

## Численное моделирование прогиба круглой мембраны под действием груза, расположенного со смещением относительно ее центра

М. Р. Бортковская, А. Н. Васильев\*, Т. Т. Каверзнева, П. А. Кожанова, В. В. Кудрявцева, Д. А. Тархов, Е. С. Чёрная

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

\* a.n.vasilyev@gmail.com

### Аннотация

В работе рассматривается задача о прогибе круглой мембраны под действием груза, расположенного на некотором расстоянии от ее центра. Задача состоит в получении экспериментальных данных о прогибе мембраны и построении по относительно небольшой выборке экспериментальных точек полуэмпирических математических моделей для определения величины прогиба мембраны в любой заданной точке ее поверхности. Прогиб мембраны в зависимости от координаты можно с приемлемой точностью описать уравнением Лапласа. В процессе работы получено точное решение уравнения Лапласа с помощью метода, основанного на конформном отображении, и приближенное решение – с помощью метода нейросетевого моделирования. Расчеты проведены для случаев использования двух грузов различной массы. В результате работы получено распределение прогиба мембраны с известными характеристиками в зависимости от координаты под действием груза определенной массы. В методе, основанном на конформном отображении, решение представляет собой ряд. С увеличением количества членов частичной суммы ряда, аппроксимирующей решение, оно становится более точным, но при этом менее устойчивым к погрешностям, вносимым экспериментальными данными. Метод нейросетевого моделирования является более устойчивым и приводит к решению, которое лучше согласуется с экспериментом. Отличие расчетных данных от экспериментальных при этом на порядок меньше по сравнению с результатами, полученными методом на базе конформного отображения.

**Ключевые слова:** круглая мембрана, прогиб мембраны, уравнение Лапласа, конформное отображение, нейросетевое моделирование, полуэмпирическая модель

*Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

**Для цитирования:** Численное моделирование прогиба круглой мембраны под действием груза, расположенного со смещением относительно ее центра / Бортковская М. Р., Васильев А.Н., Каверзнева Т. Т. [и др.]. – DOI 10.25559/SITITO.17.202103.633-641 // Современные информационные технологии и ИТ-образование. – 2021. – Т. 17, № 3. – С. 633-641.

© Бортковская М. Р., Васильев А. Н., Каверзнева Т. Т., Кожанова П. А., Кудрявцева В. В., Тархов Д. А., Чёрная Е. С., 2021



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Modeling the Deflection of Circular Membrane Effected by a Cargo Positioned Asymmetrically Relative to the Center

M. R. Bortkovskaya, A. N. Vasilyev\*, T. T. Kaverzneva, P. A. Kozhanova, V. V. Kudryavtseva, D. A. Tarkhov, E. S. Chernaya

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation  
29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russian Federation

\* a.n.vasilyev@gmail.com

### Abstract

The paper considers the problem of deflection of a circular membrane under the action of a load located at some distance from its center. The task consists in obtaining experimental data on the membrane deflection and constructing semi-empirical mathematical models based on a relatively small sample of experimental points to determine the magnitude of the deflection of the membrane at any given point on its surface. The deflection of the membrane, depending on the coordinate, can be described with acceptable accuracy by the Laplace equation. In the process of work, an exact solution of the Laplace equation was obtained using a method based on conformal mapping, and an approximate solution was obtained using the neural network modeling method. Calculations were carried out for cases of using two loads of different weights. As a result of the work, the distribution of the deflection of the membrane with known characteristics is obtained depending on the coordinate under the action of a load of a certain mass. In a method based on conformal mapping, the solution is a series. With an increase in the number of terms of the partial sum of the series approximating the solution, it becomes more accurate, but at the same time less resistant to errors introduced by experimental data. The neural network modeling method is more stable and leads to a solution that better agrees with the experiment. The difference between the calculated and experimental data is an order of magnitude smaller compared to the results obtained by the method based on conformal mapping.

**Keywords:** circular membrane, membrane deflection, the Laplace equation, conformal mapping, neural network modeling, semi-empirical model

*The authors declare no conflict of interest.*

**For citation:** Bortkovskaya M.R., Vasilyev A.N., Kaverzneva T.T., Kozhanova P.A., Kudryavtseva V.V., Tarkhov D.A., Chernaya E.S. Modeling the Deflection of Circular Membrane Effected by a Cargo Positioned Asymmetrically Relative to the Center. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021; 17(3):633-641. DOI: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202103.633-641>



## Введение

Широкое применение материалов на тканевой основе обуславливает необходимость разработки и применения методов моделирования их поведения под действием нагрузки. Моделирование таких явлений обычно осуществляется с помощью дифференциальных уравнений с сопутствующими граничными условиями, начальными условиями и т.д.<sup>1</sup> Существует множество подходов к решению поставленной задачи, среди которых мы можно назвать метод опорных векторов (SVM) [1], оптимизацию роя частиц [2], выборку по важности с высокой точностью [3], искусственные нейронные сети (ANN) для решения уравнений в частных производных как для краевых, так и для начальных задач [4-6], [12].

Задача измерения прогиба направлена на изучение поведения материала в зависимости от расстояния между рассматриваемой точкой объекта и его центром. Мембраны часто используются в манометрах с эластичными элементами. Они достаточно чувствительные и могут измерять уровень давления в широком диапазоне. Для изготовления мембран применяются различные материалы: высококачественная сталь и бронза, а также резиновые, пластиковые или нейлоновые нити. В нашем случае это эластичная мембрана, изготовленная из пожарного батута. Благодаря плетеной структуре и эластичности материала мембрана имеет направления симметрии, аналогичные структуре обычных тканей<sup>2</sup> [7-11].

## Цель исследования

Выполнить измерения прогиба мембраны при положении груза, смещенном относительно ее центра. Построить модели прогиба мембраны под действием груза на основе относительно небольшой выборки экспериментальных данных с использованием полумпирических математических моделей: метода, основанного на конформном отображении, и метода нейросетевого моделирования. Оценить пригодность полученных моделей для расчета прогиба мембраны с конкретными характеристиками в любой точке ее поверхности.

## Методика эксперимента

Для достижения цели работы использовались полумпирические модели, основанные на математических моделях. Одним из этапов получения решения задачи стало решение уравнения Лапласа.

При варьировании специфических параметров модель может быть использована для расчета прогиба мембран различных размеров, разной массы груза и т.д. Сначала выбирается решение, соответствующее экспериментальным данным, затем это решение используется для расчета прогиба в любой точке с заданными полярными координатами  $(r, \varphi)$  для конкретной мембраны с грузом определенной массы с заданным положением на поверхности мембраны.

Экспериментальный метод, как одна из основных частей нашего исследования, требует оборудования, изготовленного с высокой точностью, и равномерного натяжения мембраны, при котором ее поверхность параллельна полу. Соответствующие условия обеспечивают достаточную точность измерения прогиба. Измерения проводились точках, расположенных вокруг груза. Заранее были нарисованы координатные линии и сделана разметка интервалов через каждые 10 см. Экспериментальная установка изготовлена из дерева, мембрана - из эластана, все измерения выполнены с помощью лазерного уровня.

## Методика вычислений

Рассматривается круглая мембрана, на которой расположен груз на некотором расстоянии от ее центра. Область под грузом также считается круглой. Ставится задача: рассчитать величину прогиба мембраны  $h = h(r, \varphi)$  и сравнить результаты расчета по модели с экспериментальными данными. Начальные условия следующие: известен радиус мембраны  $R$ , радиус  $r_0$  области под грузом, расстояние  $a$  от центра мембраны до центра нагруженной области и вес мембраны  $m$ . Тем самым выясним возможность применения предлагаемой модели для данного объекта.  $r, \varphi$  - полярные координаты, полярная ось проведена через центры мембраны и нагруженной области в направлении от центра мембраны к центру области под грузом, полюс расположен в центре мембраны;  $R > a + r_0 > 2r_0$ . Масса мембраны мала по сравнению с массой груза. Для расчета прогиба используем уравнение Лапласа:

$$h''_{xx} + h''_{yy} = 0 \quad (1)$$

и решаем для него первую краевую задачу в области  $D = \{(x, y) | (x+a)^2 + y^2 \geq r_0^2, x^2 + y^2 \leq R^2\}$  (эксцентрическое кольцо). На окружности  $\{x^2 + y^2 = R^2\}$  граничное условие будет  $h \equiv 0$  (прогиб на краю мембраны нулевой), на окружности  $\{(x+a)^2 + y^2 = r_0^2\}$  граничное условие неизвестно, и мы в дальнейшем воспользуемся экспериментальными данными для получения приближенного решения в отсутствие этого граничного условия.

Сделаем в уравнении (1) замену переменных  $u = u(x, y), v = v(x, y)$  такую, чтобы выполнить конформное отображение области  $D$  в концентрическое кольцо  $D_1 = \{(u, v) | \rho_0^2 \leq u^2 + v^2 \leq 1\}$ . Для построения такого отображения удобно рассмотреть дробно-линейную функцию комплексной переменной вида  $w = k \frac{Az + B}{A_1z + B_1}$ , где  $z = x + iy$ ,

$w = w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Коэффициенты этой функции легко найти, зная отображаемую область и ее образ. В нашем слу-

$$w = k \frac{2az + R^2 + a^2 - r_0^2 - \sqrt{(R^2 + a^2 - r_0^2)^2 - 4a^2R^2}}{2az + R^2 + a^2 - r_0^2 + \sqrt{(R^2 + a^2 - r_0^2)^2 - 4a^2R^2}} \quad (2)$$

Коэффициент  $k$  можно выбрать так, чтобы окружность

<sup>1</sup> Колпак Е. П., Мальцева Л. С. Большие деформации резиновых мембран [Электронный ресурс] // Молодой ученый. 2014. № 16. С. 78-84. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=22148881> (дата обращения: 20.07.2021).

<sup>2</sup> Соколов А. «Комплексная безопасность – 2016»: батуты для спасения [Электронный ресурс] // Оружие России. 04.01.16. URL: <https://www.arms-expo.ru/news/novye-razrabotki/kompleksnaya-bezopasnost-2016-batuty-dlya-spaseniya-> (дата обращения: 20.07.2021).



$\{x^2 + y^2 = R^2\}$  отображалась на единичную окружность  $\{u^2 + v^2 = 1\}$ :

$$k = \frac{\sqrt{(R+a)^2 - r_0^2} + \sqrt{(R-a)^2 - r_0^2}}{\sqrt{(R+a)^2 - r_0^2} - \sqrt{(R-a)^2 - r_0^2}}$$

(вещественное положительное число).

Используя обозначения

$Q_{\pm} = R^2 + a^2 - r_0^2 \pm \sqrt{(R^2 + a^2 - r_0^2)^2 - 4a^2 R^2}$ , можно записать полученные формулы в удобном для вычислений виде:

$$w = k \frac{2az + Q_{-}}{2az + Q_{+}}, \quad k = \frac{Q_{-}}{2aR}.$$

Граница нагруженной области  $\{(x+a)^2 + y^2 = r_0^2\}$  отображается на окружность  $\{u^2 + v^2 = \rho_0^2\}$ , радиус  $\rho_0$  определен уже построенным отображением (2):

$$\rho_0 = k \frac{\sqrt{R^2 - (a-r_0)^2} - \sqrt{R^2 - (a+r_0)^2}}{\sqrt{R^2 - (a-r_0)^2} + \sqrt{R^2 - (a+r_0)^2}}.$$

Поскольку функция комплексной переменной (2) дифференцируема в области  $D$ , используя условия Коши-Римана, видим, что построенная нами замена переменных приводит уравнение Лапласа к виду  $((u'_y)^2 + (v'_y)^2)(h''_{uu} + h''_{vv}) = 0$ , то есть после замены переменных мы снова приходим к уравнению Лапласа  $h''_{uu} + h''_{vv} = 0$ , решения которого уже надо рассматривать в замкнутой области  $D_1$  (концентрическое кольцо).

Теперь удобно перейти к полярным координатам  $(\rho, \theta)$  на плоскости  $\{(u, v)\}$ :  $u = \rho \cos \theta, v = \rho \sin \theta$ , и решать уравнение Лапласа в полярных координатах

$$\rho_0 = k \frac{\sqrt{R^2 - (a-r_0)^2} - \sqrt{R^2 - (a+r_0)^2}}{\sqrt{R^2 - (a-r_0)^2} + \sqrt{R^2 - (a+r_0)^2}}. \quad (3)$$

Его решение записывается в виде ряда

$$h(\rho, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + D_0 \ln \frac{1}{\rho} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho^n} (L_n \cos n\theta + M_n \sin n\theta) \quad (4)$$

Коэффициенты решения (4) можно найти, исходя из граничных условий задачи.

Используя нулевое граничное условие на внешней окружности  $\{u^2 + v^2 = 1\}$ , то есть условие  $h(1, \theta) = 0$  при  $\theta \in [0, 2\pi]$ , найдем  $A_0 = 0, A_n + L_n = 0, B_n + M_n = 0, n = 1, 2, \dots$ , поэтому решение (4) можно записать в виде:

$$h(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho^n - \frac{1}{\rho^n}\right) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + D_0 \ln \frac{1}{\rho} \quad (5)$$

Подставим в формулу (5) выражения «новых» полярных координат через «старые», которые получаются из формулы дробно-линейного отображения (2):

$$\rho = \rho(r, \varphi) = k \sqrt{\frac{4a^2 r^2 + 4arQ_{-} \cos \varphi + Q_{-}^2}{4a^2 r^2 + 4arQ_{+} \cos \varphi + Q_{+}^2}} \quad \text{и}$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r \sqrt{(R^2 + a^2 - r_0^2)^2 - 4R^2 a^2} \sin \varphi}{a(R^2 + r^2) + r(R^2 + a^2 - r_0^2) \cos \varphi}.$$

Тем самым будет получена запись решения непосредственно для точек исходной области  $D$  с полярными координатами  $\rho, \varphi$ .

Коэффициенты  $A_n, B_n, D_0$  ищем методом наименьших квадра-

тов по экспериментальным данным. Для этого вместо ряда (5) рассматриваем конечную сумму

$$h(\rho, \theta) = \sum_{n=1}^m \left(\rho^n - \frac{1}{\rho^n}\right) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + D_0 \ln \frac{1}{\rho} \quad (6)$$

и, выбираем коэффициенты, решая задачу минимизации  $\sum_{k=1}^l (h(r_k, \varphi_k) - \tilde{h}(r_k, \varphi_k))^2$ , здесь  $\tilde{h}(r_k, \varphi_k) = \tilde{h}_k$  - значения проги-

ба, измеренные в эксперименте в нескольких ( $l$ ) точках, ближайших к нагруженной области. Для решения этой задачи нужно решить СЛАУ с симметричной матрицей коэффициентов  $M = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^{2m+1}$ , при  $1 \leq i \leq m$

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^l \left(\rho_k^i - \frac{1}{\rho_k^i}\right) \cdot \left(\rho_k^j - \frac{1}{\rho_k^j}\right) \cos(i\theta_k) \cos(j\theta_k), & i \leq j \leq m, \\ \sum_{k=1}^l \left(\rho_k^i - \frac{1}{\rho_k^i}\right) \cdot \left(\rho_k^{j-m} - \frac{1}{\rho_k^{j-m}}\right) \cos(i\theta_k) \sin((j-m)\theta_k), & m+1 \leq j \leq 2m, \\ -\sum_{k=1}^l (\ln \rho_k) \cdot \left(\rho_k^i - \frac{1}{\rho_k^i}\right) \cdot \cos(i\theta_k), & j = 2m+1, \end{cases}$$

при  $m+1 \leq i \leq 2m$

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \sum_{k=1}^l \left(\rho_k^{i-m} - \frac{1}{\rho_k^{i-m}}\right) \cdot \left(\rho_k^{j-m} - \frac{1}{\rho_k^{j-m}}\right) \sin((i-m)\theta_k) \cdot \sin((j-m)\theta_k), & i \leq j \leq 2m, \\ -\sum_{k=1}^l (\ln \rho_k) \cdot \left(\rho_k^{i-m} - \frac{1}{\rho_k^{i-m}}\right) \cdot \sin((i-m)\theta_k), & j = 2m+1, \end{cases}$$

$$\mu_{2m+1, 2m+1} = \sum_{k=1}^l \ln^2 \rho_k,$$

и столбцом правых частей, где  $B = (b_1, \dots, b_{2m+1})^T$ ,

$$b_i = \begin{cases} \sum_{k=1}^l \tilde{h}_k \cdot \left(\rho_k^i - \frac{1}{\rho_k^i}\right) \cos(i\theta_k), & i = 1, \dots, m, \\ \sum_{k=1}^l \tilde{h}_k \cdot \left(\rho_k^{i-m} - \frac{1}{\rho_k^{i-m}}\right) \sin((i-m)\theta_k), & i = m+1, \dots, 2m, \\ -\sum_{k=1}^l \tilde{h}_k \cdot \ln \rho_k, & i = 2m+1. \end{cases}$$

В частности, при  $m=1$  матрица  $M$  имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^l \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right)^2 \cos^2 \theta_k & \sum_{k=1}^l \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right)^2 \cos \theta_k \cdot \sin \theta_k & -\sum_{k=1}^l (\ln \rho_k) \cdot \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right) \cos \theta_k \\ \sum_{k=1}^l \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right)^2 \cos \theta_k \cdot \sin \theta_k & \sum_{k=1}^l \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right)^2 \sin^2 \theta_k & -\sum_{k=1}^l (\ln \rho_k) \cdot \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right) \sin \theta_k \\ -\sum_{k=1}^l (\ln \rho_k) \cdot \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right) \cos \theta_k & -\sum_{k=1}^l (\ln \rho_k) \cdot \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right) \sin \theta_k & \sum_{k=1}^l \ln^2 \rho_k \end{pmatrix}$$

а столбец правых частей

$$B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^l \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right) \tilde{h}_k \cos \theta_k \\ \sum_{k=1}^l \left(\rho_k - \frac{1}{\rho_k}\right) \tilde{h}_k \sin \theta_k \\ -\sum_{k=1}^l \tilde{h}_k \ln \rho_k \end{pmatrix}.$$

Для получения достаточно точного решения может потребоваться рассмотрение большого числа членов частичной суммы ряда. Однако при этом система становится плохо обусловленной, а решение менее устойчивым и более чувствительным к ошибкам, вносимым экспериментальными данными. Устойчивое решение может быть получено при использовании нейросетевого моделирования [13-20]. Найдем решение уравнения (1) в виде нейронной сети на основе радиальных базисных функций (RBF)  $h(x, y, c, \mathbf{a}_i) = \sum_{i=1}^n c_i v(x, y, \mathbf{a}_i)$ . Парамет-

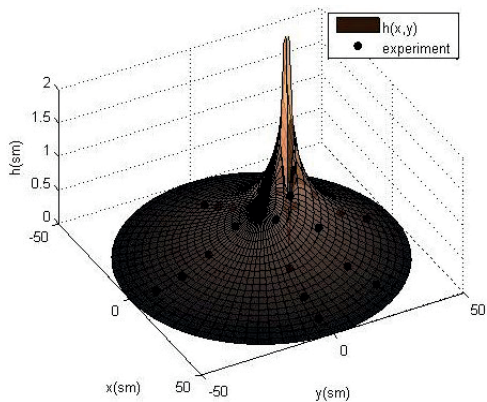
тры  $\mathbf{a}_i$  наряду с параметрами  $c_i$  обычно подбираются в процессе обучения нейронной сети. Процесс обучения заключается в минимизации функционала ошибок  $J = J_1 + \delta J_2 + \tilde{\delta} J_3$ , здесь



$J_1$  характеризует оценку удовлетворения полученного решения уравнению Лапласа,  $J_2$  – граничным условиям,  $J_3$  – экспериментальным данным (содержит соответствующие слагаемые). В рассматриваемой задаче  $J_1 = \sum_{j=1}^M (h''_{xx} + h''_{yy})(x_j, y_j)^2$ ,  $J_2 = \sum_{k=1}^K h^2(x'_k, y'_k)$ ,  $J_3 = \sum_{k=1}^p (h(\tilde{x}_k, \tilde{y}_k) - h_k)^2$ . Весовые множители  $\delta > 0$ ,  $\tilde{\delta} > 0$  учитывают вклад соответствующих слагаемых в функционал ошибок. В вычислениях мы использовали гауссову базисную функцию  $\mathcal{V}$  вида  $\exp(-b((x - d_1)^2 + (y - d_2)^2))$ .

## Результаты расчетов

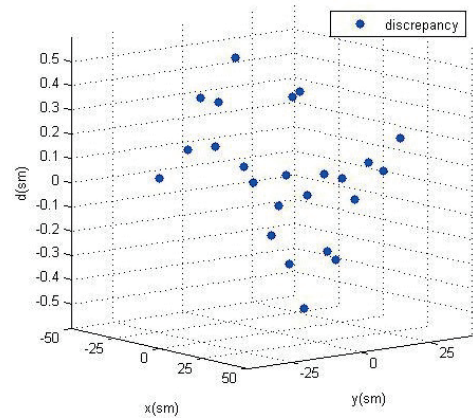
В работе рассмотрены два условия задачи. В первом случае использован груз массой 300 г, во втором случае – 100 г. Грузы имеют круглую форму, диаметр составляет 3.95 см. Положение обоих грузов одинаковое, расстояние от центра мембраны  $a = 10$  см. Радиус мембраны  $R = 50$  см. Получено точное численное решение, основанное на конформном отображении при массе груза 300 г (по 24 точкам). Соответствующие коэффициенты решения в формуле (6):  $A_1 = 0.0000395$ ,  $B_1 = 0.0003628$ ,  $D_0 = 0.0053$ , параметр  $m = 1$ . На рис. 1 приведена зависимость величины прогиба мембраны от координаты, на рис. 2 – отличие результата численных расчетов от экспериментальных данных. Максимальное отклонение составляет 0.5 см, что относительно много, для данного варианта расчетов, в целом согласование расчета и эксперимента можно считать удовлетворительным.



Р и с. 1. Точное численное решение. Вес груза 300 г.  $m = 1$

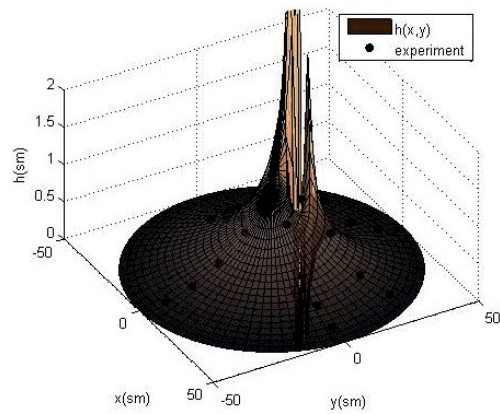
Fig. 2. The difference between the exact numerical solution and experimental measurements. Cargo weight 300 g.  $m = 1$

В целях получения более точного решения было рассмотрено большее число членов частичной суммы ряда (6), соответствующие коэффициенты  $A_1 = -0.0001$ ,  $A_2 = 0.00000014$ ,  $B_1 = -0.00013$ ,  $B_2 = 0.00011$ ,  $D_0 = 0.0043$ , параметр  $m = 2$ . Решение представлено на рис. 3. По рис. 4 видно, что ошибка упала почти в 2 раза (по сравнению с рис. 2). Максимальное отклонение составляет 0.3 см (рис. 4), среднеквадратичное отклонение – 0.15 см. Результат расчетов значительно лучше согласуется с экспериментом. При этом число обусловленности матрицы системы для нахождения коэффициентов решения (6), основанное на второй норме, выросло до  $10^{11}$  (при  $m = 1$  оно составляет порядка  $10^4$ ).



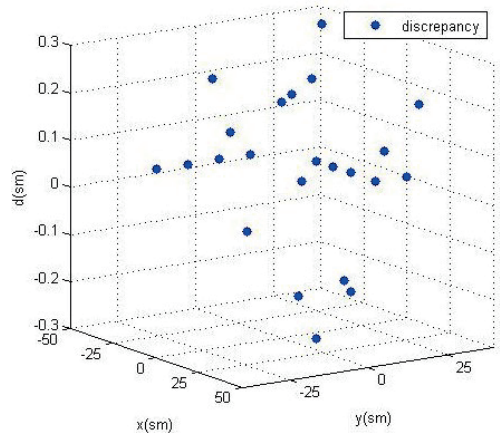
Р и с. 2. Отличие точного численного решения от экспериментальных измерений. Вес груза 300 г.  $m = 1$

Fig. 2. The difference between the exact numerical solution and experimental measurements. Cargo weight 300 g.  $m = 1$



Р и с. 3. Точное численное решение. Вес груза 300 г.  $m = 2$

Fig. 3. Exact numerical solution. Cargo weight 300 g.  $m = 2$

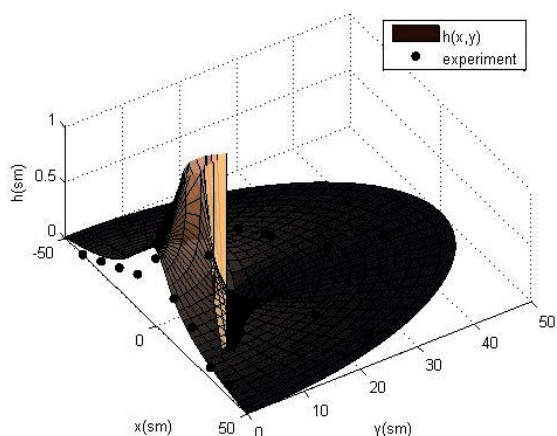


Р и с. 4. Отличие точного численного решения от экспериментальных измерений. Вес груза 300 г.  $m = 2$

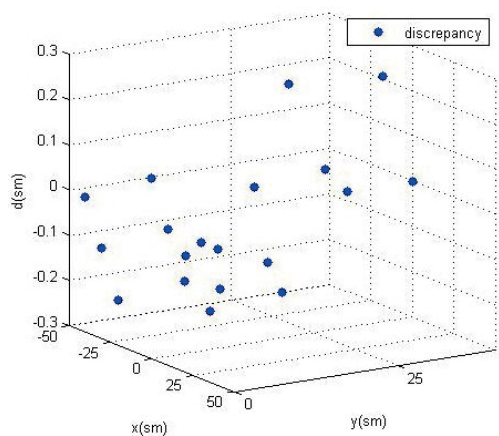
Fig. 4. The difference between the exact numerical solution and experimental measurements. Cargo weight 300 g.  $m = 2$



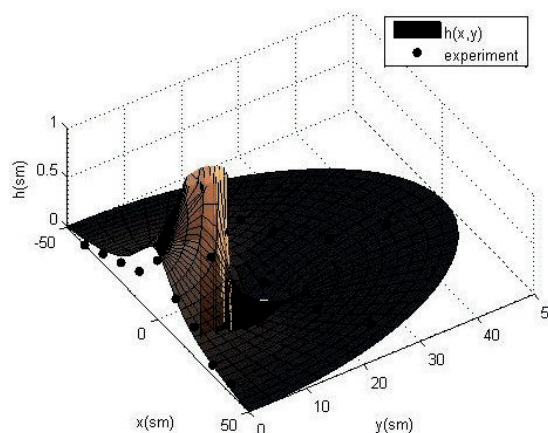
Также получено точное численное решение, основанное на конформном отображении при массе груза 100 г. Соответствующие коэффициенты решения в формуле (6):  $A_1 = -0.00076$ ,  $B_1 = 0.000246$ ,  $D_0 = 0.0021$  при параметре  $m = 1$  (визуализация решения на рис. 5) и  $A_1 = -0.0011$ ,  $A_2 = 0.000037$ ,  $B_1 = -0.000212$ ,  $B_2 = 0.0000075$ ,  $D_0 = 0.0015$  при  $m = 2$  (решение на рис. 7). На рис. 6 и 8 продемонстрировано отличие результатов численных расчетов от экспериментальных данных, в обоих случаях максимальное отклонение составило 0.3 см, среднеквадратичное отклонение 0.13 см и 0.19 см соответственно. В случае, когда рассматривается воздействие груза меньшей массы, повышение точности решения за счет рассмотрения большего числа членов частичной суммы ряда улучшений не дало, однако полученные результаты достаточно хорошо согласуются с экспериментом [21-25].



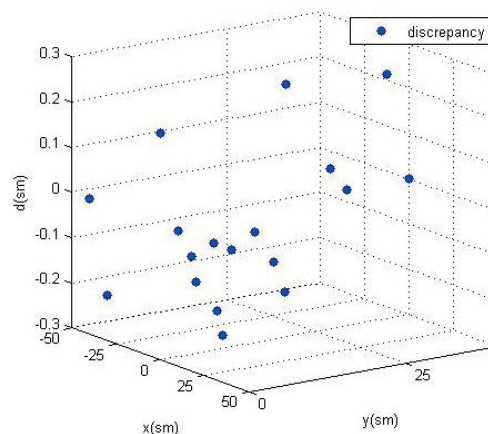
Р и с. 5. Точное численное решение. Вес груза 100 г.  $m = 1$   
F i g. 5. Exact numerical solution. Cargo weight 100 g.  $m = 1$



Р и с. 6. Отличие точного численного решения от экспериментальных измерений. Вес груза 100 г.  $m = 1$   
F i g. 6. The difference between the exact numerical solution and experimental measurements. Cargo weight 100 g.  $m = 1$



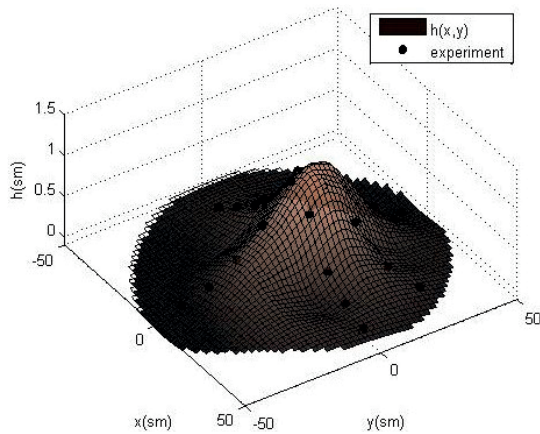
Р и с. 7. Точное численное решение. Вес груза 100 г.  $m = 2$   
F i g. 7. Exact numerical solution. Cargo weight 100 g.  $m = 2$



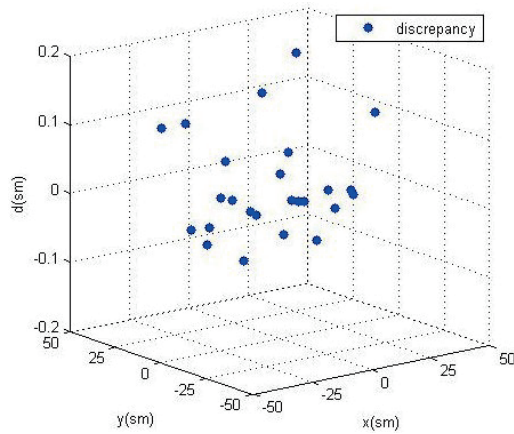
Р и с. 8. Отличие точного численного решения от экспериментальных измерений. Вес груза 100 г.  $m = 2$   
F i g. 8. The difference between the exact numerical solution and experimental measurements. Cargo weight 100 g.  $m = 2$

Результаты нейросетевого моделирования представлены на рис. 9 и 11, графики отклонения рассчитанных значений прогиба от экспериментальных – на рис. 10 и 12. Максимальное отклонение составляет порядка 0.2 см. При воздействии груза массой 300 г среднеквадратичное отклонение равно 0.05 см, при массе груза 100 г – 0.02 см. Оказалось, что при использовании нейросетевого моделирования среднеквадратичное отклонение результатов расчетов от экспериментальных данных получается существенно меньше, чем при применении метода, основанного на конформном отображении.

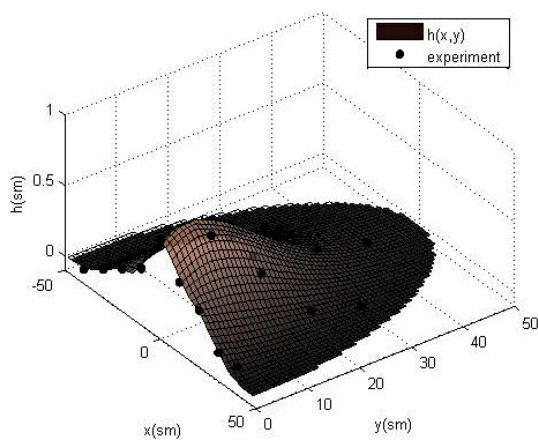




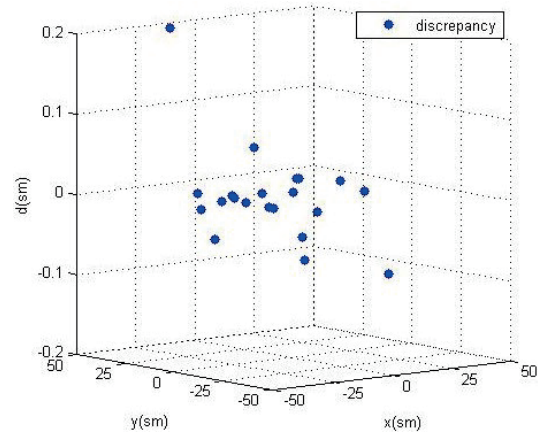
Р и с. 9. Приближенное нейросетевое решение. Вес груза 300 г  
F i g. 9. Approximate neural network solution. Cargo weight 300 g



Р и с. 10. Отличие приближенного нейросетевое решения от экспериментальных измерений. Вес груза 300 г  
F i g. 10. The difference between the approximate neural network solution and experimental measurements. Cargo weight 300 g



Р и с. 11. Приближенное нейросетевое решение. Вес груза 100 г  
F i g. 11. Approximate neural network solution. Cargo weight 100 g



Р и с. 12. Отличие приближенного нейросетевое решения от экспериментальных измерений. Вес груза 100 г  
F i g. 12. The difference between the approximate neural network solution and experimental measurements. Cargo weight 100 g

## Заключение

В работе рассмотрены два подхода к решению задачи о прогибе круглой мембраны под действием груза, расположенного со смещением от центра, с учётом экспериментальных данных. Первый подход базируется на конформном отображении и разложении в ряд. Второй подход основан на использовании метода нейросетевого моделирования.

Основной результат работы заключается в построении полуэмпирических математических моделей для определения величины прогиба мембраны в заданной точке ее поверхности. Метод нейросетевого моделирования приводит к более точному решению. Метод, основанный на конформном отображении, позволяет получить решение, хорошо согласующееся с экспериментальными данными, при условии рассмотрения большего числа членов частичной суммы ряда, в виде которого представлено решение. Этот факт становится более заметным при увеличении массы действующего груза. Однако увеличение числа членов частичной суммы ряда приводит к менее устойчивому решению и не всегда повышает степень согласования результатов расчетов с экспериментом. Таким образом, метод нейросетевого моделирования является более предпочтительным для построения модели прогиба мембраны с известными характеристиками, поскольку он более устойчив и позволяет получить более точное описание рассматриваемого физического процесса.



## References

- [1] Peherstorfer B., Willcox K. Dynamic data-driven reduced-order models. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2015; 291:21-41. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cma.2015.03.018>
- [2] Rosenblatt F. The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain. *Psychological Review*. 1958; 65(6):386-408. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1037/h0042519>
- [3] van der Maaten, L., Hinton, G. Visualizing Data Using t-SNE. *Journal of Machine Learning Research*. 2008; 9:2579-2605. (In Eng.)
- [4] Lagaris I.E., Likas A., Fotiadis D.I. Artificial neural networks for solving ordinary and partial differential equations. *IEEE Transactions on Neural Networks*. 1998; 9(5):987-1000. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/72.712178>
- [5] Lazovskaya T., Tarkhov D. Multilayer neural network models based on grid methods. *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*. 2016; 158:012061. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1088/1757-899X/158/1/012061>
- [6] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.R. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging. In: Ed. by B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko. *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence*. 2018; 736:138-144. Springer, Cham. (In Eng.) DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_21)
- [7] Hairer E., Norsett S.P., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problem. *Springer Series in Computational Mathematics*, vol. 8. Springer, Berlin; 1987. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-662-12607-3>
- [8] Lazovskaya T.V., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. Parametric Neural Network Modeling in Engineering. *Recent Patents on Engineering*. 2017; 11(1):10-15. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.2174/1872212111666161207155157>
- [9] Lozhkina O., Lozhkin V., Nevmerzhitsky N., Tarkhov D., Vasilyev A. Motor transport related harmful PM2.5 and PM10: from onroadmeasurements to the modelling of air pollution by neural network approach on street and urban level. *Journal of Physics: Conference Series*. 2016; 772:012031. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/772/1/012031>
- [10] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2019; 378:686-707. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- [11] Han J., Jentzen A., Weinan E. Solving high-dimensional partial differential equations using deep learning. *Proceedings of the National Academy of Sciences*. 2018; 115(34):8505-8510. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.1718942115>
- [12] Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. *Semi-Empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development*. Academic Press, Elsevier; 2019. 288 p. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1016/C2017-0-02027-X>
- [13] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.R. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging. In: Ed by. B. Kryzhanovsky, W. Dunin-Barkowski, V. Redko. *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. Studies in Computational Intelligence*. 2018; 736:138-146. Springer International Publishing. (In Eng.) DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_21)
- [14] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A. Mathematical Models of Complex Systems on the Basis of Artificial Neural Networks. *Nonlinear Phenomena in Complex Systems*. 2014; 17(3):327-335. Available at: <http://www.j-npcs.org/online/vol2014/v17no3p327.pdf> (accessed 20.07.2021). (In Eng.)
- [15] Egorchev M.V., Tiumentsev Y.V. Semi-Empirical Continuous Time Neural Network Based Models for Controllable Dynamical Systems. *Optical Memory and Neural Networks*. 2019; 28(3):192-203. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.3103/S1060992X1903010X>
- [16] Degroote J., Vierendeels J., Willcox K. Interpolation among reduced-order matrices to obtain parameterized models for design, optimization and probabilistic analysis. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*. 2010; 63(2):207-230. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1002/flid.2089>
- [17] Amsallem D., Zahr M., Farhat C. Nonlinear model order reduction based on local reduced-order bases. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2012; 92(10):891-916. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1002/nme.4371>
- [18] Chaturantabut S., Sorensen D. Nonlinear model reduction via discrete empirical interpolation. *SIAM Journal on Scientific Computing*. 2010; 32(5):2737-2764. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1137/090766498>
- [19] Mainini L., Willcox K.E. Sensitivity analysis of surrogate-based methodology for real time structural assessment. *Proceedings of the AIAA Modeling and Simulation Technologies Conference (AIAA SciTech 2015)*. Kissimme, Florida, AIAA; 2015. AIAA Paper 2015-1362. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2015-1362>
- [20] Rasheed A., San O., Kvamsdal T. Digital Twin: Values, Challenges and Enablers From a Modeling Perspective. *IEEE Access*. 2020; 8:21980-22012. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2970143>
- [21] Rai R., Sahu C.K. Driven by Data or Derived through Physics? A Review of Hybrid Physics Guided Machine Learning Techniques with Cyber-Physical System (CPS) Focus. *IEEE Access*. 2020; 8:71050-71073. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2020.2987324>
- [22] Frank M., Drikakis D., Charissis V. Machine-Learning Methods for Computational Science and Engineering. *Computation*. 2020; 8(1):15. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.3390/computation8010015>
- [23] Zjavka L., Snáel V. Composing and Solving General Differential Equations Using Extended Polynomial Networks. *2015 International Conference on Intelligent Networking and Collaborative Systems*. IEEE Press, Taipei, Taiwan; 2015. p. 110-115. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1109/IN-CoS.2015.28>





- [24] Gorev B.V., Lyubashevskaya I.V., Panamarev V.A., Iyavoynen S.V. Description of creep and fracture of modern construction materials using kinetic equations in energy form. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2014; 55(6):1020-1030. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894414060145>
- [25] Kuznetsov E.B., Leonov S.S. Technique for selecting the functions of the constitutive equations of creep and long-term strength with one scalar damage parameter. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 2016; 57(2):369-377. (In Eng.) DOI: <https://doi.org/10.1134/S0021894416020218>

*Поступила 20.07.2021; одобрена после рецензирования 27.08.2021; принята к публикации 04.09.2021.  
Submitted 20.07.2021; approved after reviewing 27.08.2021;  
accepted for publication 04.09.2021.*

#### Об авторах:

**Бортковская Мария Романовна**, доцент кафедры высшей математики, Физико-механический институт, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), кандидат физико-математических наук, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6696-8880>**, [bortkovskaya\\_mr@spbstu.ru](mailto:bortkovskaya_mr@spbstu.ru)

**Васильев Александр Николаевич**, профессор кафедры высшей математики, Физико-механический институт, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), доктор технических наук, профессор, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0227-0162>**, [a.n.vasilyev@gmail.com](mailto:a.n.vasilyev@gmail.com)

**Каверзнева Татьяна Тимофеевна**, доцент Высшей школы техноферной безопасности, Инженерно-строительный институт, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), кандидат технических наук, доцент, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7423-4892>**, [kaverzneva\\_tt@spbstu.ru](mailto:kaverzneva_tt@spbstu.ru)

**Кожанова Полина Алексеевна**, студент Физико-механического института, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1736-5914>**, [polinakozhanova@yandex.ru](mailto:polinakozhanova@yandex.ru)

**Кудрявцева Василиса Вадимовна**, студент Физико-механического института, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3031-3740>**, [vasilisa.kudryavtseva1997@gmail.com](mailto:vasilisa.kudryavtseva1997@gmail.com)

**Тархов Дмитрий Альбертович**, профессор кафедры высшей математики, Физико-механический институт, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), доктор технических наук, доцент, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9431-8241>**, [dtarkhov@gmail.com](mailto:dtarkhov@gmail.com)

**Чёрная Екатерина Сергеевна**, студент Физико-механического института, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2608-1673>**, [Chernaya.kotyk@gmail.com](mailto:Chernaya.kotyk@gmail.com)

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

#### About the authors:

**Maria R. Bortkovskaya**, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6696-8880>**, [bortkovskaya\\_mr@spbstu.ru](mailto:bortkovskaya_mr@spbstu.ru)

**Alexander N. Vasilyev**, Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russia), Dr.Sci. (Engineering), Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0227-0162>**, [a.n.vasilyev@gmail.com](mailto:a.n.vasilyev@gmail.com)

**Tatiana T. Kaverzneva**, Associate Professor of the Institute of Civil Engineering, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russia), Ph.D.(Engineering), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7423-4892>**, [kaverzneva\\_tt@spbstu.ru](mailto:kaverzneva_tt@spbstu.ru)

**Polina A. Kozhanova**, Student of the Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russia), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1736-5914>**, [polinakozhanova@yandex.ru](mailto:polinakozhanova@yandex.ru)

**Vasilisa V. Kudryavtseva**, Student of the Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russia), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3031-3740>**, [vasilisa.kudryavtseva1997@gmail.com](mailto:vasilisa.kudryavtseva1997@gmail.com)

**Dmitry A. Tarkhov**, Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St. Petersburg 195251, Russia), Dr.Sci. (Engineering), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9431-8241>**, [dtarkhov@gmail.com](mailto:dtarkhov@gmail.com)

**Ekaterina S. Chernaya**, Student of the Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., St.Petersburg 195251, Russia), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2608-1673>**, [Chernaya.kotyk@gmail.com](mailto:Chernaya.kotyk@gmail.com)

*All authors have read and approved the final manuscript.*

