

УДК 519.71- 681.515
DOI: 10.25559/SITITO.17.202104.906-913

Научная статья

Робастный дизайн модельного прогнозного управления

А. Отман шериф*, Д. В. Баландин

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского», г. Нижний Новгород, Российская Федерация

Адрес: 603022, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23

*abdouitmm@gmail.com

Аннотация

Развитие робастных систем управления связано с тем, что обычно существует источник неопределенности при моделировании системы, например возмущение, немоделированная динамика, неопределенность параметров и шум измерения. Некоторые характеристики, такие как устойчивость, чувствительность и робастность, определены для оценки того, как система управления может справиться с неопределенностью. Система управления называется робастной, если устойчивость поддерживается, а технические характеристики выполняются при наличии определенного диапазона неопределенности. Основная цель данной статьи - предложить достаточные критерии устойчивости и стабилизации по Ляпунову для линейные системы с переменными параметрами LPV с вероятностной неопределенностью.

Ключевые слова: робастность, прогнозирующая модель, многоцелевая оптимизация, алгоритмы управления, LPV, LMI, тензорное произведение

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Отман шериф А., Баландин Д. В. Робастный дизайн модельного прогнозного управления // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 4. С. 906-913. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.906-913>

© Отман шериф А., Баландин Д. В., 2021



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Robust Model Predictive Control Design

A. Otmame Cherif, D. V. Balandin

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Nizhny Novgorod, Russian Federation

Address: 23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603022, Russian Federation

* abdouiitmm@gmail.com

Abstract

Recently, many control designers have worked on design methods that meet several design specifications called multi-objective control design. However, the main challenge for the Model Predictive Control design is the high computational load preventing its application to the fast dynamic control of the system in real time. To meet this challenge, this paper proposes a new modified Model Predictive Control design for nonlinear systems with probabilistic uncertainties that guarantees robust stability and performance of the systems, using the Linear Matrix Inequality "LMI". Introducing our robust Model Predictive Control state feedback, the control law will be calculated by step-by-step optimization, and the LMI solutions can be found to stabilize the Linear Parameter-Varying "LPV" system with disturbance rejection ability. Then, a Tensor Product (TP) model transformation is constructed as a powerful tool in the modeling of the complex nonlinear systems.

Keywords: robustness, model predictive, multi-objective optimization, Control algorithms, LPV, LMI, tensor product

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Otmame Cherif A., Balandin D.V. Robust Model Predictive Control Design. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021; 17(4):906-913. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.906-913>



Введение

Робастное управление – это синтез, который оптимизирует технические характеристики наихудшего случая и определяет параметры наихудшего случая, в то время как объект остается изменчивым в некотором заданном наборе. Неопределенная модель появляется, когда параметры системы точно не известны или могут изменяться в заданном диапазоне. В [9] предлагается синтез робастного MPC, который позволяет явно включать описание неопределенностей объекта. Кроме того, проблема минимизации верхней границы наихудшего случая сводится к выпуклой оптимизации с использованием линейными матричными неравенствами «LMI». Было доказано, что решение задачи оптимизации LMI, которая представляет собой управление с обратной связью по состоянию удаляющегося горизонта, может робастно стабилизировать множество неопределенных объектов. По мотивам [9, 10] представил новый подход, основанный на использовании нескольких функций Ляпунова, каждая из которых соответствует разной вершине многогранника неопределенности. В [11] предложен метод синтеза закона MPC для систем с линейным изменением параметров (LPV) с использованием функции Ляпунова, зависящей от параметра, и заявлены менее консервативные характеристики управления. Кроме того, вычислительная нагрузка, связанная с робастным MPC, является сложной проблемой для онлайн-приложения робастного MPC. Чтобы устранить этот недостаток, здесь предлагается модифицированная стратегия стабилизации системы LPV с уменьшенной вычислительной нагрузкой. В моей будущей работе будет представлена модель шасси, затем предложенный метод будет использоваться для подавления шимминг-вибрации шасси, поэтому мы определили тензорное производство.

Робастный MPC Дизайн

Рассмотрим систему LPV (1)

$$\dot{x}(t) = A(p(t), q) x(t) + B(p(t), q) u(t)$$

$$y(t) = C(p(t), q) x(t) + D(p(t), q) u(t)$$

где матрица нелинейной системы $S(p(t), q) = \begin{pmatrix} A(p(t), q) & B(p(t), q) \\ C(p(t), q) & D(p(t), q) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+p) \times (n+m)}$ (2)

$p(t) \in \Omega$ - вектор изменяющихся во времени параметров. Он может включать некоторые элементы $x(t)$ или $u(t)$. Множество Ω представляет собой замкнутый гиперкуб, который описывает изменяющиеся во времени и параметрические неопределенности в этой системе.

система LPV с входными и выходными ограничениями

$$\begin{aligned} \|u_{k+1|k}\|_2^2 &\leq u_{max} \\ \|y_{k+1|k}\|_2^2 &\leq y_{max} \end{aligned} \quad (3)$$

где k – момент времени, u_{max} – верхняя граница ввода, y_{max} – верхняя граница вывода, $a_i = 0, 1, \dots$ – время будущей выборки. Задача управления состоит в том, чтобы найти закон управления $u(k)$, чтобы переменные состояния $x(k)$ могли быть дове-

дены до нуля за желаемое время¹.

Управляющий сигнал обновляется в каждый момент выборки посредством минимизации конечных робастных целевых характеристик по отношению к неопределенным параметрам и ограничениям (3) в каждый момент выборки k . Используя метод оптимизации «Minimax», целевую функцию можно записать следующим образом:

$$\text{minimize}_u \max_P \sum_{i=0}^{N-1} x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k}, \quad (4)$$

R и $Q > 0$, В Робастном MPC design функция Ляпунова выбрана как функция конечной стоимости, определяемая как:

$$V(x) = x_{k|k}^T P x_{k|k}$$

У нас есть: $\forall x \in X_f, \Phi(Ax + BL(x)) - \Phi(x) \leq -x^T Q x - L(x)^T(x)RL(x)$

$\Phi(x)$ – функция конечной стоимости.

$L(x) = Lx$ – номинальный регулятор,

Используя это, можно достичь цели оптимальной производительности (4) следующим образом:

$$V(x_{k+i|k}) - V(x_{k|k}) \leq -x_{k|k}^T Q x_{k|k} - u_{k|k}^T R u_{k|k} \quad (5)$$

Суммируя указанное выше неравенство от момента времени k до ∞ и $x_{\infty|k} = 0$, получаем следующее ограничение:

$$\sum_{i=0}^{\infty} x_{k+i|k}^T Q x_{k+i|k} + u_{k+i|k}^T R u_{k+i|k} \leq V(x_{k|k}) \quad (6)$$

т.е. функция Ляпунова является верхней границей для функции стоимости бесконечного горизонта во время выборки k .

Примечание: чтобы спроектировать MPC для Политипической модели, цель состоит в том, чтобы найти линейную обратную связь по состоянию $u_k = F x_k$, которая минимизирует верхнюю границу квадратичной стоимости наихудшего случая с бесконечным горизонтом, которая является функцией $x_k^T P x_k$.

И так задача разработки управления состоит в том, чтобы найти P_k и F_k , где закон управления

$$u_{k+i|k} = F_k x_{k+i|k}, \quad i \geq 0$$

этот закон управления, действительно, минимизирует верхнюю границу устойчивой целевой функции производительности во время выборки, k .

Выполняя преобразование конгруэнтности с $X_k = P_k^{-1} > 0$ определяющий $F_k = Y_k X_k^{-1}$ (7)

и, применяя комплимент Шура, задача минимизации линейной цели [9] будет получена как:

$$\text{minimize}_{Y_k, X_k} \gamma_k \quad (8.1)$$

при условии

$$\begin{bmatrix} 1 & x_k^T \\ x_k & X_k \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8.2)$$

¹ Баландин Д. В., Коган М. М. Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств. М.: Физматлит, 2007. 280 с. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24056938> (дата обращения: 07.09.2021).



этот закон управления, действительно, минимизирует верхнюю границу устойчивой целевой функции производительности во время выборки, k .

Выполняя преобразование конгруэнтности с $X_k = P_k^{-1} > 0$ определяющий $F_k = Y_k X_k^{-1}$ (7)

и, применяя комплимент Шура, задача минимизации линейной цели [9] будет получена как:

$$\underset{Y_k, X_k, \gamma_k}{\text{minimize}} \gamma_k \quad (8.1)$$

при условии

$$\begin{bmatrix} 1 & x_k^T \\ x_k & X_k \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8.2)$$

$$\begin{bmatrix} X_k & * & * & * \\ A_j X_k + B_j Y_k & X_k & * & * \\ Q^{1/2} X_k & 0 & \gamma I & * \\ R^{1/2} Y_k & 0 & 0 & \gamma I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8.3)$$

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 & Y_k \\ Y_k^T & X_k \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8.4)$$

$$\begin{bmatrix} \gamma_{max}^2 I & (A_j X_k + B_j Y_k)^T C^T \\ C(A_j X_k + B_j Y_k) & X_k \end{bmatrix} \geq 0 \quad (8.5)$$

где выходная матрица C является общей для всех вершин и $j = 1, 2, \dots, L$ (L - количество вершин). Кроме того, символ * представляет симметричную структуру в LMI.

В соответствии с разработанным выше законом обратной связи с обратной связью решение для оптимизации в (8.1) может быть получено с использованием метода LMI, который приводит к стабилизации системы LPV (5), а переменные состояния устанавливаются на ноль. В каждый момент выборки оптимальная верхняя граница затрат на производительность в наихудшем случае на бесконечном горизонте получается путем принудительного уменьшения квадратичной функции состояния по крайней мере на величину затрат производительности наихудшего случая в каждый момент прогнозирования [15-19]. Такая пошаговая оптимизация в реальном времени может привести к асимптотически устойчивой эволюции. Но для приложений реального времени, особенно для подавления вибрации в системе шасси, вычислительная эффективность LMI очень важна, чтобы гарантировать практическую реализацию робастного MPC. Чтобы повысить эффективность вычислений, нужно жертвовать оптимальной производительностью в пользу вычислительной нагрузки на каждом этапе.

Чтобы облегчить вычислительную нагрузку в робастном MPC, сделана попытка уменьшить размерность матриц в уравнениях LMI. (8.2) – (8.5). Неравенство (8.3) требует наибольшей вычислительной нагрузки, поскольку ему должна удовлетворять каждая вершина $[A_j, B_j]$. Установлено, что матрицы в строках 3 и 4 в неравенстве (8.3) напрямую связаны с индексом робастной производительности, который появляется в правой части неравенства (5). Модифицированный робастный MPC будет менять оптимальную производительность на вычислительную нагрузку [2].

Для выполнения вышеизложенного, функция Ляпунова определяется $V(x) = x_{k|k}^T P x_{k|k}$

где $P_k := \beta_k X_k^{-1}$ – положительно определенная матрица, которая будет получена путем решения оптимальной задачи в текущий момент времени k . Чтобы гарантировать асимптотическую устойчивость замкнутой системы, что является основной целью проектирования регуляторов, необходимо определить функцию Ляпунова для замкнутой системы, которая строго убывает

$$V(x_{k+1|k}) - V(x_{k|k}) < 0 \quad (9)$$

и эквивалентно следующему неравенству $x_{k+1|k}^T P x_{k+1|k} - x_{k|k}^T P x_{k|k} < 0$ (10)

где предполагается, что измеренные переменные состояния в момент времени $k + 1$ равны прогнозируемым переменным состояниям $x_{k+1/k}$. Чтобы гарантировать выполнение неравенства (10), необходимо обеспечить следующее неравенство:

$$x_{k+1|k+1}^T P_{k+1} x_{k+1|k+1} \leq x_{k+1|k+1}^T P_k x_{k+1|k+1} \quad (11)$$

Неравенство в терминах X_{k+1} и X_k , используя определение P_k , можно записать как:

$$x_{k+1|k+1}^T \beta_{k+1} X_{k+1}^{-1} x_{k+1|k+1} \leq x_{k+1|k+1}^T \beta_k X_k^{-1} x_{k+1|k+1} \quad (12)$$

Наш робастный MPC предназначен для того, чтобы матрица X_{k+1}^{-1} в момент времени $k + 1$ была меньше, чем X_k^{-1} в момент времени k . Это эквивалентно случаю, когда матрица X_{k+1}^{-1} меньше, чем матрица X_k^{-1} .

Его можно записать в следующем виде, добавив к матрице X_k верхнюю границу βI :

$$X_{k-1} < X_k < \beta_k I \quad (13)$$

Кроме того, чтобы гарантировать выполнение неравенства (10), правая часть неравенства (11) должна удовлетворять следующему неравенству:

$$x_{k+1|k+1}^T P_{k+1} x_{k+1|k+1} = x_{k+1|k}^T \beta_k X_k^{-1} x_{k+1|k} \leq x_{k|k}^T \beta_k X_k^{-1} x_{k|k} \quad (14)$$

Подстановка $x_{k+1|k} = A(p)x_{k|k} + B(p)u_k$ и управления с обратной связью $u_k = F_k x_{k|k}$ в указанное выше неравенство приводит к:

$$\begin{aligned} & x_{k|k}^T (A(p) + B(p)F_k) \beta_k X_k^{-1} (A(p) + B(p)F_k) x_{k|k} \\ & - x_{k|k}^T \beta_k X_k^{-1} x_{k+1|k+1} \leq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

Следующее неравенство будет получено с использованием определения усиления управления с обратной связью в (7) и политопической модели, определенной в (5):

$$\sum_{j=1}^L w_j (A_j + B_j Y_k X_k^{-1})^T \beta_k X_k^{-1} \sum_{j=1}^L w_j (A_j + B_j Y_k X_k^{-1}) - \beta_k X_k^{-1} \leq 0 \quad (16)$$



Используя определение выпуклой оболочки, указанное выше неравенство выполняется, если выполняются следующие L неравенств

$$(A_j + B_j Y_k X_k^{-1})^T \beta_k X_k^{-1} (A_j + B_j Y_k X_k^{-1}) - \beta_k X_k^{-1} \leq 0 \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (17)$$

Тогда следующие LMI будут получены путем применения комплименты Шура в виде

$$\begin{bmatrix} X_k & (A_j + B_j Y_k)^T \\ (A_j + B_j Y_k) & X_k \end{bmatrix} \quad j = 1, 2, \dots, L \quad (18)$$

Таким образом, модификация системы робастного MPC для LPV приведено в [2], подверженная ограничениям ввода и вывода, может быть выражена как следующая задача минимизации:

$$\underset{\beta_k, X_k, Y_k}{\text{minimize}} \quad \beta_k \quad (19.1)$$

при условии

$$\begin{bmatrix} X_k & (A_j + B_j Y_k)^T \\ (A_j + B_j Y_k) & X_k \end{bmatrix} \geq 0 \quad (19.2)$$

$$X_{k-1} < X_k < \beta_k I \quad (19.3)$$

$$\begin{bmatrix} u_{max}^2 & Y_k \\ Y_k^T & X_k \end{bmatrix} \geq 0 \quad (19.4)$$

$$\begin{bmatrix} y_{max}^2 X_k & (A_j + B_j Y_k)^T C^T \\ C(A_j + B_j Y_k) & y_{max}^2 I \end{bmatrix} \geq 0 \quad (19.5)$$

Коэффициент усиления управления с обратной связью получается, как $F_k = Y_k X_k^{-1}$ а управляющий сигнал рассчитывается как $u_{k+i|k} = F_k x_{k+i|k}$, $i \geq 0$.

Подробные пошаговые алгоритмы управления кратко изложены ниже.

Модифицированный алгоритм MPC

Регулятор для системы LPV с начальным состоянием x_0 реализован в виде:

- 1- Решить (8.1) для $k = 0$, чтобы получить X_0 и Y_0 , подчиненные (8.2) – (8.5) с начальным условием x_0 и ограничениями на вход u_{max} и выход y_{max} . Сохраните соответствующие X_0 и Y_0 .
- 2- Для $k = 1$ найдем X_k и Y_k , решив задачу минимизации (19.1), в соответствии с (19.2) – (19.5), вычислить коэффициент обратной связи как $F_k = Y_k X_k^{-1}$ и управляющий вход как $u_k = F_k x_{k|k}$
- 3- Подаем управляющий вход u_k на систему LPV, и $k = k + 1$, затем перейдем к 2.

Как указано выше, алгоритм начинается с решения трудоемкой задачи минимизации с учетом LMI (8.2) – (8.5) перед ите-

рацией, а затем переключается на модифицированный робастный MPC. Задача оптимизации вне цикла решается для получения начального X_0 который будет служить нижней границей следующего шага X_1 в цикле. На каждом этапе матрица X_k решается и используется для вычисления коэффициента обратной связи F_k .

Шаг за шагом оптимизация указанной задачи может привести к асимптотически устойчивой эволюции.

Предлагаемый алгоритм основан на робастном MPC и концепции инвариантного эллипсоида [1], [9]. На шаге 1 выполняется минимизация верхней границы (γ_0) функции Ляпунова для переменных начального состояния x_0 и выполняется неравенство $x_0^T P_0 x_0 \leq \gamma_0$. Полученное подмножество пространства состояний $x \in \mathbb{R}^n$, $\chi_f = \{x | x^T X_0^{-1} x \leq 1\}$ становится инвариантным эллипсоидальным терминальным ограничивающим набором переменных состояния. И γ_0 также становится верхней границей функции Ляпунова для LPV системы, решая предложенную задачу оптимизации на шаге 2.

Согласно теории оптимизации LMI [3], вычислительные затраты на самые быстрые алгоритмы внутренней точки растут с $N \times J^3$; где N – общий размер строки LMI, а J – общее количество переменных решения. Учитывая задачу минимизации (19.1), общий размер строки LMI (19.2) – (19.5) был уменьшен по сравнению с размером строки LMI (8.2) – (8.5) на каждой итерации. Таким образом значительно снижается вычислительная нагрузка [20-25].

Итак, рассматривали систему LPV с $[A(p)|B(p)]$, варьирующуюся в многограннике Ω (выпуклой оболочке) вершин $[A(1)|B(2), A(2)|B(2), \dots, A(L)|B(L)]$. Предположим, что на систему накладываются ограничения на ввод и вывод (3). Матрица обратной связи по состоянию F_k в законе управления $u_k = F_k x_{k|k}$ задается $F_k = Y_k X_k^{-1}$, где $X_k > 0$ и Y_k получаются из решения линейной задачи минимизации цели (19.1), подвергнутого LMI (19.2) к (19.5). Тогда полученный закон управления робастно стабилизирует замкнутую систему асимптотически [12-14].

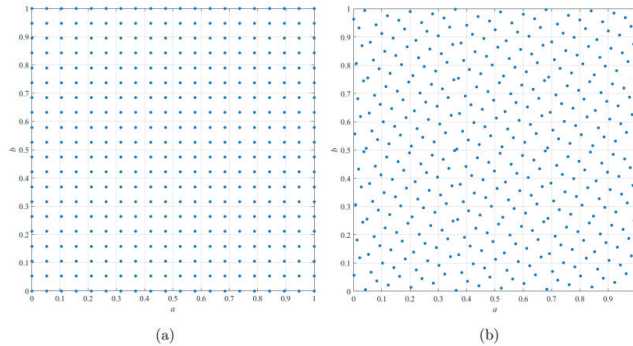
Построение модели тензорного произведения «(Tensor Product) TP»

Следующее кратко представлено для построения преобразования модели TP данной модели LPV, (подробные сведения см. в [4]).

Шаг 1: чтобы построить модель TP, данная модель LPV должна быть дискретизирована по пространству преобразований Ω , которое является ограниченным гипер-прямоугольным пространством. Неопределенные параметры системы меняются внутри этого пространства: $p \in \Omega: [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_N, b_N]$, а также на этом интервале определены весовые функции. Это означает, что полученная модель TP объяснима только в Ω .

Затем гиперпрямоугольное пространство должно быть дискретизировано путем определения сеток в Ω для генерации выборок. В [4] предлагается равноудаленное расположение сеток. В этом методе N-мерная гиперпрямоугольная эквидистантная сетка-сетка-сетка над замкнутым гиперкубом





Р и с. 1. Методы отбора проб

(а) образцы, созданные на одинаковом расстоянии, (б) Образцы последовательности Хаммерсли

Fig. 1. Sampling methods

(a) samples created at the same distance, (b) Hammersley sequence patterns

Ω Генерируется следующим образом

$$g_{n,m_n} = a_n + \frac{b_n - a_n}{M_n - 1} (m_n - 1), \quad n = 1, \dots, N$$

где, N - общее количество переменных параметров в Ω . a_n и b_n - это минимум и максимум элементов замкнутого гиперкуба в каждом измерении соответственно. Кроме того, $a_n \leq g_{n,m_n} \leq b_n$, $m_n = 1, \dots, M_n$, обозначает соответствующие положения линий сетки, а M_n - количество сеток в n^{th} измерении [4].

Для генерации выборок мы будем использовать квази-метод выборки Монте-Карло, также называется отбором последовательности Хаммерсли (HSS). Этот метод позволяет получить равномерно распределенные точки выборки в пространстве выборки без высокой корреляции между точками и без формирования регулярной сетки. Он имеет преимущество перед чисто детерминированными методами, поскольку детерминированные методы дают высокую точность только при увеличении количества выборок². На рисунке 1 показаны как методы равноудаленного отбора проб, так и HSS для одного и того же количества проб. Очевидно, что метод HSS (рис(б)) может покрыть пространство больше, чем метод эквидистантности (рис (а)). В результате, используя метод HSS, можно получить более точную модель с меньшим количеством образцов по сравнению с методом эквидистантности.

The Hammersley sequence основана на нотации обратной системы счисления. Простые числа обычно используются как основание системы счисления (\mathfrak{R}). Система счисления системы счисления целого числа (\mathcal{P}) вычисляется следующим образом

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_m \mathcal{P}_{m-1} \dots \mathcal{P}_1 \mathcal{P}_0$$

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \mathfrak{R}^0 + \mathcal{P}_1 \mathfrak{R}^1 + \dots + \mathcal{P}_m \mathfrak{R}^m$$

затем, поменяв местами цифры \mathcal{P} относительно десятичной точки, можно получить уникальную дробь от 0 до 1, известную как обратное число счисления счисления, как

$$\psi_{\mathfrak{R}}(\mathcal{P}) = 0.\mathcal{P}_0\mathcal{P}_1\dots\mathcal{P}_m,$$

$$\psi_{\mathfrak{R}}(\mathcal{P}) = \mathcal{P}_0\mathfrak{R}^{-1} + \mathcal{P}_1\mathfrak{R}^{-2} + \dots + \mathcal{P}_m\mathfrak{R}^{-m-1}$$

The Hammersley point of a k -dimensional hypercube получается как

$$X_k(\mathcal{P}) = \left[\frac{\mathcal{P}}{N}, \psi_{\mathfrak{R}_1}(\mathcal{P}), \psi_{\mathfrak{R}_2}(\mathcal{P}), \dots, \psi_{\mathfrak{R}_{k-1}}(\mathcal{P}) \right]$$

Этот вектор Hammersley point дает распределенные числа на единичном гиперкубе $[0, 1]^k$. Любой заданный домен $[a, b]$ теперь может быть сгенерирован путем сопоставления полученного числа от 0 до 1 с помощью HSS.

Пример:

Приведен простой пример, показывающий преимущество HSS перед методом равноудаленного отбора проб. Рассматривается следующая функция

$$f(x) = (1 + x_1^3 + x_2^{1.5})^2,$$

в котором пространство преобразований определяется как $\Omega = [1, 5] \times [1, 5]$. Оба метода используются для создания выборок с разным количеством сеток. Затем преобразование ТР используется для нахождения аппроксимации функции, $\hat{f}(x)$, и среднее значение ошибки между фактической функцией и приближенной функцией для различных номеров выборок приведено в таблице 1. Очевидно, что вычислительные затраты на преобразование моделирования ТР могут быть уменьшены за счет использования HSS вместо метода эквидистантности.

Т а б л и ц а 1. Среднее значение ошибки между фактической функцией и приближенной функцией

Table 1. Average error value between actual function and approximate function

Линии сетки	5x5	20x20	50x50
Методы			
Равноудаленность	3.14e ⁻²	1.21e ⁻⁶	3.59e ⁻⁹
HSS	2.32e ⁻²	1.59e ⁻⁷	2.41e ⁻¹¹

После создания точек выборки в Ω вектор точек сетки может быть определен следующим образом

$$g_{m_1, \dots, m_N} = \begin{pmatrix} g_{1m_1} \\ \vdots \\ g_{Nm_N} \end{pmatrix}$$

Матрица дискретизированной системы $S(\mathcal{P}) \in R^{(n+p) \times (n+m)}$ - тензор S^D (\mathcal{D} означает «дискретизированный») размером $M_1 \times \dots \times M_N \times (n+p) \times (n+m)$. Элементами S^D являются $S_{m_1, \dots, m_N} = S(g_{m_1, \dots, m_N})$

Шаг 2: на этом шаге HOSVD выполняется на полученном тензоре S^D

$$S^D = S \otimes_{n=1}^N U_n$$

где размер S равен $I_1 \times \dots \times I_N \times (n+p) \times (n+m)$, а I_n - количество сингулярных значений и векторов, полученных в каждом измерении. Теперь компактный HOSVD или сокращенный HOSVD можно использовать для уменьшения размера исходного тензора.

² Smith B. A., Kenny S. P., Crespo L. G. Probabilistic Parameter Uncertainty Analysis of Single Input Single Output Control Systems. NASA report TM-2005-213280. NASA, NTIS, 2005. 93 p. [Электронный ресурс]. URL: <https://ntrs.nasa.gov/citations/20050160469> (дата обращения: 07.09.2021).



Шаг 3: последний шаг преобразования модели ТР – найти весовые функции. В этом методе унитарная матрица U_n дает весовые функции. i_n^h вектор столбца u_{n,i_n} матрицы U_n определяет i -й вектор-столбец $w_{n,i_n}(p)$ для $W_n^D(p_n)$ которое оценивается при дискретизированном значении $p_n = g_{n,i_n}$.

Соответствующий тензор S^D для любого параметра p принимает вид

$$S^D = \sum_{i_1=1}^{I_1} \sum_{i_2=1}^{I_2} \dots \sum_{i_N=1}^{I_N} \prod_{n=1}^N w_{n,i_n}(p_n) S_{i_1, \dots, i_N}.$$

В литературе встречаются разные типы весовых функций [5-8]. В нашей работе весовые функции обладают следующими свойствами:

1- Сумма весовых функций для всех $p \in \Omega$ равна 1, то есть $\sum_{i_n=1}^{I_n} w_{i_n}(p) = 1$. Следовательно, весовая функция – нормализованная сумма (SN).

2- Значения весовых функций для всех Неотрицательных (NN) $p \in \Omega$, $w_{i_n}(p) \geq 0$

В этом случае весовые функции типа SN и NN, модель ТР включает вершины «Линейный инвариантный во времени» LTI, которые составляют выпуклую оболочку системной матрицы $S(p)$.

Заключение

В статье исследовался новый робастный дизайн модельного прогнозного управления с использованием LMI. В новом алгоритме будет особенно важна его практическая направленность, так как он направлен на уменьшение размеров доверительного множества с течением времени. В будущем планируется изучить и расширить практическую часть статьи в плане исследования свойств предложенного метода.

References

- [1] Morari M., Lee J.H. Model predictive control: past, present and future. *Computers & Chemical Engineering*. 1999; 23(4-5):667-682. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1016/S0098-1354\(98\)00301-9](https://doi.org/10.1016/S0098-1354(98)00301-9)
- [2] Fallah M.S., Long S.H., Xie W.F., Bhat R. Robust Model Predictive Control of Shimmy Vibration in Aircraft Landing Gears. *Journal of Aircraft*. 2008; 45(6):1872-1880. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.2514/1.30499>
- [3] Boyd S.P., El Ghaoui L., Feron E., Balakrishnan V. Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory. *SIAM studies in applied mathematics*. Vol. 15. University City Science Center, Philadelphia, PA: SIAM; 1994. (In Eng.)
- [4] Baranyi P., Yam Y., Várlaki P. Tensor Product Model Transformation in Polytopic Model-Based Control. Taylor & Francis Group, LLC; 2014. 262 p. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1201/9781315218045>
- [5] Wang M.H., Liu G., Hou H.Q. Polytopic Decomposition of the Linear Parameter-Varying Model Based on HOSVD. *Applied Mechanics and Materials*. 2012; 203:142-147. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/amm.203.142>
- [6] Baranyi P., Yam Y., Tikk D., Patton R.J. Trade-off between approximation accuracy and complexity: TS controller design via HOSVD based complexity minimization. In: Casillas J., Cordón O., Herrera F., Magdalena L. (eds.) *Interpretability Issues in Fuzzy Modeling. Studies in Fuzziness and Soft Computing*. Springer, Berlin, Heidelberg. 2003; 128:249-277. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-540-37057-4_11
- [7] Baranyi P. TP model transformation as a way to LMI-based controller design. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*. 2004; 51(2):387-400. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/TIE.2003.822037>
- [8] Baranyi P., Varkonyi-Koczy A.R., Yam Y., Patton R.J. Adaptation of TS fuzzy models without complexity expansion: HOSVD-based approach. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*. 2005; 54(1):52-60. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/TIM.2004.838108>
- [9] Kothare M.V., Balakrishnan V., Morari M. Robust constrained model predictive control using linear matrix inequalities. *Automatica*. 1996; 32(10):1361-1379. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(96\)00063-5](https://doi.org/10.1016/0005-1098(96)00063-5)
- [10] Cuzzola F.A., Geromel J.C., Morari M. An improved approach for constrained robust model predictive control. *Automatica*. 2002; 38(7):1183-1189. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(02\)00012-2](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(02)00012-2)
- [11] Wada N., Saito K., Saeki M. Model predictive control for linear parameter varying systems using parameter dependent Lyapunov function. *The 2004 47th Midwest Symposium on Circuits and Systems (MWSCAS '04)*. IEEE Press; 2004. p. iii133-iii136. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/MWSCAS.2004.1354309>
- [12] Balandin D.V., Kogan M.M. Multicriteria Robust Generalized H_2 and γ_0 Controllers with Application to Stabilization of a Rotor in Electromagnetic Bearings. *Automation and Remote Control*. 2018; 79(6):996-1012. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1134/S0005117918060024>
- [13] Balandin D.V., Kogan M.M. Synthesis of Optimal Robust H_∞ -Control by Convex Optimization Methods. *Automation and Remote Control*. 2004; 65(7):1099-1109. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1023/B:AURC.0000038716.40679.9b>
- [14] Balandin D.V., Kogan M.M. An algorithm for constructing a Lyapunov function in the synthesis of dynamic regulators of given order. *Differential Equations*. 2004; 40(11):1533-1538. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/s10625-005-0059-8>
- [15] Alessio A., Bemporad A. A Survey on Explicit Model Predictive Control. In: Magni L., Raimondo D.M., Allgöwer F. (eds.) *Nonlinear Model Predictive Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 2009; 384:345-369. Springer, Berlin, Heidelberg. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-01094-1_29
- [16] Herceg M., Kvasnica M., Fikar M. Parametric Approach to Nonlinear Model Predictive Control. In: Magni L., Raimondo D.M., Allgöwer F. (eds.) *Nonlinear Model Predictive Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences*. 2009; 384:381-389. Springer, Berlin, Heidelberg. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-01094-1_31



- [17] Camacho E.F, Bordons C. Nonlinear Model Predictive Control. In: Model Predictive control. *Advanced Textbooks in Control and Signal Processing*. Springer, London; 2007. p. 249-288. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-0-85729-398-5_9
- [18] Garcia C.E., Prett D.M., Morari M. Model predictive control: Theory and practice – A survey. *Automatica*. 1989; 25(3):335-348. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1016/0005-1098\(89\)90002-2](https://doi.org/10.1016/0005-1098(89)90002-2)
- [19] Dombrovskii V.V., Obedko T.Yu., Samorodova M.V. The closed-loop optimal feedback model predictive control policy for systems with stochastic correlated parameters. *Tomsk State University Journal of Control and Computer Science*. 2017; (39):11-16. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.17223/19988605/39/2>
- [20] Balandin D.V., Kogan M.M. An optimization algorithm for checking feasibility of robust H_{∞} -control problem for linear time-varying uncertain systems. *International Journal of Control*. 2004; 77(5):498-503. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1080/00207170410001674028>
- [21] Pakshin P.V. Exponential dissipativeness of the random-structure diffusion processes and problems of robust stabilization. *Automation and Remote Control*. 2007; 68(10):1852-1870. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1134/S0005117907100128>
- [22] Ferramosca A., Limon D., Alvarado I., Alamo T., Camacho E.F. MPC for tracking with optimal closed-loop performance. *Automatica*. 2009; 45(8):1975-1978. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2009.04.007>
- [23] Maciejowski J. Predictive Control With Constraints. Pearson; 2001. 256 p. (In Eng.)
- [24] Wang Y., Boyd S. Fast Model Predictive Control Using Online Optimization. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2010; 18(2):267-278. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/TCST.2009.2017934>
- [25] Wright S.J. Applying new optimization algorithms to model predictive control. *Proceedings of the 5th International Conference on Chemical Process Control. aiChE Symposium Series*. 1997; 93:1-10. Available at: <https://pages.cs.wisc.edu/~swright/papers/P561.pdf> (accessed 07.09.2021). (In Eng.)

*Поступила 07.09.2021; одобрена после рецензирования 16.10.2021; принята к публикации 24.11.2021.
Submitted 07.09.2021; approved after reviewing 16.10.2021; accepted for publication 24.11.2021.*

Об авторах:

Отман шериф Абделиллах, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-0291-7133>, abdouitmm@gmail.com

Баландин Дмитрий Владимирович, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Российская Федерация, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), доктор физико-математических наук, профессор, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-7727-5924>, dmitriy.balandin@itmm.unn.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the authors:

Abdelillah Otmane Cherif, Postgraduate Student of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603022, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0002-0291-7133>, abdouitmm@gmail.com

Dmitry V. Balandin, Professor of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603022, Russian Federation), Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-7727-5924>, dmitriy.balandin@itmm.unn.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

