УДК 378.147
DOI: 10.25559/SITITO.17.202102.415-422

Оригинальная статья

Развитие гибкости мышления студентов при вычислении константы Фейгенбаума с помощью информационных и коммуникационных технологий

В. С. Секованов[1], В. А. Ивков[1*], А. А. Пигузов[1], Л. Б. Рыбина[2]
[1] ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Российская Федерация
156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17
[*] ivkov_wa@mail.ru
[2] ФГБОУ ВО «Костромская государственная сельскохозяйственная академия», Костромская область, Российская Федерация
156530, Российская Федерация, Костромская область, Костромской район, пос. Караваево, Караваевская с/а, Учебный городок, д. 3

Аннотация
В предлагаемой статье рассматривается методика развития гибкости мышления студентов за счет объединения различных подходов к выполнению учебных математических заданий. Рассматривается задача вычисления константы Фейгенбаума с помощью символической динамики и с помощью метода Ньютона. Строятся математические модели вычислительного процесса. Приведены алгоритмы и их реализация на языке программирования. Показано, что при решении задачи различными методами, мы приходим к одному результату. Предполагается, что при решении поставленной задачи у студентов проявляется интерес как к математическим методам исследования, так и к их реализации с помощью средств программирования. Гибкость мышления формируется за счет объединения аналитических математических исследований и вычислительных алгоритмов, реализованных на компьютере. Предлагаемая методика проведения учебных занятий рассматривалась авторами ранее при реализации выполнения многоэтапных математико-информационных заданий. На каждом этапе решения поставленной задачи студент может почувствовать себя как в роли математика-исследователя, так и в роли математика-программиста, экспериментатора. Такая интеграция математических методов и информационно-коммуникационных технологий предоставляет возможность организовывать творческую математическую и творческую информационную деятельность студентов, нацеленную на формирование гибкости мышления и креативных качеств.

Ключевые слова: креативность, гибкость мышления, константа Фейгенбаума, символическая динамика, орбита точки, метод Ньютона

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Развитие гибкости мышления студентов при вычислении константы Фейгенбаума с помощью информационных и коммуникационных технологий / В. С. Секованов, В. А. Ивков, А. А. Пигузов, Л. Б. Рыбина. – DOI 10.25559/SITITO.17.202102.415-422 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2021. – Т. 17, № 2. – С. 415-422.

Original article

Development of Thinking Flexibility of Students when Calculating the Feigenbaum Constant Using Information and Communication Technologies

V. S. Sekovanov[a], V. A. Ivkov[a*], A. A. Piguzov[a], L. B. Rybina[b]
[a] Kostroma State University, Kostroma, Russian Federation
17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation
[*] ivkov_wa@mail.ru
[b] Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma region, Russian Federation
34 Training Town, Karavaevo Village, Kostroma District 156530, Kostroma region, Russian Federation

Abstract
The proposed article examines the methodology for developing students' thinking flexibility by combining various approaches to the implementation of educational mathematical tasks. The problem of calculating the Feigenbaum constant using symbolic dynamics and using Newton's method is considered. Mathematical models of the computational process are being built. Algorithms and their implementation in the programming language are presented. It is shown that when solving the problem by different methods, we come to the same result. It is assumed that when solving the problem, students are interested in both mathematical research methods and their implementation using programming tools. Flexibility of thinking is formed by combining analytical mathematical research and computational algorithms implemented on a computer. The proposed methodology for conducting training sessions was considered by the authors earlier in the implementation of the implementation of multi-stage mathematical and informational tasks. At each stage of solving the problem, the student can feel himself both in the role of a mathematician-researcher, and in the role of a mathematician-programmer, experimenter. Such integration of mathematical methods and information and communication technologies provides an opportunity to organize creative mathematical and creative information activities of students, aimed at the formation of flexibility of thinking and creative qualities.

Keywords: creativity, flexibility of thinking, Feigenbaum's constant, symbolic dynamics, point orbit, Newton's method

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A. Rybina L.B. Development of Thinking Flexibility of Students when Calculating the Feigenbaum Constant Using Information and Communication Technologies. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education.* 2021; 17(2):415-422. DOI: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.415-422

Введение

В самом широком смысле креативность понимается как способность к творчеству. Важнейшим качеством креативности является гибкость мышления, связанная с исследованием объекта с разных сторон. При обучении математике и информатике положительную роль в развитии гибкости мышления оказывает решение задачи различными способами и разработка альтернативных алгоритмов, способствующих ее решению. Развитию гибкости мышления посвящены многочисленные работы, среди которых [5-10]. Во многих указанных работах рассматривалась методика обучения математике через выполнение многоэтапных математико-информационных заданий. Поставленные задачи решались аналитически, затем реализовывались с помощью алгоритмов, выполнялась визуализация результата. Последний этап не всегда присутствует при решении задачи [20-22].

Для развития гибкости мышления, на наш взгляд, полезно рассмотреть два альтернативных алгоритма вычисления константы Фейгенбаума, открытой во второй половине прошлого века и вошедшей в десятку знаменитых констант.

Теоретическая часть

Константа Фейгенбаума вычисляется с помощью итерирования функций, порождающих дискретные динамические системы, изучению которых в настоящее время уделяется большое внимание (см., например, [1-4])

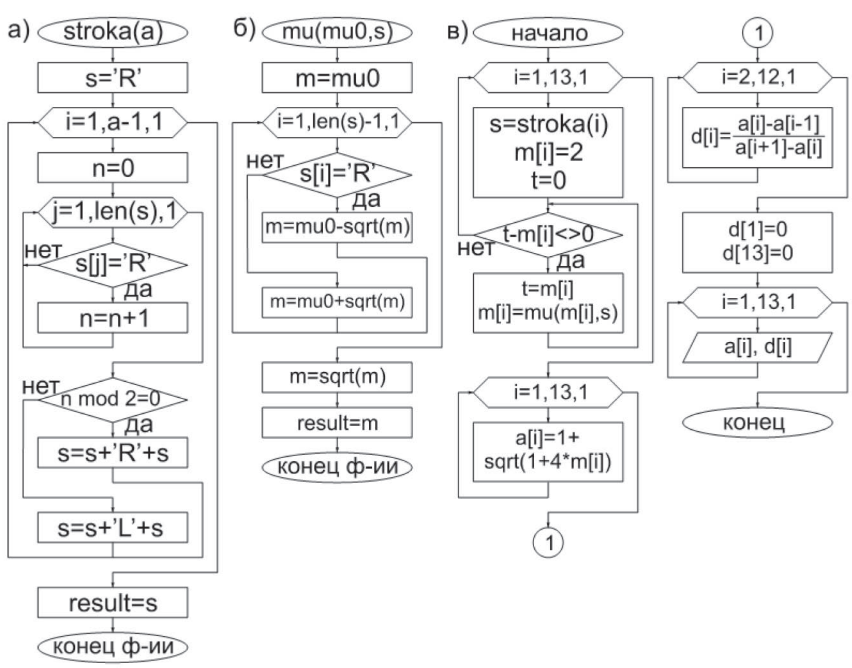
Опишем первый алгоритм, связанный с символической динамикой.

Мы имеем последовательность значений параметра $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ при которых происходят бифуркации итераций функции , заданной на отрезке с параметром $a \in [0;4]$. Как оказалось, существует предел $\delta = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+2}-a_{n+1}} =$ $4,669201609\ldots$ Данная константа называется константой Фейгенбаума.

Следуя М. Шредеру [11], введем понятие символической динамики для орбиты данной точки $\{x_n\}_{n=0}^{\infty} = \{f(x_0)\}_{n=0}^{\infty}$. Вместо вычисления всех итераций функции часто бывает достаточно установить, куда попадает очередная точка x_{n+1}: слева от максимума (центра) (L), или справа от максимума (R), либо в максимум функции (C), где под максимумом понимается глобальный максимум функции $f(x) = a(1-x)x$ на отрезке $[0;1]$. Найденная таким образом последовательность символов L, R, C называется символической динамикой. Сверхустойчивая орбита (орбита точки $x = \frac{1}{2}$) с длиной периода 2 будет иметь вид $C \quad R$. Орбита с длиной периода 4 строится по следующей схеме. Выписываются два периода орбиты с длиной периода 2: $C \quad R \; C \quad R$. Затем второе C заменяется на L, если число букв R слева от него нечетно. Если же это число четно, то второе C следует заменить на R. Например, переход от периода длины 2 порождает период длины 4; в терминологии символической динамики будет иметь вид: $C \quad R \to C \quad R \quad L \quad R$, далее период длины 4 породит период длины 8 в рамках символической динамики по схеме: $C \quad R \quad L \quad R \to C \quad R \quad L \quad R^3 \quad L \quad R$, где $R^3 = R \quad R \quad R$.

Данный алгоритм необычен и нов для студента, что мотивирует его к его разработке.

Будем находить константу Фейгенбаума для функции



Р и с. 1. Блок-схема вычисления константы Фейгенбаума с помощью символической динамики

F i g. 1. Block diagram for calculating the Feigenbaum constant using symbolic dynamics

$f(x)=a\cdot x\cdot(1-x)$ пошагово (см. также [3]). Сначала найдем такую замену переменных $\phi(x)=u\cdot x+v$, чтобы выполнялось равенство $\phi^{-1}\circ g\circ\phi=f$, где $g(x)=1-\mu\cdot x^2$, $\quad f(x)=a\cdot x-a\cdot x^2$. После несложных преобразований получим формулу перехода $a=1+\sqrt{1+4\cdot\mu}$ между переменными .

Согласно символической динамике $C\ R\ L\ R$, имеем $g_R\left(g_L\left(g_R(1)\right)\right)=0$ Из последнего равенства получаем: $1=g_R^{-1}\left(g_L^{-1}\left(g_R^{-1}(0)\right)\right)$. Умножим левую и правую части последнего уравнения на μ, получим $\mu=\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu}}}$.

Если мы рассмотрим функцию $\sigma(\mu)=\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu}}}$, построенную на базе символической динамики $C\ R\ L\ R$, то неподвижной точкой, найденной по вышеописанной схеме, будет точка $\mu=1{,}3107026413\ldots$ при первом приближении $\mu_0=2$.

Здесь полезно указать, что и для функции $\sigma_1(\mu)=\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu-\sqrt{\mu-\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu}}}}}}}$, построенной на базе символической динамики $C\ R\ L\ R\ R\ R\ L\ R$, неподвижной точкой будет $\mu=1{,}381547484432061\ldots$, при первом приближении $\mu_0=2$. Укажем на рисунке 1 блок-схему вычисления константы Фейгенбаума с помощью символической динамики (Рис. 1).

Отметим, что схема а) формирует «строку» (с помощью символической динамики); схема б) дает возможность вычисления μ; схема в) вычисляет μ, $\quad a$, δ (с использованием формулы перехода).

P	a	δ
2	3,2360679774997897	–
4	3,49856169932770152	–
8	3,55464086276882487	4,68077099
16	3,56666737985626851	4,66295961
32	3,56924353163711034	4,66840392
64	3,56979529374994462	4,66895374
128	3,56991346542234852	4,66915718
256	3,56993877423330549	4,66919100
512	3,56994419460806494	4,66919947
1024	3,56994535548646858	4,66920113
2048	3,56994560411107844	4,66920150
4096	3,56994565735885651	4,66920158

Р и с. 2. Таблица результатов вычисления константы Фейгенбаума

F i g. 2. Feigenbaum constant calculation results table

P означает период сверхустойчивой орбиты, то есть период точки $x_1=\dfrac{1}{2}$).

Второй алгоритм вычисления константы Фейгенбаума базируется на применении метода Ньютона. Отметим, что рассмотренный нами метод достаточно точен, прост универсален и не требует вычисления производных итераций функций $f^{2^n}(x)$.

Рассмотрим алгоритм нахождения универсальной константы Фейгенбаума с помощью метода Ньютона. Именно данным алгоритмом пользовался Фейгенбаум.

При нахождении универсальной константы Фейгенбаума нас будут интересовать сверхустойчивые орбиты периода 2^n n=1,2... То есть при значениях параметров $a=A_n$ мы имеем $f^{(2^{n-1})}(A_n,x_0)=x_0$, где $x_0=\dfrac{1}{2}$ – абсцисса вершины параболы .

Покажем, например, как вычисляется значение A_3 (см. также [2]):

1) подбираются $A_1=2$ и $A_2=\sqrt{5}+1$. Затем вычисляется $A_3^1=A_2+\dfrac{A_2-A_1}{4}$;

2) A_3 находится по следующей схеме:

2а) находятся 2^2 (четвертая) итерация функции $f(x,a)=a\cdot x\cdot(1-x)$, $a\in[0;4]$ и производная данной итерации в точке x_0 при начальном значении $A=A_3^1$;

2б) по формуле $A_3^{i+1}=A_3^i-\dfrac{f^{(2^2)}(A_3^i,x_0)-x_0}{\left(f^{(2^2)}(A_3^i,x_0)\right)'}$ $\quad i=1,2,\ldots,1000$

вычисляются $A_3^2\ldots A_3^{1000}$ (проводится 1000 итераций);

2в) затем полагаем $A_3=A_3^{1000}$.

После произведенных действий вычисляется δ по формуле $\delta=\dfrac{A_2-A_1}{A_3-A_2}$.

Для нахождения A_4 в ячейку A_1 записываем содержимое ячейки A_2, а в ячейку A_2 записываем содержимое ячейки A_3 ($A_1=A_2$ и $A_2=A_3$) и вычисляется $A_4^1=A_2+\dfrac{A_2-A_1}{\delta}$. Далее применяется метод Ньютона (проводится 1000 итераций при начальном значении A_4^1; x_0 – фиксировано и равно $\dfrac{1}{2}$). После проведенных итераций полагаем $A_4=A_4^{1000}$ и находим новое значение $\delta=\dfrac{A_3-A_2}{A_4-A_3}$

Аналогично находятся A_5, A_6, ... A_n и соответствующие значения δ.

Подведем краткий итог. В тело программы вводится n, затем задается начальное приближение δ (равное 4) и значения $\grave{A}$ для циклов периода 1 и 2 ($A_1=2$ и $A_2=\sqrt{5}+1$ соответственно); начиная с цикла периода 4 до цикла периода 4096, вычисляются значения A и δ по приведенной выше схеме (формула $\mathrm{A}_{n+1}^1\approx\mathrm{A}_n+(\mathrm{A}_n-\mathrm{A}_{n-1})/\delta$ взята из [1]).

Значения A и δ, приведены на рисунке 3.

P	A	δ
4	3,498561699327702	4.7089430
8	3,554640862768825	4.6807709
16	3,566667379856269	4.6629596
32	3,569243531637110	4.6684039
64	3,569795293749945	4.6689537
128	3,569913465422349	4.6691571
256	3,569938774233305	4.6691910
512	3,569944194608065	4.6691994
1024	3,569945355486469	4.6692011
2048	3,569945604111078	4.6692015
4096	3,569945657358857	4.6692016

Р и с. 3. Таблица вычисления δ

F i g. 3. Calculation table δ

При решении ряда задач мы использовали математические методы и проводили компьютерные эксперименты. Компьютерные эксперименты с применением математических методов при решении задач мы будем называть математико-компьютерными экспериментами [12-15].

Следует отметить, что программа вычисления константы Фейгенбаума методом Ньютона универсальна в том смысле, что меняя только функции в первом блоке программы, приведенной ниже, мы получим для каждой из них значения константы. Можно рассмотреть и другие квадратичные функции [16-19].

Укажем ниже компьютерную программу вычисления константы Фейгенбаума с помощью метода Ньютона.

```
var df:real;n:integer;
function func(a:real;i:integer):real;
var j:integer;ilast:longint;f0,f1,fd0,fd1:real;
begin
 ilast:=1;
 for j:=1 to i do ilast:=ilast*2; f0:=0.5;  fd0:=0;
  for j:=1 to ilast do begin f1:=a*f0-a*f0*f0; fd1:=a*fd0+f0-f0*f0-2*a*f0*fd0;f0:=f1;    fd0:=fd1; end;
 df:=fd1;
 func:=f1;
end;
function ai(a0:real;i:integer):real;
var a1,f:real; j:integer;
begin
 for j:=1 to 1000 do begin f:=func(a0,i); a0:=a0-(f-0.5)/df;  end;
 ai:=a0;
end;
var a1,a2,a3,sigma:real; i:integer;
begin  readln(n); sigma:=4;a1:=2; a2:=1+sqrt(5);
   for i:=1 to n do begin
   a3:=ai(a2+(a2-a1)/sigma,i+1); sigma:=(a2-a1)/(a3-a2);
   writeln(i,')',sigma:18:15,a1:18:15,a2:18:15,a3:18:15);
   a1:=a2; a2:=a3; end;
 readln;
end.
```

Заключение

В заключение отметим, что при нахождении константы Фейгенбаума у студентов появляется интерес как к математическим методам, так и к программированию, развивается интуитивное мышление, формируется толерантное отношение к новизне. Такая методика применима к целому классу математических задач [23-25].

Гибкость мышления формируется за счет исследования нового математического объекта с помощью различных математических методов и альтернативных компьютерных алгоритмов.

Список использованных источников

[1] Кроновер, Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах / Р. М. Кроновер. – М.: Постмаркет, 2000. – 352 с.

[2] Секованов, В. С. О вычислении универсальной константы Фейгенбаума методом Ньютона / В. С. Секованов, В. С. Забара // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. – 2006. – Т. 12, № 9. – С. 11-13. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=28284831 (дата обращения: 16.04.2021).

[3] Секованов, В. С. Элементы теории фрактальных множеств / В. С. Секованов. – 5-е изд. – М.: URSS, 2013. – 248 с.

[4] Секованов, В. С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах / В. С. Секованов // Фундаментальная и прикладная математика. – 2016. – Т. 21, № 3. – С. 185-199. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=36548986 (дата обращения: 16.04.2021).

[5] Секованов, В. С. Использование кластера при исследовании фрактальных множеств на комплексной плоскости / В. С. Секованов, А. Л. Салов, Е. А. Самохов // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественнонаучных дисциплин. – Кострома: КГУ, 2011. – С. 85-103. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=36755347 (дата обращения: 16.04.2021).

[6] Смирнов, Е. И. Повышение учебной мотивации школьников в процессе освоения понятий самоподобного и фрактального множеств на основе принципа фундирования / Е. И. Смирнов, В. С. Секованов, Д. П. Миронкин // Ярославский педагогический вестник. – 2015. – № 3. – С. 37-42. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=24835437 (дата обращения: 16.04.2021). – Рез. англ.

[7] Секованов, В. С. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания Топологическая и фрактальные размерности множеств как средство развития креативности и формирования компетентности студентов / В. С. Секованов, С. Ф. Митенёва, Л. Б. Рыбина // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2017. – Т. 23, № 2. – С. 140-144. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30462356 (дата обращения: 16.04.2021). – Рез. англ.

[8] Смирнов, Е. И. Многоэтапные математико-информационные задачи как средство развития креативности учащихся профильных математических классов / Е. И. Смирнов, В. С. Секованов, Д. П. Миронкин // Ярославский педагогический вестник. – 2014. – Т. 2, № 1. – С. 124-129. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=21361686 (дата обращения: 16.04.2021). – Рез. англ.

[9] Ивков, В. А. Изучение аттракторов нелинейных отображений в рамках многоэтапных математико-информационных заданий как средство развития креативности студентов / В. А. Ивков, В. С. Секованов, Е. И. Смирнов // Математический форум (Итоги науки. Юг России). – 2018. – Т. 12. – С. 150-164. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=37346952 (дата обращения: 16.04.2021). – Рез. англ.

[10] Секованов, В. С. Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Построение фрактальных множеств с помощью L-систем и информационных технологий» как средство развития креативности сту-дентов / В. С. Секованов, В. А. Ивков, А. А. Пигузов, А. С. Фатеев // CEUR Workshop Proceedings. – 2016. – Т. 1761. – С. 204-211. – URL: http://ceur-ws.org/Vol-1761/

paper26.pdf (дата обращения: 16.04.2021). – Рез. англ.

[11] Шредер, М. Фракталы, хаос, степенные законы: (миниатюры из бесконечного рая) / М. Шредер. – Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. – 528 с.

[12] Visual Modeling and Fractal Methods in Science / V. S. Sekovanov, E. I. Smirnov, V. A. Ivkov, E. M. Selezneva, S. M. Shlyahtina. – DOI 10.1109/MCSI.2014.28 // 2014 International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. – Varna, Bulgaria, 2014. – Pp. 94-98.

[13] Watson, A. Themes and Issues in Mathematics Education Concerning Task Design: Editorial Introduction / A. Watson, M. Ohtani. – DOI 10.1007/978-3-319-09629-2_1 // Task Design In Mathematics Education. New ICMI Study Series; ed. by A. Watson, M. Ohtani. – Springer, Cham, 2015. – Pp. 3-15.

[14] Designing Anticipation Activity of Students When Studying Holomorphic Dynamics Relying on Information Technologies / V. Sekovanov, V. Ivkov, A. Piguzov, Y. Seleznyova. – DOI 10.1007/978-3-030-46895-8_4 // Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science; Ed. by V. Sukhomlin, E. Zubareva. – Springer, Cham. – 2020. – Vol. 1201. – Pp. 59-68.

[15] Vrscay, E. R. Iterated function systems: theory, applications and the inverse problem / E. R. Vrscay. – DOI 10.1007/978-94-015-7931-5_10 // Fractal Geometry and Analysis. NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences); ed. by J. Bélair, S. Dubuc. – Springer, Dordrecht. – 1991. – Vol. 346. – 405-468.

[16] Alligood, K. T. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems / K. T. Alligood, N. D. Sauer, J. A. Yorke. – DOI 10.1007/b97589 // Textbooks in Mathematical Sciences. – Springer, New York, NY, 1996. – 603 p.

[17] Sinha, S. Chaotic Dynamics in Iterated Map Neural Networks with Piecewise Linear Activation Function / S. Sinha. – DOI 10.3233/FI-1999-371202 // Fundamenta Informaticae. – 1999. – Vol. 37, No. 1, 2. – Pp. 31-50.

[18] Souza, P. V. S. A simple and didactic method to calculate the fractal dimension - an interdisciplinary tool / P. V. S. Souza, R. L. Alves, W. F. Balthazar. – DOI 10.48550/arXiv.1804.01038 // arXiv:1804.01038. – 2018.

[19] Sekovanov, V. S. Visual Modeling of Nonlinear Mappings of Fractals and Chaos / V. S. Sekovanov, E. I. Smirnov, V. A. Ivkov. – DOI 10.5593/SGEMSOCIAL2015/B11/S1.035 // 2nd International Multidisciplinary Conference on Social Sciences and Arts (SGEM2015). Conference Proceedings. – Book 1, Vol. 1. – Albena, Bulgaria, 2015. – Pp. 263-272.

[20] Секованов, В. С. Мотивации в изучении нелинейных отображений фрактальности и хаоса методом наглядного моделирования / В. С. Секованов, Е. И. Смирнов, В. А. Ивков // Евразийское научное объединение. – 2015. – Т. 2, № 2. – С. 302-305. – URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23326459 (дата обращения: 16.04.2021).

[21] Секованов, В. С. О вычислении константы Фейгенбаума / В. С. Секованов, А. Л. Салов, Е. А. Самохов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2010. – Т. 6, № 1. – С. 364-371. – URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=24172805 (дата обращения: 16.04.2021).

[22] Кирик, В. А. Развитие педагогической креативности студентов в процессе образовательного форсайта / В. А. Кирик, И. Э. Куликовская. – DOI 10.18522/2658-6983-2020-08-33-39 // Мир университетской науки: культура, образование. – 2020. – № 8. – С. 33-39. – Рез. англ.

[23] McCartney, M. Computing Feigenbaum's δ constant using the Ricker map / M. McCartney, D. H. Glass. – DOI 10.1080/0020739X.2014.920534 // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. – 2014. – Vol. 45, issue 8. – Pp. 1265-1273.

[24] Briggs, K. M. A precise calculation of the Feigenbaum constants / K. M. Briggs. – DOI 10.1090/S0025-5718-1991-1079009-6 // Mathematics of Computation. – 1991. – Vol. 57. – Pp. 435-439.

[25] Hertling, P. Computing a Solution of Feigenbaum's Functional Equation in Polynomial Time / P. Hertling, Ch. Spandl. – DOI 10.2168/LMCS-10(4:7)2014 // Logical Methods in Computer Science. – 2014. – Vol. 10, issue 4. – Pp. 1-9.

Поступила 16.04.2021; одобрена после рецензирования 28.05.2021; принята к публикации 09.06.2021.

Об авторах:

Секованов Валерий Сергеевич, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий, Институт физико-математических и естественных наук, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), доктор педагогических наук, профессор, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8604-8931,** sekovanovvs@yandex.ru

Ивков Владимир Анатольевич, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий, Институт физико-математических и естественных наук, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), кандидат экономических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1014-9381,** ivkov_wa@mail.ru

Пигузов Алексей Александрович, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий, Институт физико-математических и естественных наук, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), кандидат педагогических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5378-3326,** piguzov@ksu.edu.ru

Рыбина Лариса Борисовна, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромская государственная сельскохозяйственная академия» (156530, Российская Федерация, Костромская область, Костромской район, пос. Караваево, Караваевская с/а, Учебный городок, д. 3), кандидат философских наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/ 0000-0001-7891-9373,** larisa.rybina.2014@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Crownover R.M. Introduction to Fractals and Chaos. First Ed. Jones & Bartlett, Boston; 1995. 306 p. (In Eng.)

[2] Sekovanov V.S., Zabara V.S. *O vychislenii universal'noj konstanty Fejgenbauma metodom N'jutona* [On the calculation of the universal Feigenbaum constant by Newton's method]. *Vestnik of Kostroma State University*. 2006; 12(9):11-13. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=28284831 (accessed 16.04.2021). (In Russ.)

[3] Sekovanov V.S. *Jelementy teorii fraktal'nyh mnozhestv* [Elements of the theory of fractal sets]. 5th Ed. URSS, Moscow; 2013. 248 p. (In Russ.)

[4] Sekovanov V.S. *O nekotoryh diskretnyh nelinejnyh dinamicheskih sistemah* [On some discrete nonlinear dynamical systems]. *Fundamentalnaya i Prikladnaya Matematika* = Fundamental and Applied Mathematics. 2016; 21(3):185-199. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=36548986 (accessed 16.04.2021). (In Russ.)

[5] Sekovanov V.S., Salov A.L., Samokhov E.A. *Ispol'zovanie klastera pri issledovanii fraktal'nyh mnozhestv na kompleksnoj ploskosti* [Using the cluster in the study of fractal sets on the complex plane]. *Proceedings of the Conference on Actual Problems of Teaching Information and Natural Disciplines*. KSU, Kostroma; 2011. p. 85-103. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=36755347 (accessed 16.04.2021). (In Russ.)

[6] Smirnov E.I., Sekovanov V.S., Mironkin D.P. Increase of schoolchildren's educational motivation in the course of development of self-similar and fractal sets concepts on the basis of the funding principle. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*. 2015; (3):37-42. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=24835437 (accessed 16.04.2021). (In Russ., abstract in Eng.)

[7] Sekovanov V.S., Mitenyova S.F., Rybina L.B. Solving the multistage task in mathematics and informatics "Topological and Fractal Dimensions of Set" as means of creativity development and competences formation in students. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2017; 23(2):140-144. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=30462356 (accessed 16.04.2021). (In Russ., abstract in Eng.)

[8] Smirnov E.I., Sekovanov V.S., Mironkin D.P. Multi-stage mathematic-information tasks as a means to develop pupils' creativity in profile mathematical classes. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin*. 2014; 2(1):124-129. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=21361686 (accessed 16.04.2021). (In Russ., abstract in Eng.)

[9] Ivkov V.A., Sekovanov V.S., Smirnov E.I. Attractors of nonlinear mappings in the framework learning of multi-stage mathematical and information tasks as a means of students' creativity developing. *Mathematical Forum. (Results of Science. South of Russia).* 2018; 12:150-164. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=37346952 (accessed 16.04.2021). (In Russ., abstract in Eng.)

[10] Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Fateev A.S. Execution of mathematics and information multistep task "Building a Fractal Set with L-systems and Information Technologies" as a means of creativity of students. *CEUR Workshop Proceedings*. 2016; 1761:204-211. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper26.pdf (accessed 16.04.2021). (In Russ., abstract in Eng.)

[11] Schroeder M. Fractals, Chaos, Power Laws: Minutes from an Infinite Paradise. Dover Publications; 2009. 448 p. (In Eng.)

[12] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A., Selezneva E.M., Shlyahtina S.M. Visual Modeling and Fractal Methods in Science. *2014 International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry*. Varna, Bulgaria; 2014. p. 94-98. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1109/MCSI.2014.28

[13] Watson A., Ohtani M. Themes and Issues in Mathematics Education Concerning Task Design: Editorial Introduction. In: Ed. by A. Watson, M. Ohtani. Task Design In Mathematics Education. *New ICMI Study Series*. Springer, Cham; 2015. p. 3-15. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_1

[14] Sekovanov V., Ivkov V., Piguzov A., Seleznyova Y. Designing Anticipation Activity of Students When Studying Holomorphic Dynamics Relying on Information Technologies. In: Ed. by V. Sukhomlin, E. Zubareva. *Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science*. 2020; 1201:59-68. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-030-46895-8_4

[15] Vrscay E.R. Iterated function systems: theory, applications and the inverse problem. In: Ed. by J. Bélair, S. Dubuc. Fractal Geometry and Analysis. *NATO ASI Series (Series C: Mathematical and Physical Sciences)*. 1991; 346:405-468. Springer, Dordrecht. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-015-7931-5_10

[16] Alligood K.T., Sauer N.D., Yorke J.A. Chaos: An Introduction to Dynamical Systems. *Textbooks in Mathematical Sciences*. Springer, New York, NY; 1996. 603 p. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1007/b97589

[17] Sinha S. Chaotic Dynamics in Iterated Map Neural Networks with Piecewise Linear Activation Function. *Fundamenta Informaticae*. 1999; 37(1,2):31-50. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.3233/FI-1999-371202

[18] Souza P.V.S., Alves R.L., Balthazar W.F. A simple and didactic method to calculate the fractal dimension – an interdisciplinary tool. arXiv:1804.01038. 2018. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.1804.01038

[19] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A. Visual Modeling of Nonlinear Mappings of Fractals and Chaos. In: *2nd International Multidisciplinary Conference on Social Sciences and Arts (SGEM2015). Conference Proceedings*. Albena, Bulgaria. 2015; 1-1:263-272. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.5593/SGEMSOCIAL2015/B11/S1.035

[20] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A. *Motivacii v izuchenii nelinejnyh otobrazhenij fraktal'nosti i haosa metodom nagljadnogo modelirovanija* [Motivation in the study of nonlinear mappings of fractality and chaos by the method of visual modeling]. *Eurasian Scientific Association*. 2015; 2(2):302-305. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23326459 (accessed 16.04.2021). (In Russ.)

[21] Sekovanov V.S., Salov A.L., Samokhov E.A. *O vychislenii kon-*

stanty Fejgenbauma [On the calculation of the Feigenbaum constant]. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2010; 6(1):364-371. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=24172805 (accessed 16.04.2021). (In Russ.)

[22] Kirik V.A., Kulikovskaya I.E. Developing students' pedagogical creativity via educational foresight. *The world of academia: culture, education*. 2020; (8):33-39. (In Russ., abstract in Eng.) DOI: https://doi.org/10.18522/2658-6983-2020-08-33-39

[23] McCartney M., Glass D.H. Computing Feigenbaum's δ constant using the Ricker map. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology.* 2014; 45(8):1265-1273. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.920534

[24] Briggs K.M. A precise calculation of the Feigenbaum constants. *Mathematics of Computation.* 1991; 57:435-439. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1991-1079009-6

[25] Hertling P., Spandl Ch. Computing a Solution of Feigenbaum's Functional Equation in Polynomial Time. *Logical Methods in Computer Science.* 2014; 10(4):1-9. (In Eng.) DOI: https://doi.org/10.2168/LMCS-10(4:7)2014

Submitted 16.04.2021; approved after reviewing 28.05.2021; accepted for publication 09.06.2021.

About the authors:

Valeriy S. Sekovanov, Head of the Department of Applied Mathematics and Information Technology, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Dr.Sci. (Pedagogy), Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8604-8931,** sekovanovvs@yandex.ru

Vladimir A. Ivkov, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technology, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Ph.D. (Economics), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1014-9381,** ivkov_wa@mail.ru

Alexey A. Piguzov, Associate Professor of the Department of Applied Mathematics and Information Technology, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Ph.D. (Pedagogy), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5378-3326,** piguzov@ksu.edu.ru

Larisa B. Rybina, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Kostroma State Agricultural Academy (34 Training Town, Karavaevo Village, Kostroma District 156530, Kostroma region, Russian Federation), Ph.D. (Philosophy), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/ 0000-0001-7891-9373,** larisa.rybina.2014@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.