее значение  $\sigma_{\max}(\tilde{P}) = 832.642$ , т.е. условие (46) выполняется. На рис. 1,2 демонстрируется процесс обнаружения сбойного воздействия, возникающего на 50 с. при помощи нелинейного наблюдателя (5) и линейного наблюдателя, представляющего собой (5) без нелинейного слагаемого. Очевидно, что наличие не принятой в расчет нелинейности способно значительно снизить эффективность наблюдателя.



Р и с. 1. Процесс оценивания сбойного воздействия  $f$  при помощи нелинейного наблюдателя

Fig. 1. The process of evaluating the failure impact  $f$  using a nonlinear observer



Р и с. 2. Процесс оценивания сбойного воздействия  $f$  при помощи линейного наблюдателя

Fig. 2. The process of evaluating the failure impact  $f$  using a linear observer

## Заключение

В данном исследовании продемонстрирован новый подход к спектральному синтезу нелинейных  $H_\infty$ -оптимальных наблюдателей для оценивания воздействия динамических сбоев. Проведенное имитационное моделирование подтвердило работоспособность и эффективность представленного метода. Можно утверждать, что возможность аналитического синтеза оценивающих наблюдателей для систем с липщицевой нелинейной частью может быть особенно полезна в случае внешнего возмущения с размытым спектром, при ограниченных вычислительных ресурсах или при необходимости обеспечить дополнительные свойства, что возможно осуществить за счет неединственности решения.

Наконец, упомянем несколько возможных направлений дальнейших исследований. В первую очередь, это задачи, связанные с обеспечением робастности и различными запаздываниями. Также определенный интерес вызывают вопросы одновременного синтеза наблюдателя и противоаварийного управления, в том числе с применением многоцелевой структуры управления, аналогичной использованной в [14, 17].

## Список использованных источников

- [1] Zhang, Y. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems / Y. Zhang, J. Jiang. – DOI 10.1016/j.arcontrol.2008.03.008 // Annual reviews in control. – 2008. – Vol. 32, issue 2. – Pp. 229-252.
- [2] Zhang, K. Observer-Based Fault Estimation and Accommodation for Dynamic Systems / K. Zhang, B. Jiang, P. Shi. – DOI 10.1007/978-3-642-33986-8 // Lecture Notes in Control and Information Sciences. – Vol. 436. – Springer, Berlin, Heidelberg, 2013. – 181 p.
- [3] Zhang, K. Observer-Based Fault Estimation Techniques / K. Zhang, B. Jiang, P. Shi, V. Cocquempot. – DOI 10.1007/978-3-319-67492-6 // Studies in Systems, Decision and Control. – Vol. 127. – Springer, Cham, 2018. – 187 p.
- [4] Zhang, K. Adaptive Observer-based Fast Fault Estimation / K. Zhang, B. Jiang, V. Cocquempot // International Journal of Control, Automation, and Systems. – 2008. – Vol. 6, No. 3. – Pp. 320-326. – URL: <https://www.koreascience.or.kr/article/JAKO200822049838900.page> (дата обращения: 26.04.2021).
- [5] Zhang, K. Fast fault estimation and accommodation for dynamical systems / K. Zhang, B. Jiang, P. Shi. – DOI 10.1049/iet-cta:20070283 // IET Control Theory & Applications. – 2009. – Vol. 3, issue 2. – Pp. 189-199.
- [6] Jiang, B. Fault accommodation for nonlinear dynamic systems / B. Jiang, M. Staroswiecki, V. Cocquempot. – DOI 10.1109/TAC.2006.878732 // IEEE Transactions on Automatic Control. – 2006. – Vol. 51, issue 9. – Pp. 1578-1583.
- [7] Lan, J. A new strategy for integration of fault estimation within fault-tolerant control / J. Lan, R. J. Patton. – DOI 10.1016/j.automatica.2016.02.014 // Automatica. – 2016. – Vol. 69. – Pp. 48-59.
- [8] Jiang, B. Fault estimation and accommodation for linear MIMO discrete-time systems / B. Jiang, F. N. Chowdhury. – DOI 10.1109/TCST.2004.839569 // IEEE transactions on control systems technology. – 2005. – Vol. 13, issue 3. – Pp. 493-499.
- [9] Chen, F. Robust backstepping sliding-mode control and observer-based fault estimation for a quadrotor UAV / F. Chen [и др.]. – DOI 10.1109/TIE.2016.2552151 // IEEE Transactions on Industrial Electronics. – 2016. – Vol. 63, issue 8. – Pp. 5044-5056.
- [10] Алиев, Ф. А. Оптимизация линейных инвариантных во времени систем управления / Ф. А. Алиев, В. Б. Ларин, К. И. Науменко, В. Н. Сунцев. – Киев: Наукова думка, 1978. – 327 с.
- [11] Aliev, F. A. Parametrization of sets of stabilizing controllers in mechanical systems / F. A. Aliev, V. B. Larin. – DOI 10.1007/s10778-008-0085-3 // International Applied Me-





- chanics. – 2008. – Vol. 44, issue 6. – Pp. 599-618.
- [12] Veremey, E. I. Efficient Spectral Approach to SISO Problems of  $H_2$ -Optimal Synthesis / E. I. Veremey. – DOI 10.12988/ams.2015.54335 // Applied Mathematical Sciences. – 2015. – Vol. 9, issue 79. – Pp. 3897-3909.
- [13] Veremey, E. I.  $H_2$ -Optimal Synthesis Problem with Nonunique Solution / E. I. Veremey. – DOI 10.12988/ams.2016.63120 // Applied Mathematical Sciences. – 2016. – Vol. 10, issue 38. – Pp. 1891-1905.
- [14] Veremey, E. I. Dynamical correction of control laws for marine ships' accurate steering / E. I. Veremey. – DOI 10.1007/s11804-014-1250-1 // Journal of Marine Science and Application. – 2014. – Vol. 13, issue 2. – Pp. 127-133.
- [15] Веремей, Е. И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация / Е. И. Веремей. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2017. – 408 с.
- [16] Veremey, E. Spectral Approach to  $H_\infty$ -Optimal SISO Synthesis Problem / E. Veremey, M. Sotnikova. – DOI 10.12988/ams.2015.54335 // WSEASTrans. Syst. Control. – 2014. – Vol. 9, issue 43. – Pp. 415-424.
- [17] Veremey, E. Irregular  $H_\infty$ -optimization of control laws for marine autopilots / E. Veremey. – DOI 10.1109/CNSA.2017.7974028 // 2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA). – IEEE Press, St. Petersburg, Russia, 2017. – Pp. 1-4.
- [18] Veremey, E. I. Spectral  $H_2$  fault estimation observer design based on allocation of the correction effect / E. I. Veremey, Y. V. Knyazkin // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. – 2017. – Vol. 95, No. 12. – Pp. 2776-2782. – URL: <http://www.jatit.org/volumes/Vol95No12/18Vol-95No12.pdf> (дата обращения: 26.04.2021).
- [19] Veremey, E. I. Spectral  $H_2$  optimal correction of additive fault estimation observer / E. I. Veremey, Y. V. Knyazkin. – DOI 10.1051/itmconf/20160601005 // ITM Web of Conferences. – 2016. – Vol. 6. – Article 01005.
- [20] Veremey, E. Spectral MIMO  $H_\infty$  Optimization Problem / E. Veremey, Y. Knyazkin. – DOI 10.1007/978-3-030-37436-5\_10 // Convergent Cognitive Information Technologies. Convergent 2018. Communications in Computer and Information Science; ed. by V. Sukhomlin, E. Zubareva. – Vol. 1140. – Springer, Cham, 2020. – Pp. 119-131.
- [21] Veremey, E. I. Marine Ships' Control Fault Detection Based on Discrete  $H_2$ -Optimization / E. I. Veremey, Y. V. Knyazkin. – DOI 10.2495/MT190081 // WIT Transactions on The Built Environment. – 2019. – Vol. 187. – Pp. 73-82.
- [22] Raghavan, S. Observer design for a class of non-linear systems / S. Raghavan, J. K. Hedrick. – DOI 10.1080/00207179408923090 // International Journal of Control. – 1994. – Vol. 59, issue 2. – Pp. 515-528.
- [23] Thau, F. E. Observing the state of non-linear dynamic systems / F. E. Thau. – DOI 10.1080/00207177308932395 // International journal of control. – 1973. – Vol. 17, issue 3. – Pp. 471-479.
- [24] Ball, J. A. Interpolation of Rational Matrix Functions / J. A. Ball [и др.]. – DOI 10.1007/978-3-0348-7709-1 // Operator Theory: Advances and Applications. – Vol. 45. – Birkhäuser, Basel, 2013. – 605 p.
- [25] Coelho, C. P. Passive constrained rational approximation algorithm using Nevanlinna-Pick interpolation / C. P. Coelho, J. R. Phillips, L. M. Silveira. – DOI 10.1109/DATE.2002.998410 // Proceedings 2002 Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition. – IEEE Press, Paris, France, 2002. – Pp. 923-930.
- [26] Волгин, Л. Н. Элементы теории управляющих машин / Л. Н. Волгин. – М.: Сов. радио, 1962. – 164 с.
- [27] Волгин, Л. Н. Оптимальное дискретное управление динамическими системами / Л. Н. Волгин. – М.: Наука, 1986. – 240 с.
- [28] Patel, R. V. Quantitative measures of robustness for multivariable systems / R. V. Patel, M. Toda. – DOI 10.1109/JACC.1980.4232116 // Joint Automatic Control Conference. – 1980. – Vol. 17. – Pp. 35.

Поступила 26.04.2021; одобрена после рецензирования 30.05.2021; принята к публикации 10.06.2021.

#### Об авторе:

**Князькин Ярослав Вячеславович**, ассистент кафедры компьютерных технологий и систем, факультет прикладной математики – процессов управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8522-588X>, yaroslavknyazkin@gmail.com

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

#### References

- [1] Zhang Y., Jiang J. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. *Annual reviews in control*. 2008; 32(2):229-252. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2008.03.008>
- [2] Zhang K., Jiang B., Shi P. Observer-Based Fault Estimation and Accommodation for Dynamic Systems. *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, vol. 436. Springer, Berlin, Heidelberg; 2013. 181 p. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-33986-8>
- [3] Zhang K., Jiang B., Shi P., Cocquempot V. Observer-Based Fault Estimation Techniques. *Studies in Systems, Decision and Control*, vol. 127. Springer, Cham; 2018. 187 p. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-67492-6>
- [4] Zhang K., Jiang B., Cocquempot V. Adaptive Observer-based Fast Fault Estimation. *International Journal of Control, Automation, and Systems*. 2008; 6(3):320-326. Available at: <https://www.koreascience.or.kr/article/JAKO200822049838900.page> (accessed 26.04.2021). (In Eng.)
- [5] Zhang K., Jiang B., Shi P. Fast fault estimation and accommodation for dynamical systems. *IET Control Theory & Applications*. 2009; 3(2):189-199. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1049/iet-cta:20070283>
- [6] Jiang B., Staroswiecki M., Cocquempot V. Fault accommodation for nonlinear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2006; 51(9):1578-1583. (In Eng.) DOI:



- <https://doi.org/10.1109/TAC.2006.878732>
- [7] Lan J., Patton R.J. A new strategy for integration of fault estimation within fault-tolerant control. *Automatica*. 2016; 69:48-59. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2016.02.014>
- [8] Jiang B., Chowdhury F.N. Fault estimation and accommodation for linear MIMO discrete-time systems. *IEEE transactions on control systems technology*. 2005; 13(3):493-499. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/TCST.2004.839569>
- [9] Chen F., et al. Robust backstepping sliding-mode control and observer-based fault estimation for a quadrotor UAV. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2016; 63(8):5044-5056. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/TIE.2016.2552151>
- [10] Aliev F.A., Larin V.B., Naumenko K.I., Suntsev V.I. *Optimizatsiya lineynikh invariantnikh vo vremeni sistem upravleniya* [Optimization of linear time-invariant control systems]. Kiev, Naukova Dumka; 1978. 327 p. (In Russ.)
- [11] Aliev F.A., Larin V.B. Parametrization of sets of stabilizing controllers in mechanical systems. *International Applied Mechanics*. 2008; 44(6):599-618. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s10778-008-0085-3>
- [12] Veremey E.I. Efficient Spectral Approach to SISO Problems of H<sub>2</sub>-Optimal Synthesis. *Applied Mathematical Sciences*. 2015; 9(79):3897-3909. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.12988/ams.2015.54335>
- [13] Veremey E.I. H<sub>2</sub>-Optimal Synthesis Problem with Nonunique Solution. *Applied Mathematical Sciences*. 2016; 10(38):1891-1905. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.12988/ams.2016.63120>
- [14] Veremey E.I. Dynamical correction of control laws for marine ships' accurate steering. *Journal of Marine Science and Application*. 2014; 13(2):127-133. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/s11804-014-1250-1>
- [15] Veremey E.I. *Srednekvadratsionnaya Mnogocelovaya Optimizatsiya* [RMS Multiobjective Optimization]. SPb, SPbU Publ; 2017. 408 p. (In Russ.)
- [16] Veremey E., Sotnikova M. Spectral Approach to H<sub>∞</sub>-Optimal SISO Synthesis Problem. *WSEAS Trans. Syst. Control*. 2014; 9(43):415-424. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.12988/ams.2015.54335>
- [17] Veremey E. Irregular H<sub>∞</sub>-optimization of control laws for marine autopilots. *2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA)*. IEEE Press, St. Petersburg, Russia; 2017. p. 1-4. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/CNSA.2017.7974028>
- [18] Veremey E.I., Knyazkin Y.V. Spectral H<sub>2</sub> fault estimation observer design based on allocation of the correction effect. *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*. 2017; 95(12):2776-2782. Available at: <http://www.jatit.org/volumes/Vol95No12/18Vol95No12.pdf> (accessed 26.04.2021). (In Eng.)
- [19] Veremey E.I., Knyazkin Y.V. Spectral H<sub>2</sub> optimal correction of additive fault estimation observer. *ITM Web of Conferences*. 2016; 6:01005. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1051/itmconf/20160601005>
- [20] Veremey E., Knyazkin Y. Spectral MIMO H<sub>∞</sub>-Optimization Problem. In: Ed. by V. Sukhomlin, E. Zubareva. *Convergent Cognitive Information Technologies. Convergent 2018. Communications in Computer and Information Science*. 1140:119-131. Springer, Cham; 2020. (In Eng.) DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-37436-5\\_10](https://doi.org/10.1007/978-3-030-37436-5_10)
- [21] Veremey E.I., Knyazkin Y.V. Marine Ships' Control Fault Detection Based on Discrete H<sub>2</sub>-Optimization. *WIT Transactions on The Built Environment*. 2019; 187:73-82. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.2495/MT190081>
- [22] Raghavan S., Hedrick J.K. Observer design for a class of nonlinear systems. *International Journal of Control*. 1994; 59(2):515-528. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1080/00207179408923090>
- [23] Thau F.E. Observing the state of non-linear dynamic systems. *International journal of control*. 1973; 17(3):471-479. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1080/00207177308932395>
- [24] Ball J.A., et al. Interpolation of Rational Matrix Functions. *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 45. Birkhäuser, Basel; 2013. 605 p. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-7709-1>
- [25] Coelho C.P., Phillips J.R., Silveira L.M. Passive constrained rational approximation algorithm using Nevanlinna-Pick interpolation. *Proceedings 2002 Design, Automation and Test in Europe Conference and Exhibition*. IEEE Press, Paris, France; 2002. p. 923-930. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/DATE.2002.998410>
- [26] Volgin L.N. *Elementy teorii upravlyayushchikh mashin* [Elements of machine control theory]. Sovetskoe radio, Moscow; 1962. 164 p. (In Russ.)
- [27] Volgin L.N. *Optimal'noe diskretnoe upravlenie dinamicheskimi sistemami* [Optimal Discrete Control of Dynamical Systems]. Nauka, Moscow; 1986. 240 p. (In Russ.)
- [28] Patel R.V., Toda M. Quantitative measures of robustness for multivariable systems. *Joint Automatic Control Conference*. 1980; 17:35. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/JACC.1980.4232116>

Submitted 26.04.2021; approved after reviewing 30.05.2021;  
accepted for publication 10.06.2021.

#### About the author:

**Yaroslav V. Knyazkin**, Assistant of the Department of Computer Applications and Systems, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University (7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8522-588X>, [yaroslavknyazkin@gmail.com](mailto:yaroslavknyazkin@gmail.com)

*The author has read and approved the final manuscript.*

