УДК 510.64; 004.8
DOI: 10.25559/SITITO.17.202104.880-888

Научная статья

Интеллектуальный анализ больших данных: компьютерно ориентированный метод работы с семантикой суждений

Г. И. Горемыкина
ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова», г. Москва, Российская Федерация
Адрес: 117997, Российская Федерация, г. Москва, Стремянный пер., д. 36
Goremykina.GI@rea.ru

Аннотация

При проведении анализа больших объёмов данных с привлечением экспертов предметной области возникает проблема представления знаний, заключающаяся в описании смыслового содержания суждений с последующей их формализацией, автоматизированным построением логического вывода и компьютерной обработкой, целью которой является преобразование суждений в соответствии с их семантикой. В работе исследуется проблема представления знаний через построение семантики суждений на основе интуиционистской логики. Предлагается компьютерно ориентированный метод, позволяющий эффективно работать со смысловым содержанием суждений и получать компьютерно реализуемые интуиционистские выводы утверждений на основе трансляционного подхода с помощью конвертирования классических выводов в интуиционистские. Суть метода заключается в семантическом оценивании каждого суждения элементами специально подбираемой решётки. Метод позволяет автоматически переходить от выводимости (истинности) некоторого суждения в классической теории к выводимости (соответственно истинности) самого или близкого ему по смыслу суждения в соответствующей интуиционистской теории, если в качестве решёток выбирать полную булеву и полную гейтингову алгебры соответственно. Такой подход особенно актуален при обработке больших объёмов информации, так как позволяет избежать необходимости построения сложных интуиционистских выводов, что, в свою очередь, позволяет значительно увеличить скорость обработки данных. В работе предлагаемый метод используется при построении интуиционистских выводов в языке решёточно упорядоченных колец и при конвертации классической теории в интуиционистскую для многосортных алгебраических систем. Исследуются также особенности метода, доказываются соответствующие утверждения.

Ключевые слова: интеллектуальный анализ больших данных, представление знаний, семантика суждений, интеллектуальное моделирование, интуиционистская логика, глобальная истинность, *l*-кольцо, теория множеств, гейтинговозначный универсум

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Горемыкина Г. И. Интеллектуальный анализ больших данных: компьютерно ориентированный метод работы с семантикой суждений // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 4. С. 880-888. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.880-888

© Горемыкина Г. И., 2021

Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.

Original article

Big Data Mining: A Computer-Oriented Method of Working with the Semantics of Assertions

G. I. Goremykina
Plekhanov Russian University of Economics, Moscow, Russian Federation
Address: 36 Stremyanny lane, Moscow 117997, Russian Federation
Goremykina.GI@rea.ru

Abstract
The article considers the method of working with the semantics of judgments, its properties are investigated. With its help, it is possible to construct computer-implemented intuitionistic conclusions of statements due to the conversion of the corresponding classical conclusions (the semantic evaluation of which in a Boolean-valued universe is equal to one) into intuitionistic ones. This approach is especially relevant when processing large amounts of information, as it avoids the need to build complex intuitionistic conclusions, which, in turn, allows you to significantly increase the speed of data processing. In particular, the possibility of transferring the properties of l-rings to ordered rings and converting classical theory into intuitionistic theory for multi-grade algebraic systems is shown.

Keywords: big data mining, knowledge representation, semantics of statements, intelligent modeling, intuitionistic logic, global truth, *l*-ring, set theory, heyting-valued universe

The author declares no conflict of interest.

For citation: Goremykina G.I. Big Data Mining: A Computer-Oriented Method of Working with the Semantics of Assertions. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education.* 2021; 17(4):880-888. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.880-888

Введение

В работе предлагается компьютерно ориентированный метод работы с семантикой суждений. Суть метода заключается в семантическом оценивании каждого суждения элементами специально подбираемой решётки L. Если S – некоторое суждение, то соответствующий ему элемент $[\![S]\!] \in L$ называется семантической оценкой со значениями в L и объявляется его «смыслом» или «степенью достоверности суждения S». Суждение S называется глобально истинным, если $[\![S]\!] = 1$, и глобально ложным, если $[\![S]\!] = 0$, где 1 и 0 – наибольший и наименьший элементы решётки L соответственно. Семантическое оценивание может быть компьютерно реализовано, что даёт возможность эффективно работать со смысловым содержанием суждений.

Такой подход позволяет также автоматически переходить от выводимости (истинности) некоторого суждения в классической теории к выводимости (соответственно истинности) самого или близкого ему по смыслу суждения в соответствующей интуиционистской теории, если в качестве решёток выбирать полную булеву и полную гейтингову алгебры соответственно.

В работе представлены результаты, полученные на основе предлагаемого метода при построении интуиционистских выводов в языке решёточно упорядоченных колец и при конвертации классической теории в интуиционистскую для многосортных алгебраических систем. Исследованы также особенности метода, доказаны соответствующие утверждения.

Теоретический анализ

Обусловленная в условиях новой технологической революции неизбежностью решения задач в сложных и перспективных областях человеческой деятельности на стыке компьютерных наук, биологии и биоинформатики, или на стыке компьютерных и общественных наук необходимость обработки больших массивов разнородной и/или мало априорной информации, нередко имеющей высокую скорость обновления, индуцирует развитие интеллектуального анализа больших данных.

При проведении анализа больших объёмов данных с привлечением экспертов предметной области (биоинформатики, экономической информатики, финансовой информатики, оптимизации бизнес-процессов и др.) возникает проблема представления знаний, заключающаяся в описании смыслового содержания (семантики) суждений с последующей их формализацией, автоматизированным построением логического вывода и компьютерной обработкой, целью которой является преобразование суждений в соответствии с их семантикой.

Одним из современных подходов к созданию математической модели представления знаний является подход, в основу которого положена методология интеллектуального моделирования на базе того или иного представителя множества неклассических логик. Формализации знаний о выбранной предметной области на языках неклассических логик позволяют воспроизводить человеческий способ мышления, дают возможность построить фактические схемы рассуждений, которыми пользуются эксперты, и вывести новые свойства из данного набора гипотез. В работах [1;2] автором исследовалась проблема представления знаний через построение на базе нечёткой логики продукционных моделей, позволяющих представить знания в виде импликативных высказываний с использованием нечётких формулировок в антецедентах и консеквентах, и использующих в качестве логического вывода generalized modus ponens. В данной работе указанная проблема исследуется через построение семантики суждений на основе интуиционистской логики, на выбор которой повлияло наличие в ней таких свойств, как экзистенциальность и дизъюнктивность.

Формализация знаний на основе интуиционистской логики из-за отсутствия в ней законов исключённого третьего и снятия двойного отрицания осложняется тем, что суждения, выводимые в классической теории, иногда не являются таковыми в интуиционистской теории, или их выводимость затрудняется из-за быстрорастущего пространства поиска вывода.

Поэтому с интуиционистской логикой часто связывают две задачи:

- развитие в рамках данной логики обычной математики (построение выводов на основе схем аксиом и правил вывода);
- получение перевода $\varphi \to \varphi'$, при котором выводимость (или истинность) исходной формулы φ в теории с классической логикой влечёт выводимость (соответственно истинность) формулы φ' (близкой по смыслу к φ) в аналогичной теории с неклассической логикой.

В контексте первой задачи стоит отметить направление, в рамках которого разрабатывают системы автоматического доказательства теорем, которые применяются для автоматизированного поиска доказательств в различных формальных теориях. Отметим исследования В.А. Павлова, В.Г. Пака [3], Ф. Кунце [4].

В данной работе исследуется вторая задача. А.Н. Колмогоров [5] и К. Гёдель [6] решили её для исчисления предикатов. Предложенный ими негативный перевод $\varphi \to \varphi'$ состоит в том, что в определённых местах формулы φ необходимо добавить связки $\neg\neg$. Тогда, если $\vdash \varphi$, то $\mathrm{I}\vdash \varphi'$, где $\vdash$ – обозначает вывод в классическом исчислении предикатов, $\mathrm{I}\vdash$ – обозначает вывод в соответствующем интуиционистском исчислении предикатов.

Затем аналогичные исследования проводились для теории типов и теории множеств Цермело-Френкеля [7;8]. Значение этих результатов общеизвестно. Но их особенностью является то, что формула φ' существенно отличается от формулы φ. Кроме того, одно из принципиальных достоинств интуиционистской теории состоит в свойстве экзистенциальности: если $\mathrm{I}\vdash \exists x(\varphi(x))$, то можно предъявить терм t, индивидуально описывающий соответствующее x, так, что $\mathrm{I}\vdash \varphi(t)$. Здесь $\vdash$ и $\mathrm{I}\vdash$ обозначают соответственно классическую и интуиционистскую выводимости в теории типов или теории множеств. Однако это свойство «теряется», когда речь идёт об интуиционистской выводимости формулы вида $\neg\neg\exists x(\varphi(x))$.

В связи с этим появились исследования, в рамках которых пытаются не изменять или почти не изменять вид формулы φ при переходе от её классической выводимости к соответствующей интуиционистской, и во всяком случае, не добавлять в φ двойные отрицания. Для арифметики и для АЕ-арифметических формул теории множеств Цермело-Френкеля такой подход

реализуется в работе Х. Фридмана [8]. Другие описания конвертации переводов можно найти, например, в исследовании С. Хартонаса [9].
Всегда отмечаемая многими исследователями (например, [10;11]) тесная связь интуиционистской логики с теорией решеток позволила В.А. Любецкому [12] и Г. Такеути-С. Титани [13] предложить принципиально новый метод решения задачи получения перевода $\varphi \to \varphi'$— компьютерно ориентированный метод работы с семантикой суждений, суть которого заключается в семантическом оценивании каждого суждения элементами специально подбираемой решётки.

Методология исследования

В качестве классической теории множеств ZF рассматриваем теорию множеств Цермело-Френкеля с аксиомой ε –индукции: $(\forall x((\forall y \in x\varphi(y)) \Rightarrow \varphi(x)) \Rightarrow \forall x\varphi(x)$
вместо аксиомы фундирования и с Collection-аксиомой: $\forall x((\forall y \in x\exists z\varphi(y,z)) \Rightarrow \exists w\forall y \in x\exists z \in w\varphi(y,z))$
вместо аксиомы подстановки. В качестве соответствующей интуиционистской теории множеств ZFI рассматриваем теорию множеств ZF с элиминацией аксиомы исключённого третьего: $\varphi \vee \neg\varphi$.
Пусть Ω — произвольная полная гейтингова алгебра (сокращённо cHa). По Ω определяется гейтинговозначный универсум $V^{\Omega} : V^{\Omega} \rightleftharpoons \bigcup_{\alpha \in On} V_{\alpha}^{\Omega}$,

где On — класс всех ординалов, V_{α}^{Ω} — множество всех Ω-значных функций f с областью определения $D(f) \subseteq \bigcup_{\beta \in \alpha} V_{\beta}^{\Omega}$.

Обозначим $V_{<\alpha}^{\Omega} \rightleftharpoons \bigcup\left\{V_{\beta}^{\Omega} \middle| \beta \in \alpha\right\}$. Если элемент $f \in V^{\Omega}$, то $f \in V_{\alpha}^{\Omega}$ для некоторого ординала α, и для любого элемента g выполняется: если $g \in D(f)$, то $g \in V_{<\alpha}^{\Omega}$. Это даёт естественный спуск по трансфинитной индукции: если некоторое свойство справедливо для всех $g \in V_{<\alpha}^{\Omega}$, то его справедливость доказывается для всех $f \in V_{\alpha}^{\Omega}$.
Пусть $\Phi(V^{\Omega})$ — множество всех формул языка ZF, все свободные переменные которых замещены параметрами из V^{Ω}. Оценкой в языке ZF для Ω называют отображение вида $[\![\cdot]\!]^{\Omega} : \Phi(V^{\Omega}) \to \Omega$. Логические связки языка ZF моделируются операциями в для Ω.
Значение оценки для атомарных формул определяется следующим образом:

$$[\![f \in g]\!]^{\Omega} \rightleftharpoons \bigvee_{x \in D(g)} g(x) \wedge [\![f = x]\!]^{\Omega},$$

$$[\![f = g]\!]^{\Omega} \rightleftharpoons \bigwedge_{x \in D(f)} \left(f(x) \to [\![x \in g]\!]^{\Omega}\right) \wedge \bigwedge_{y \in D(g)} \left(g(y) \to [\![y \in f]\!]^{\Omega}\right).$$

Индукцией по связкам эта оценка продолжается на все формулы.
Возникает предикат глобальной истинности $[\![\ddot{o}(\overline{f})]\!]^{\Omega} \rightleftharpoons 1^{\Omega}$, где ф — предложение с параметрами $\overline{f}$ из V^{Ω}, 1^{Ω} — наибольший элемент в Ω.
Заменяя в определениях гейтинговозначного универсума V^{Ω} и оценки $[\![\cdot]\!]^{\Omega}$, cHa Ω на полную булеву алгебру (сокращённо cBa) B, получим модель классической теории множеств ZF — булевозначный универсум V^{B} и соответствующую оценку $[\![\cdot]\!]^{B}$ со значениями в cBa B.
Каждая полная гейтингова алгебра вложима в полную булеву алгебру[1] [14]. Рассмотрим одно из таких вложений, предложенное в [15]. Фиксируем произвольную полную гейтингову алгебру Ω и по ней, используя канонический способ, образуем соответствующую полную булеву алгебру $B \rightleftharpoons B(\Omega) \rightleftharpoons \left\{u \in \Omega \middle| \neg\neg^{\Omega} u = u\right\}$. Получаемую таким образом cBa называют алгеброй стабильных элементов.
Фиксируем отображение $\iota : \Omega \to B$, такое, что $\iota : u \mapsto J_u$, где $J_u : \Omega \to \Omega$ и $J_u : x \mapsto u \vee^{\Omega} x$. Это отображение обладает следующими свойствами:

1. $\forall u, v \in \Omega\left(\iota(u) = \iota(v) \Rightarrow u = v\right)$;
2. $\iota(0^{\Omega}) = 0^{B}, \quad \iota(1^{\Omega}) = 1^{B}$;
3. $\forall u, v \in \Omega\left(\iota(u \wedge^{\Omega} v) = \iota(u) \wedge^{B} \iota(u)\right)$;
4. $\forall \{u_{\alpha}\} \subseteq \Omega\left(\iota(\mathrm{V}^{\Omega} u_{\alpha}) = \mathrm{V}^{B} \iota(u_{\alpha})\right)$.

Каждая cBa является cHa. Поэтому свойства (1)-(4) указывают на то, что отображение ι есть инъективный cHa-морфизм, и, вследствие этого, дополнительно обладает ещё тремя свойствами:

5. $\forall \{u_{\alpha}\} \subseteq \Omega\left(\iota(\Lambda^{\Omega} u_{\alpha}) \leq \mathrm{V}^{B} \iota(u_{\alpha})\right)$;
6. $\forall u \in \Omega\left(\iota(\neg^{\Omega} u) \leq \iota(\neg^{B} u\right)$;
7. $\forall u, v \in \Omega\left(\iota(u \to^{\Omega} v) \leq \iota(u) \to^{B} \iota(u)\right)$.

Наличие у отображения $\iota : \Omega \to B$ указанных свойств позволяет с помощью отождествления cHa Ω и её образа $\iota(\Omega)$ заключить, что операции $\wedge, \vee, \mathrm{V}$ и константы 0, 1 в Ω совпадают с соответствующими операциями [19] и константами в B и $\forall \{u_{\alpha}\} \subseteq \Omega\left(\iota(\Lambda^{\Omega} u_{\alpha}) \leq \mathrm{V}^{B} \iota(u_{\alpha})\right)$; $\forall u, v \in \Omega\left(\iota(u \to^{\Omega} v) \leq \iota(u) \to^{B} \iota(u)\right)$.

Инъективный cHa-морфизм $\iota : \Omega \to B$ индуцирует отображение $\iota* : V^{\Omega} \to V^{B}$. Отождествляя V^{Ω} с его образом, получим:

1. $\forall f, g \in V^{\Omega}\left([\![f \in g]\!]^{\Omega} \leq [\![f \in g]\!]^{B}\right)$;
2. $\forall f, g \in V^{\Omega}\left([\![f = g]\!]^{\Omega} \leq [\![f = g]\!]^{B}\right)$;
3. $\forall x \forall f, g \in V^{\Omega}\left(\left([\![x = \{f, g\}]\!]^{\Omega} \leq [\![x = \{f, g\}]\!]^{B}\right) \wedge \left([\![x = < f, g >]\!]^{\Omega} \leq [\![x = < f, g >]\!]^{B}\right)\right)$.

Свойства отображений ι и $\iota*$ позволяют эффективно работать со смысловым содержанием суждений и получать компьютерно реализуемые интуиционистские выводы утверждений на основе трансляционного подхода с помощью конвертирования (перевода) классических выводов (семантическая оценка которых в булевозначном универсуме равна единице) в интуиционистские. Такой подход особенно актуален при обработке больших объёмов информации, так как позволяет избежать необходимости построения сложных интуиционистских выводов, что, в свою очередь, позволяет значительно увеличить скорость обработки данных. Если, например, сравнивать за-

[1] Биркгоф Г. Теория решеток. М.: Наука, 1984. 568 с.

дачи распознавания выводимости всего лишь в исчислениях высказываний: классическом и интуиционистском, то первая задача является NP-полной, а вторая — PSPACE-полной.

Полученные результаты

Рассмотрим, как предлагаемый метод используется при построении интуиционистских выводов в языке решёточно упорядоченных колец и при конвертации классической теории в интуиционистскую для многосортных алгебраических систем. Пусть $M \rightleftharpoons < M,+,\cdot,-,\leq,0,1 >$ — произвольное решёточно упорядоченное кольцо (= l-кольцо). Обозначим через $I(M)$ множество всех его L-идеалов, то есть двусторонних идеалов, являющихся выпуклой подрешёткой решётки[2] M ([16; 17]). Положив в $I(M)$, $\mathrm{V} i_\alpha \rightleftharpoons \sum i_\alpha$; $i \wedge j \rightleftharpoons i \cap j$; $\{0\}$ — нуль в $I(M)$; M — единица в $I(M)$, и, наделив множество $I(M)$ соответствующими атрибутами алгебраической системы, получим, полную гейтингову алгебру (сокращённо сНа) $I(M) \rightleftharpoons < I(M), \mathrm{V}, \wedge, \{0\}, M >$.
Элемент $i \in I(M)$ назовём дополняемым, если существует L-идеал j, такой, что $i \vee j = M$ и $i \wedge j = \{0\}$. Определим в полной гейтинговой алгебре $I(M)$ псевдодополнение $i^\perp$ как наибольший L-идеал, для которого $i \wedge i^\perp = \{0\}$. Заметим, что у дополняемого элемента i «дополнение» j единственно и совпадает с $i^\perp$, при этом $i \vee i^\perp = i + i^\perp = M$. Обозначим через $Com(M)$ множество всех дополняемых L-идеалов l-кольца M и введём на нём структуру булевой алгебры: $i \wedge j \rightleftharpoons i \cap j$; $i \vee j \rightleftharpoons i + j$; $\neg i \rightleftharpoons i^\perp$. Множество $Com(M)$ с введённой на ней структурой является булевой подрешёткой решётки $I(M)$.
Обозначив через T=$T(M)$ множество всех идеалов в $Com(M)$, введём на нём отношение порядка ≤ и операции $\wedge$, V, $\bar{0}$, $\bar{1}$, определив их следующим образом: $u \leq v \rightleftharpoons u \subseteq v$, $u \wedge v \rightleftharpoons u \cap v$, $\mathrm{V}X \rightleftharpoons \left\{ u_1 \vee \ldots \vee u_n \middle| \exists n \in \omega \exists x_1 \in X \ldots \exists x_n \in X \left(u_1 \in x_1 \& \ldots u_n \in x_n \right) \right\}$, $\bar{0} \rightleftharpoons < 0 >$, $\bar{1} \rightleftharpoons < 1 >$ — идеалы в $T(M)$. Чёрточки над 0 и 1 нередко будем опускать. Определяемая таким образом алгебраическая система $< T(M); \leq, \wedge, \mathrm{V}, \bar{0}, \bar{1} >$ является нульмерной и компактной сНа. Операции $\wedge, \vee$ и операция Λ, если она определена в $Com(M)$, совпадают в $Com(M)$ и $T(M)$ при отождествлении i и <i>, где $i \in Com(M)$, <i> — главный идеал, порождённый i.
Зададим J-оператор $J: T \to T$, обладающий следующими свойствами: $u \leq J(u)$, $J(J(u)) = u$, $J(u \wedge v) = J(u) \wedge J(v)$.
Множество всех J-операторов обозначим через $A(T)$ и зафиксируем на нём поточечное отношение порядка: $J_1 \leq J_2 \rightleftharpoons \forall u \in T \left(J_1(u) \leq J_2(u) \right)$. Структура $A(T)$ с таким отношением порядка и соответствующими операциями является полной гейтинговой алгеброй. Используя канонический способ образования сВа по уже известной сНа, строим алгебру стабильных элементов $B(A(T) \rightleftharpoons \left\{ u \in A(T) \middle| \neg\neg^{A(T)} u = u \right\}$ — полную булеву алгебру с операциями и отношением порядка, индуцируемыми из $A(T)$, которую будем обозначать $B(M)$ или просто B.
Определим отображение $\cdot \uparrow \cdot : M \times Com(M) \to M$ условием $a = a \uparrow i + v$, где $a \uparrow i \in i$, $v \in i^\perp$. Для формул $\varphi(\bar{a})$ с параметрами из M в языке l-колец специфицируем обычный предикат истинности $M \models \varphi(\bar{a})$ (обозначаемый $\left(\varphi(\bar{a})\right)_M$) и новый предикат глобальной истинности $[\![\varphi(\bar{a})]\!] = 1$, в котором левая часть определяется по индукции со следующим начальным шагом индукции

$$[\![a = b]\!] \rightleftharpoons \left\{ i \in Com(M) \middle| a \uparrow i = b \uparrow i \right\};$$

$$[\![a = b]\!] \rightleftharpoons \left\{ i \in Com(M) \middle| a \uparrow i \leq b \uparrow i \right\}.$$

Множества
$\left\{ i \in Com(M) \middle| a \uparrow i = b \uparrow i \right\}$ и $\left\{ i \in Com(M) \middle| a \uparrow i \leq b \uparrow i \right\}$
являются идеалами в $Com(M)$, поэтому $[\![\cdot = \cdot]\!]$ и $[\![\cdot \leq \cdot]\!]$ отображения вида $M^2 \to T(M)$. Индукцией по связкам и кванторам продолжим их на множество $\pi(M)$ всех предложений с параметрами из M. Если при этом все операции вычисляем в $T(M)$, то получаем отображение вида $\pi(M) \to T(M)$, которое обозначаем $[\![\cdot]\!]^T$ и называем T-оценкой. При замене $T(M)$ на $B(M)$ получаем отображение вида $\pi(M) \to B(M)$, обозначаем его $[\![\cdot]\!]^B$ и называем B-оценкой.
Отметим (без доказательства) некоторые свойства T-оценки. Для любого l-кольца оценка $[\![\cdot]\!]^T$ является отделимой, пучковой и достижимой (определения соответствующих понятий можно найти, например, в [12]).
Напомним несколько дефиниций.
l-кольцо M называют нормальным,
если $\forall a \in M \exists i_0 \in Com(M) \left(a \in i^\perp \Leftrightarrow i \subseteq i_0 \right)$.
Например, любое строго регулярное f-кольцо является нормальным.
l-кольцо M называют неразложимым, если любой дополняемый L-идеал этого кольца есть $\{0\}$ или M.
Формулу, в посылке любой импликации которой, во-первых, отсутствует квантор всеобщности, а во-вторых, квантор существования не входит в область действия какой-либо связки ⇒, назовём фи-формулой.

Предложение 1.
Пусть M — произвольное нормальное l-кольцо; $\bar{a} =< a_1, \ldots a_n >$ *— параметры из M. Тогда*
1. *для любой фи-формулы ф с параметрами $\bar{a}$ выполняется:* $[\![\varphi(\bar{a})]\!]^T \leq [\![\varphi(\bar{a})]\!]^B$;
2. *для любой AE-формулы ф с параметрами $\bar{a}$ выполняется:*
1. *если* $u \leq [\![\varphi(\bar{a})]\!]^B$, *то* $u \leq [\![\varphi(\bar{a})]\!]^T$.

Доказательство.
Сначала индукцией по длине формулы покажем, что для любой бескванторной $\varphi(a)$ выполняется равенство T- и B-оценок. Для атомарных формул это имеет место в силу определения оценок. Пусть $\varphi \rightleftharpoons \psi \& \vartheta$. Тогда $[\![\varphi]\!]^T = [\![\psi]\!]^T \wedge [\![\vartheta]\!]^T$. По индуктивному шагу, $[\![\psi]\!]^T = [\![\psi]\!]^B$, $[\![\psi]\!]^B \in Com(M)$, и аналогично для ϑ. Результата операции $\wedge^T$, применённый к элементам из $Com(M)$, принадлежит $Com(M)$, а сама операция $\wedge^T$, применённая к элементам из $Com(M)$ и вычисленная в $Com(M)$, совпадает с $\wedge^B$. Аналогично для связок $\vee$ и $\Rightarrow$.
Пусть φ — произвольная фи-формула. Применим индукцию по её длине. Если φ — атомарная, то имеет место равенство T- и B-оценок. Если φ получается с помощью $\&, \vee, \exists, \forall$, то утверждение справедливо в силу свойств сНа-морфизма $\iota : T \to B$.

[2] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984. 320 с.

Пусть $\varphi \rightleftharpoons \psi \Rightarrow \vartheta$. По определению фи-формулы, Ψ — бескванторная. Следовательно, $[\![\psi]\!]^T \in Com(M)$ и $[\![\psi]\!]^T = [\![\psi]\!]^B$. По индуктивному шагу, $[\![\vartheta]\!]^T \le [\![\vartheta]\!]^B$.
Поэтому, обозначив оценку $[\![\psi \Rightarrow \vartheta]\!]^T$ через u, получим $u \wedge [\![\psi]\!]^B = u \wedge [\![\psi]\!]^T \le [\![\vartheta]\!]^T \le [\![\vartheta]\!]^B$, или $u \le [\![\psi \Rightarrow \vartheta]\!]^B$.
Пусть φ — произвольная AE-формула. Если φ — бескванторная, то утверждение справедливо в силу равенство её T- и B-оценок. Пусть $\varphi \rightleftharpoons \exists x\psi$. Так как cHa-морфизм $\iota : T \to B$ сохраняет sup элементов из $T(M)$ и Ψ— бескванторная, то $[\![\varphi]\!]^T = [\![\varphi]\!]^B$. Пусть $\varphi \rightleftharpoons \forall \bar{x}\psi$ и $u \le [\![\varphi]\!]^B$ и, где Ψ — E-формула. Тогда $u \wedge [\![\psi]\!]^B$ и $[\![\psi]\!]^T = [\![\psi]\!]^B$. Отсюда $u \le [\![\psi]\!]^T$, и следовательно, $u \le [\![\forall \bar{x}\psi]\!]^T$.

Расширим язык l-колец до языка $\{+,\cdot,-,\le,0,1,\&,\vee,\uparrow\}$ и обозначим $\overline{M} \rightleftharpoons (M, Com(M))$. Полученный язык назовём расширенным языком l-колец. Он имеет дополнительный сорт переменных, пробегающих множество всех дополняемых L-идеалов l-кольца. Определим перевод формулы φ языка l-колец в формулу φ_i^* расширенного языка l-колец для любого фиксированного элемента $i \in Com(M)$.
Пусть φ — любая формула в языка l-колец с параметрами $\bar{a}$ из l-кольца M. Пусть i, i_0, i_1, i_2 — свободные переменные, пробегающие $Com(M)$. Положим

$$(a_1 = a_2)_i^* \rightleftharpoons (a_1 \uparrow i = a_2 \uparrow i),\ (a_1 \le a_2)_i^* \rightleftharpoons (a_1 \uparrow i \le a_2 \uparrow i),$$
$$(\varphi \& \psi)_i^* \rightleftharpoons \varphi_i^* \& \psi_i^*,\ (\varphi \vee \psi)_i^* \rightleftharpoons \exists i_1 \exists i_2 \left((i = i_1 \vee i_2) \& (\varphi_{i_1}^* \& \psi_{i_2}^*)\right),$$
$$(\varphi \Rightarrow \psi)_i^* \rightleftharpoons \forall i_0 \left(((i_0 \le i) \& \varphi_{i_1}^*) \Rightarrow \psi_{i_0}^*\right),$$
$$(\exists x\varphi)_i^* \rightleftharpoons \exists x(\varphi)_i^*,\ (\forall x\varphi)_i^* \rightleftharpoons \forall x(\varphi)_i^*.$$

Обозначим $\varphi^*(\bar{a}) \rightleftharpoons \varphi_1^*(\bar{a})$.

Предложение **2.** Пусть M — *любое l-кольцо. Тогда для любой формулы* ф с параметрами $\bar{a}$ из M и любого i из $Com(M)$ выполняется

$$\left(\varphi_i^*(\bar{a})\right)_{\overline{M}} \Leftrightarrow \left(i \in [\![\varphi(\bar{a})]\!]^T\right).$$

В частности $\left(\varphi^*(\bar{a})\right)_{\overline{M}} \Leftrightarrow \left([\![\varphi(\bar{a})]\!]^T = 1\right)$.

Доказательство. Индукция по длине формулы ф. Для атомарной это справедливо в силу определения оценки. Случаи $\&, \vee, \forall$ очевидны. Для случая $\exists$ утверждение справедливо в силу достижимости T-оценки. Пусть $\varphi \rightleftharpoons \psi \Rightarrow \vartheta$. Обозначим через $< i_0 >$ и $< i >$ — главные идеалы в $T(M)$, порождённые соответственно i_0 и i из $Com(M)$.

Условие $\left(\varphi_i^*(\bar{a})\right)_{\overline{M}}$ эквивалентно условию
$\forall i_0 \left(< i_0 > \subseteq < i > \Rightarrow \left(< i_0 > \subseteq [\![\psi]\!]^T \Rightarrow < i_0 > \subseteq [\![\vartheta]\!]^T\right)\right)$.

Пусть $< i_0 > \subseteq [\![\psi]\!]^T$.

Тогда $< i_0 > \subseteq [\![\vartheta]\!]^T$ эквивалентно $< i_0 > \cap [\![\psi]\!]^T \subseteq [\![\vartheta]\!]^T$, или $< i_0 > \subseteq [\![\psi \Rightarrow \vartheta]\!]^T$.

Поэтому $\left(\varphi_i^*(\bar{a})\right)_{\overline{M}}$ эквивалентно
$\forall i_0 \left(< i_0 > \subseteq < i > \Rightarrow \left(< i_0 > \subseteq [\![\psi \Rightarrow \vartheta]\!]^T\right)\right)$.

Тогда $\left(\varphi_i^*(\bar{a})\right)_{\overline{M}} \Rightarrow \left(< i > \subseteq [\![\psi \Rightarrow \vartheta]\!]^T\right)$.

В то же время условия $< i > \subseteq [\![\psi \Rightarrow \vartheta]\!]^T$ и $< i_0 > \subseteq < i >$ влекут включение $< i_0 > \subseteq [\![\psi \Rightarrow \vartheta]\!]^T$.

Следовательно, $\left(\varphi_i^*(\bar{a})\right)_{\overline{M}}$ эквивалентно $< i > \subseteq [\![\psi \Rightarrow \vartheta]\!]^T$, или $\left(\varphi_i^*(\bar{a})\right)_{\overline{M}} \Leftrightarrow \left(i > \in [\![\psi \Rightarrow \vartheta]\!]^T\right)$.

Обозначим через V^T и $[\![\cdot]\!]^{V^T}$ соответственно гейтинговозначный универсум и оценку в языке ZF для cHa $T(M)$, через V^B и $[\![\cdot]\!]^B$ — булевозначный универсум и оценку в языке ZF для cBa $B(M)$. Класс V всех множеств вкладывается в универсум V^T. Это вложение осуществляется с помощью отображения $(\cdot)^\vee : V \to V^T$, которое каждому X из V^T ставит в соответствие элемент $\check{X}$ из V^T, такой, что область определения $\check{X}$ есть $\left\{\check{x} \middle| x \in X\right\}$ и $\forall x \in X \left(X(\check{x}) = 1\right)$.
Пусть M — любое l-кольцо. Определим $R_a \in V^T$,

положив $D(R_a) \rightleftharpoons D(\check{M})$ и $R_a(\check{b}) \rightleftharpoons [\![a = b]\!]^T$,

где $D(\check{M}) \rightleftharpoons \left\{\check{a} \middle| a \in M\right\}$, а затем определим $M^T \in V^T$,

положив $D(M^T) \rightleftharpoons \left\{R_a \middle| a \in M\right\}$ и $M^T(R_a) = 1^T$.

Заменяя T на B, получим определение элемента M^B из V^B. Функции, отношения и константы на M^T определим следующим образом: $D(+^T) \rightleftharpoons \left\{\left\langle R_a, R_b, R_{a+b}\right\rangle R_a \middle| a,b \in M\right\}$ и $+^T\left(\left\langle R_a, R_b, R_{a+b}\right\rangle\right) = 1$ (аналогично для $\cdot^T$ и $-^T$);
$D(\le^T) \rightleftharpoons \left\{\left\langle R_a, R_b\right\rangle R_a \middle| a,b \in M \;\&\; a \le b\right\}$
и $\le^T \left(\left\langle R_a, R_b\right\rangle\right) \rightleftharpoons [\![a \le b]\!]^T$;
$0^T \rightleftharpoons R_0$, $1^T \rightleftharpoons R_1$.
Заменяя T на B, получим определения соответствующих объектов на M^B.
Если для любой формулы $\varphi(\bar{x})$ в языке l-колец и любых параметров $\bar{a} = < a_1, \ldots, a_n >$
из M выполняется равенство $[\![\varphi(\bar{a})]\!]^T = [\![\varphi(\overline{R_a})]\!]^{V^T}$,
где $\overline{R_a} = < R_{a_1}, \ldots, R_{a_n} >$,
то $M^T \in V^T$ назовём нестандартным представлением l-кольца M универсуме V^T. Заменяя T на B, получим определение нестандартного представления l-кольца M в универсуме V^B.

l-кольцо M назовём T-l-кольцом, если выполняется: $\forall a,b \in M \left([\![\check{a} = \check{b}]\!]^{V^T} \le [\![a = b]\!]^T\right)$.

l-кольцо M назовём B-l-кольцом, если выполняется: $\forall a,b \in M \left([\![\check{a} = \check{b}]\!]^{V^B} \le [\![a = b]\!]^B\right)$.

Любое B-l-кольцо является T-l-кольцом. Примером B-l-кольца может служить любое l-кольцо со счётным носителем.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(\bar{x})$ — произвольная фи-формула в зыке l-колец со свободными переменными $\bar{x}$; $\psi(\bar{x})$ — любая AE-формула в этом же языке.*

Тогда, если $\mathrm{ZF} \mid\!-\forall M\left(\left(M \text{ — } l-\textit{кольцо}\right) \Rightarrow \left(\forall \bar{x}\left(\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})\right)\right)_M\right)$, то

1. $\mathrm{ZFI} \mid\!-\forall M\left(\left(M \text{ — } \textit{нормальное} \;\; B-l-\textit{кольцо}\right) \Rightarrow \left(\forall \bar{x}\left(\varphi^*(\bar{x}) \Rightarrow \psi^*(\bar{x})\right)\right)_M\right)$;
2. $\mathrm{ZFI} \mid\!-\forall M\left(\left(M \text{ — } \textit{неразложимое} \;\; \textit{нормальное} \;\; B-l-\textit{кольцо}\right) \Rightarrow \left(\forall \bar{x}\left(\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})\right)\right)_M\right)$.
3. *В п.2 можно перед связкой ⇒ одновременно добавить в посылке формулу φ*, в заключении — формулу φ, языковые формы выражения которых представлены в следующей матрице соответствий:*

φ	*φ**
строго регулярное f-кольцо	*(линейно) упорядоченное тело*
коммутативное строго регулярное f-кольцо	*упорядоченное поле*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проверим выполнимость п.1. Пусть M — любое, удовлетворяющее условию теоремы, и $\left(\varphi^*(\bar{a})\right)_M$, где $\bar{a} \in M$. Тогда, с учётом предложений 2 и 1(п.1), $[\![\varphi(\bar{a})]\!]^B = 1$. По условию, M является B-l-кольцом, следовательно, M^B является нестандартным представлением M в универсуме V^B, и, следовательно, $[\![\varphi(\bar{a})]\!]^B = [\![\varphi(\bar{R}_a)]\!]^{V^B}$.

Отсюда $[\![\varphi(\bar{R}_a)]\!]^{V^B} = 1$. По условию, $\left(\varphi(\bar{x}) \Rightarrow \psi(\bar{x})\right)_M$. Так B — полная булева алгебра, то предикат $[\![\cdot]\!]^{V^B} = 1$ замкнут относительно ZF-выводимости.

Следовательно, $[\![\psi(\bar{R}_a)]\!]^{V^B} = 1$. Поэтому, воспользовавшись ещё раз предложениями 1(п.1) и 2, получим $[\![\psi(\bar{a})]\!]^B = 1$. По условию, ψ — AE-формула, поэтому, применив предложение 4(п.2), получим $[\![\psi(\bar{a})]\!]^T = 1$, но это, вследствие предложения 2, означает $\left(\psi^*(x)\right)_M$.

Алгебраическая система M допускает разный выбор булевых алгебр для построения оценки, соответствующей структуре M и этой алгебре. Например, вместо булевой алгебры *Com*(*M*) всех дополняемых *L*-идеалов можно выбрать булеву алгебру *Idc*(*M*) всех центральных идемпотентов *l*-кольца *M*. Операции в *Idc*(*M*) определяются следующим образом: $e_1 \wedge e_2 \rightleftharpoons e_1 \cdot e_2$, $e_1 \vee e_2 \rightleftharpoons e_1 + e_2 - e_1 \cdot e_2$, $\neg e \rightleftharpoons 1 - e$, наибольшим элементом является единица *l*-кольца *M* и наименьшим элементом — его нуль. Буква *e* с индексами или без них обозначает произвольный элемент из *Idc*(*M*). Введя дополнительное ограничение на *l*-кольцо *M* — условие $e \geq 0, \forall e$, определим оценку на атомарных формулах, положив для любых элементов *a*, *b* из M:

$[\![a = b]\!] \rightleftharpoons \left\{e \in Idc(M) \middle| e \cdot a = e \cdot b\right\}$;

$[\![a \leq b]\!] \rightleftharpoons \left\{e \in Idc(M) \middle| e \cdot a \leq e \cdot b\right\}$.

Стоит заметить, что введённое ограничение гарантирует, что множество $[\![a \leq b]\!]$ является идеалом в *Idc*(*M*). Затем оценку индукцией по кванторам и связкам продолжим на множество всех предложений с параметрами из *M*.

Для случая *Idc*(*M*) доказаны утверждения, аналогичные утверждениям, доказанным для *Com*(*M*). В этом случае перевод φ_e^{**}, эквивалентный тому, что $e \in [\![\varphi]\!]$, и аналогичный переводу φ_i^*, является формулой в том же языке *l*-колец, что и формула φ.

Подтверждением служит следующее предложение, устанавливающее взаимосвязь между *Idc*(*M*) и *Com*(*M*).

Предложение **3**. Пусть *M* — любое *l-кольцо, в котором любой центральный идемпотент* ≥0. Тогда булевы алгебры *Idc*(*M*) и *Com*(*M*) изоморфны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть *e* — произвольный элемент из *Idc*(*M*) и $e \geq 0$. Тогда $e \cdot M$ является дополняемым *L*-идеалом *l*-кольца *M* и изоморфизм $Idc(M) \to Com(M)$ поэлементно может быть задан следующим образом: $e \mapsto e \cdot M$.

Рассматриваемый метод оценивания суждений элементам алгебр позволяет также изучать общезначимость утверждений в классе всех гейтинговозначных универсумов — важнейшем классе интуиционистких моделей [18].

Утверждения рассматриваются относительно общезначимости в классе всех гейтинговозначных универсумов. Они имеют следующий вид:

$\mathrm{ZFI} \mid\!-\forall \Omega\left([\![\zeta]\!]^{\Omega} = 1^{\Omega}\right)$,

где ζ — утверждение, Ω пробегает класс всех полных гейтинговых алгебр.

В качестве примера приведём ε-вариант теоремы о свойстве полей разложения.

Расширим обычный язык колец, добавив бинарный предикатный символ #. Алгебраическую систему $M \rightleftharpoons \langle M, +, \cdot, -, \leq, 0, 1, \# \rangle$ называют отделённым полем [13], если она одновременно является моделью аксиом коммутативного кольца с единицей и аксиом следующего вида:

1. $\forall a \forall b\left(\neg(a \# b) \Leftrightarrow (a = b)\right)$;
2. $\forall a \forall b \forall c\left((a \# b) \Rightarrow (a \# c \vee b \# c)\right)$;
3. $\forall a \forall b\left((a \# b) \Rightarrow (b \# a)\right)$;
4. $\forall a \forall b \forall c\left((a \# b) \Rightarrow (a + c \# b + c)\right)$;
5. $0 \# 1$;
6. $\forall a\left((a \# 0) \Rightarrow \exists b(b \# 0 \,\&\, a \cdot b = 1)\right)$;
7. $\forall a \forall b \forall c\left((a \# b \,\&\, c \# 0) \Rightarrow (a \cdot c \# b \cdot c)\right)$.

Бинарное отношение #, обладающее свойствами (1)-(3), называют отношением отделённости. Классически (то есть в рамках классической теории множеств или шире – в рамках подходящей классической теории) оно равносильно понятию неравенства, определяемому как $\cdot \neq \cdot \rightleftharpoons \neg(\cdot = \cdot)$. Конечно, для интуиционистской теории в общем случае неверно, что $\cdot \neq \cdot \rightleftharpoons \cdot \# \cdot$. Имеет место только: $\#$ влечёт $\neq$.

Если в поле дедекиндовых действительных чисел положить: $a \# b \Leftrightarrow a < b \vee b < a$, то получим пример отделённого поля. Ещё одна из возможных реализаций бинарного предиката, обладающего свойствами отношения отделённости, связана с использованием нормы со значением в поле, в котором отношение отделённости уже задано (например, в поле дедекиндовых действительных чисел с выше определённым отношение отделённости). Действительно, пусть $(M, \mathbb{R})$ — произвольное поле *M*, в котором определена норма $\|\cdot\|$ со значениями в поле дедекиндовых действительных чисел $\mathbb{R}$, то есть $(M, \mathbb{R})$ — нормированное поле. Определим в нём бинарное отношение

$\#$, положив $(a\#b) \rightleftharpoons (\|a-b\| \neq 0), \forall a,b \in M$. Тогда, проверив выполнимость аксиом отделённого поля, убеждаемся, что определённое таким образом отношение $\neq$ превращает M в отделённое поле. Заметим, что, если M является полем разложения, то введённое отношение $\neq$ превращает M в отделённое поле разложения [20-25].

Пусть u — любой фиксированный элемент из Ω; $F_0,\ldots,F_m$; $P_0,\ldots,P_n$; $c_0,\ldots,c_k$ — любые фиксированные элементы из V^Ω. Набор $M \rightleftharpoons < M; F_0,\ldots,F_m; P_0,\ldots,P_n; c_0,\ldots,c_k >$ назовём алгебраической системой с достоверностью u, если $[\![F_0 : M^{i_0} \to M \,\&\ldots\&\, F_m : M^{i_m} \to M; P_0 \subseteq M^{j_0} \,\&\ldots\&\, P_n \subseteq M^{j_n} \,\&\ldots\&\, c_0 \in M \,\&\ldots\&\, c_k \in M]\!]^\Omega = u$, где $i_0,\ldots,i_m$ и $j_0,\ldots,j_n$ — арности функциональных и предикатных символов соответственно.

Аналогично определяется в универсуме V^Ω понятие многосортной системы с достоверностью $u \in V^\Omega$.

Пусть $\eta(\cdot)$ — формула в языке ZF, описывающая множество дедекиндовых сечений и его порядково-кольцевую структуру. Тогда через $\mathbb{R}^\Omega$ обозначим тот объект из V^Ω, для которого $[\![\mathbb{R}^\Omega = \{x \mid \eta(x)\}]\!]^\Omega = 1$. Индекс Ω в обозначении $\mathbb{R}^\Omega$ будем опускать.

Алгебраическую систему $(\widetilde{M},\mathbb{R}) \rightleftharpoons < M, +, \cdot, -, \leq, 0, 1, \#, \mathbb{R}, \|\cdot\| > \in V^\Omega$ с достоверностью $u \in \Omega$ назовём полуабсолютной и обозначим $\mathrm{HAbs}(\widetilde{M},\mathbb{R},u)$, если она обладает следующими свойствами:

1. $[\![+ : M^2 \to M]\!]^\Omega \leq [\![+ : M^2 \to M]\!]^B$;
2. $[\![\cdot : M^2 \to M]\!]^\Omega \leq [\![\cdot : M^2 \to M]\!]^B$;
3. $[\![- : M \to M]\!]^\Omega \leq [\![- : M \to M]\!]^B$;
4. $\forall a,b \in D(M)\left(u \wedge M(a) \wedge M(b) \leq \left([\![a\#b]\!]^\Omega \xleftrightarrow{B} [\![\neg(a=b]\!]^B\right)\right)$;
5. $[\![\|\cdot\| : M \to \mathbb{R}]\!]^\Omega \leq [\![\|\cdot\| : M \to \mathbb{R}]\!]^B$.

Обозначим $\left(a \overset{\varepsilon}{=} b\right) \rightleftharpoons \left(\big|\, \|a\| - \|b\| \,\big| < \varepsilon\right)$, где $a,b \in M$ и переменная ε пробегает все положительные рациональные числа. Это известное в конструктивной математике ε-равенство, которое говорит, что «*a*=*b* с ε-точностью».

Пусть $\mathbf{SPL}(\widetilde{M},\mathbb{R})$ — формализация в языке ZF того, что нормированное поле $(\widetilde{M},\mathbb{R})$ является полем разложения многочлена над подполем $\widetilde{M}_0$, $\mathbf{NEF}(\widetilde{M},\mathbb{R})$ — формализация в этом же языке того, что $(\widetilde{M},\mathbb{R})$ — нормальное расширение подполя $\widetilde{M}_0$. Определим формулу ε$\mathbf{NEF}(\widetilde{M},\mathbb{R})$. Для этого в формуле **NEF** $(\widetilde{M},\mathbb{R})$ все подформулы вида $a \neq b$ и $a = b$ заменим на формулы $\|a\| - \|b\| \neq 0$ и $a \overset{\mathring{a}}{=} b$ соответственно, а затем все переменные $\mathring{a}_1,\ldots,\mathring{a}_n$ замкнём кванторами всеобщности.

Теорема 2.

$$\mathrm{ZFI} \vdash \forall\Omega\forall u \in \Omega \forall M \in V^\Omega \left(\mathrm{HAbs}(\widetilde{M},\mathbb{R},u) \Rightarrow [\![\mathbf{SPL}(\widetilde{M},\mathbb{R}) \Rightarrow \varepsilon\mathbf{NEF}(\widetilde{M},\mathbb{R})]\!]^\Omega = 1\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Это непосредственно следует из свойств отображения $\iota^* : V^\Omega \to V^B$.

Заключение

В статье рассмотрен метод работы с семантикой суждений, исследованы его свойства. С его помощью возможно построение компьютерно реализуемых интуиционистских выводов утверждений вследствие конвертирования соответствующих классических выводов (семантическая оценка которых в булевозначном универсуме равна единице) в интуиционистские. Такой подход особенно актуален при обработке больших объёмов информации, так как позволяет избежать необходимости построения сложных интуиционистских выводов, что, в свою очередь, позволяет значительно увеличить скорость обработки данных. В частности, показана возможность переноса свойств решёточно упорядоченных колец на упорядоченные кольца и конвертации классической теории в интуиционистскую для многосортных алгебраических систем.

References

[1] Gupanova Yu.E., Goremykina G.I. Managerial analysis and assessment of customs authorities' performance. *Jekonomicheskij analiz: teorija i praktika* = Economic Analysis: Theory and Practice. 2020; 19(11):2068-2092. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.24891/ea.19.11.2068

[2] Goremykina G.I., Gupanova Yu.E., Udalova Z.V. Intelligent management methodology based on the performance results of customs authorities. *IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. 12th International Scientific Conference on Agricultural Machinery Industry, INTERAGROMASH 2019.* 2019; 403:012129. (In Eng.) doi: http://doi.org/10.1088/1755-1315/403/1/012129

[3] Pavlov V.A., Pak V.G. Theorem Prover for Intuitionistic Logic Based on the Inverse Method. *Programming and Computer Software.* 2018; 44(1):51-61. (In Eng.) doi: http://doi.org/10.1134/S036176881801005X

[4] Kunze F. Towards the Integration of an Intuitionistic First-Order Prover into Coq. In: Blanchette J.C., Kaliszyk C. (eds.) *Proceedings of the 1st International Workshop Hammers for Type Theories (HaTT'16).* Vol. 210. EPTCS; 2016. p. 30-35. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.4204/EPTCS.210.6

[5] Kolmogorov A. Zur Deutung der Intuitionistischen Logik. *Mathematische Zeitschrift.* 1932; 35(1):58-65. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/BF01186549

[6] Gödel K. An interpretation of the intuitionistic sentential calculus. In: Hintikka J. (ed.) The Philosophy of Mathematics. Oxford University Press, London; 1969. (In Eng.)

[7] Myhill J. Some properties of intuitionistic Zermelo-Frankel set theory. In: Mathias A.R.D., Rogers H. (eds.) *Cambridge Summer School in Mathematical Logic. Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, Heidelberg; 1973. Vol. 337. p. 206-231. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/BFb0066775

[8] Friedman H. Classically and intuitionistically provably recursive functions. In: Müller G.H., Scott D.S. (eds.) *Higher Set Theory. Lecture Notes in Mathematics.* Springer, Berlin, Heidelberg; 1978. Vol. 669. p. 21-27. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/BFb0103100
[9] Hartonas C. Modal translation of substructural logics. *Journal of Applied Non-Classical Logics*. 2020; 30(1):16-49. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1080/11663081.2019.1703469
[10] Bezhanishvili G., Holliday W.H. A semantic hierarchy for intuitionistic logic. *Indagationes Mathematicae*. 2019; 30(3):403-469. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/j.indag.2019.01.001
[11] Holliday W.H. Three roads to complete lattices: orders, compatibility, polarity. *Algebra Universalis*. 2021; 82(2):26. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/s00012-021-00711-y
[12] Lyubetsky V.A. Intuitionistic theory of algebraic systems and heyting-valid analysis. *Algebra and Logic.* 1991; 30(3):208-216. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/BF01978854
[13] Takeuti G., Titani S. Conservative extension of elementary notions in Heyting-valued universe. *Memoirs of College of Engineering, Chubu University.* 1988; (2):135-145. (In Eng.)
[14] Al-Haj Baddar S.W., Batcher K.E. Lattice Theory. In: *Designing Sorting Networks*. Springer, New York, NY; 2011. p. 61-71. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1851-1_10
[15] Lyubetsky V.A. Transfer from deducibility in the classical set theory to deducibility in intuitionistic set theory for the language of rings. *Algebra and Logic*. 1991; 30(6):427-439. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/BF02018738
[16] Kopytov V.M., Medvedev N.Y. Lattice-ordered groups. In: The Theory of Lattice-Ordered Groups. *Mathematics and Its Applications.* Springer, Dordrecht; 1994. Vol. 307. p. 11-29. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-94-015-8304-6_2
[17] Pavlík J. Unified approach to graphs and metric spaces. *Mathematica Slovaca*. 2017; 67(5):1213-1238. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1515/ms-2017-0044
[18] Shimoda M. A natural interpretation of fuzzy set theory. *Proceedings Joint 9th IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference (Cat. No. 01TH8569)*. IEEE Press, Vancouver, BC, Canada; 2001. Vol. 1. p. 493-498. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1109/NAFIPS.2001.944302
[19] Villalonga P.T. Substructural logics, pragmatic enrichment, and the inferential role of logical constants. *Inquiry*. 2020; 63(6):628-654. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1080/0020174X.2018.1544098
[20] Paranhos R.M., Nascimento Silva J.C., Souza U.S., Ochi L.S. Parameterized Complexity Classes Defined by Threshold Circuits: Using Sorting Networks to Show Collapses with W-hierarchy Classes. In: Du D.-Z., Du D., Wu C., Xu D. (eds.) *Combinatorial Optimization and Applications. COCOA 2021. Lecture Notes in Computer Science.* Springer, Cham; 2021. Vol. 13135. p. 348-363. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-92681-6_28
[21] Groppe S. Emergent models, frameworks, and hardware technologies for Big data analytics. *The Journal of Supercomputing.* 2020; 76(3):1800-1827. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/s11227-018-2277-x
[22] Goldblatt R. Cover semantics for quantified lax logic. *Journal of Logic and Computation*. 2011; 21(6):1035-1063. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1093/logcom/exq029
[23] Plisko V.E. A survey of predicate realizability logic. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*. 2011; 274:204. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1134/S0081543811060137
[24] Jassbi J., Mohamadnejad F., Nasrollahzadeh H. A Fuzzy DEMATEL framework for modeling cause and effect relationships of strategy map. *Expert Systems with Applications.* 2011; 38(5):5967-5973. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/j.eswa.2010.11.026
[25] Blanco-Mesa F., Merigó J.M., Gil-Lafuente A.M. Fuzzy decision making: A bibliometric-based review. *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*. 2017; 32(3):2033-2050. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.3233/JIFS-161640

Поступила 12.09.2021; одобрена после рецензирования 07.10.2021; принята к публикации 26.10.2021.
Submitted 12.09.2021; approved after reviewing 07.10.2021; accepted for publication 26.10.2021.

Об авторе:

Горемыкина Галина Ивановна, доцент кафедры математических методов в экономике, Институт математики, информационных систем и цифровой экономики, ФГБОУ ВО «Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова» (117997, Российская Федерация, г. Москва, Стремянный пер., д. 36), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8047-5393,** Goremykina.GI@rea.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

About the author:

Galina I. Goremykina, Associate Professor of the Department of Mathematical Methods in Economics, Institute of Digital Economics and Information Technologies, Plekhanov Russian University of Economics (36 Stremyanny lane, Moscow 117997, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8047-5393,** Goremykina.GI@rea.ru

The author has read and approved the final manuscript.