

УДК 517.958

DOI: 10.25559/SITITO.17.202104.847-859

Научная статья

## Устойчивость различных стационарных точек при малых колебаниях аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды

**Д. В. Беляков**

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4  
dimbel@rambler.ru

### Аннотация

В статье построена и исследована математическая модели малых колебаний аэродинамического маятника в потоке движущейся среды. В качестве модели воздействия среды на тело принята модель квазистатического обтекания пластинки средой. Согласно этой гипотезе, аэродинамические силы, действующие на тело, прикладываются в центре давления. В нашей задаче центр давления является подвижным относительно пластинки. Получены уравнения движения для рассматриваемого тела. Проведен переход к новым безразмерным переменным. Показано нарушение единственности при определении угла атаки. Проведен параметрический анализ областей неоднозначности. Найдены все стационарные точки, являющиеся решениями уравнений равновесия. Показано, что в наиболее характерном положении равновесия, соответствующем состоянию покоя областей неоднозначности нет. Проведено исследование устойчивости различных нетривиальных положения равновесия, в которых реализован критерий Гурвица и изображены области устойчивости. Показано, что силы аэродинамического воздействия для тел с одними формами могут способствовать развитию автоколебаний, а для других затуханию. В математическом пакете MATLAB 18 написан комплекс программ, позволяющий находить стационарные точки, строить области устойчивости для каждой из них и проводить численное интегрирование уравнений, описывающих колебания тела, для того, чтобы подтвердить адекватность построенной математической модели.

**Ключевые слова:** тело, стационарный режим, устойчивость, область устойчивости флаттер

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

**Для цитирования:** Беляков Д. В. Устойчивость различных стационарных точек при малых колебаниях аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 4. С. 847-859. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.847-859>

© Беляков Д. В., 2021



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Stability of Various Stationary Points with Small Oscillations of the Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Quasi-Static Medium

D. V. Belyakov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Address: 4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation

dimbel@rambler.ru

### Abstract

In the article, a mathematical model of small oscillations of an aerodynamic pendulum in the flow of a moving medium is constructed and investigated. As a model of the effect of the medium on the body, the model of quasi-static flow around the plate by the medium is adopted. According to this hypothesis, the aerodynamic forces acting on the body are applied at the center of pressure. In our problem, the pressure center is movable relative to the plate. The equations of motion for the body under consideration are obtained. The transition to new dimensionless variables has been carried out. The violation of uniqueness in determining the angle of attack is shown. The parametric analysis of the ambiguity areas is carried out. All stationary points that are solutions of the equilibrium equations are found. It is shown that there is no ambiguity in the most characteristic equilibrium position corresponding to the state of rest. A study of the stability of various non-trivial equilibrium positions in which the Hurwitz criterion is implemented, and the stability regions are depicted is carried out. It is shown that the forces of aerodynamic action for bodies with some shapes can contribute to the development of self-oscillations, and for others to attenuation. The mathematical package MATLAB 18 contains a set of programs that allows you to find stationary points, build stability regions for each of them and perform numerical integration of equations describing body vibrations in order to confirm the adequacy of the constructed mathematical model.

**Keywords:** body, stationary mode, stability, stability region, flutter

*The author declares no conflict of interest.*

**For citation:** Belyakov D.V. Stability of Various Stationary Points with Small Oscillations of the Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Quasi-Static Medium. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021; 17(4):847-859. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.847-859>

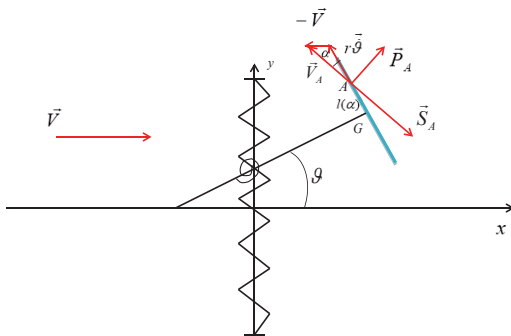


## Введение

Исследования флаттера в СССР начались в середине 30-х годов. Советская авиация столкнулась с тем, что при увеличении скорости, при некотором критическом ее значении, самолеты начали сильно трясти и они разрушались в воздухе. Вибрация нарастала настолько быстро, что у лётчика не оставалось времени на снижение скорости. От начала вибраций до разрушения самолета проходили считанные секунды. Над явлением флаттера ломали голову многие математики. Огромный вклад в решение проблемы внесли Е.П. Гроссман и М.В. Келдыш. С точки зрения теории колебаний летательный аппарат представляет из себя автоколебательную систему, источником энергии в которой служит набегающий поток, на который реагирует конструкция самолета. При интенсивных колебаниях аэродинамические напряжения могут достигнуть разрушающих значений. М.В. Келдыш показал, что флаттер это форма потери устойчивости он имеет резонансную природу, т. е. аналогичен эффекту резонанса, наблюдаемому при колебаниях упругой пружины с прикрепленной массой  $m$  и коэффициентом упругости  $k$ . Рассмотрим одну модельную задачу, в которой можно, несмотря на наличие нелинейных аэродинамических эффектов, можно использовать методы теории устойчивости по первому приближению.

## Постановка задачи

Рассматривается задача о теле, представляющем из себя тонкую пластинку, установленную ортогонально стержню длины  $r$ . Тело закреплено в центре масс с помощью двух упругих элементов и совершает автоколебания в потоке среды (см. рисунок 1). Введем неподвижную систему координат  $XoY$ . Будем считать, что в положении покоя маятник занимает положение равновесия, в котором он ориентирован по потоку. Будем считать, что центр масс тела может двигаться только по вертикальной прямой, а силы деформации элементов крепления зависят от отклонений линейным образом и сводятся к восстанавливающей силе  $F = -kx$  и возвращающему моменту  $M = -c\vartheta$ . Аэродинамические силы, приложенные к телу приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины.



Р и с 1. Колебания тела сложной конфигурации в потоке среды  
F i g. 1. Complex Configuration Body Oscillations in Environment Flow

В рассматриваемой модели предполагается, что центр давления пластинки точку А можно считать подвижной относительно пластинки. Аналогичная задача, только с неподвижным центром давления рассматривалась в работе [1]. Сдвиг центра давления описывается функцией  $l(\alpha)$  (см. рис 4 для  $\lambda = 8$ ), которая описывает расстояние между центром давления А и геометрическим центром пластинки G. Зависимость  $l(\alpha)$  определена из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и является экспериментальными данными<sup>1</sup>. Аэродинамические силы, действующие на каждую пластинку, разложим на две составляющие: сила сопротивления  $\vec{S}_A$ , направленная против скорости  $V_A$  точки А относительно потока среды, и подъемная сила  $\vec{P}_A$ , направленная ей ортогонально. При этом величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha)V_A^2$$

$$|\vec{P}_A| = p(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha)V_A^2$$

где  $\alpha$  – угол атаки между вектором  $\vec{V}_A$  и пластинкой  $p, s$  – аэродинамические функции углов атаки  $\tilde{n}_x, \tilde{n}_y$  – безразмерные аэродинамические функции (см. рис 2,3 для  $\lambda = 8$ ),  $\rho$  – плотность воздуха,  $\sigma$  – площадь одной пластинки. Вид аэродинамических функций для разных форм пластинок приводится в работе<sup>2</sup>. Будем считать, что среда не влияет на стержень. Составим уравнения движения рассматриваемого тела. В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координату  $y$  центра масс тела и угол  $\vartheta$  отклонения пластинки от горизонтали.

Тогда теорема о движении центра масс в проекции на ось  $oY$  и теорема об изменении кинетического момента будут иметь вид:

$$m\ddot{y} = s(\alpha)V_A(l(\alpha)\dot{\vartheta}\sin\vartheta - r\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{y}) - p(\alpha)V_A(r\dot{\vartheta}\sin\vartheta + l(\alpha)\dot{\vartheta}\cos\vartheta + V) - ky \quad (1)$$

$$J\ddot{\vartheta} = rV_A^2\tau(\alpha) - l(\alpha)V_A^2n(\alpha) - c\vartheta$$

где

$$\tau(\alpha) = p(\alpha)\sin\alpha - s(\alpha)\cos\alpha$$

$$n(\alpha) = p(\alpha)\cos\alpha + s(\alpha)\sin\alpha$$

аэродинамические Функции нормальной и касательной сил. Кинематические соотношения, связывающие  $V_A, \alpha$  с  $y, \dot{y}, \vartheta, \dot{\vartheta}$ , имеют вид:

$$V_A \sin\alpha = l(\alpha)\dot{\vartheta} - \dot{y}\sin\vartheta + V \cos\vartheta \quad (2)$$

$$V_A \cos\alpha = r\dot{\vartheta} + \dot{y}\cos\vartheta + V \sin\vartheta$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (1)-(2).

Введем новые безразмерным переменным:

$$y = \frac{y}{b} \text{ безразмерная координата центра масс (здесь } b \text{ – ширина пластинки)}$$

$$\tau = \frac{V}{b} t \text{ безразмерное время}$$

<sup>1</sup> Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. 1974. № 1621. С. 79-93.

<sup>2</sup> Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Изд-во Наука, 1988. 328 с.



$$\Omega = \frac{b\dot{\vartheta}}{V} \text{ безразмерная угловая скорость}$$

$$U = \frac{V_c}{V} \text{ безразмерная скорость центра давления}$$

$$M = \frac{mb}{0.5\rho\sigma} \text{ безразмерная масса}$$

$$K = \frac{kb}{0.5\rho\sigma V^2} \text{ безразмерный коэффициент жесткости пружины}$$

$$C = \frac{c}{0.5\rho\sigma V^2} \text{ безразмерный коэффициент восстанавливающего момента пружины}$$

$$I = \frac{J}{0.5\rho\sigma b} \text{ безразмерный момент инерции}$$

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{l(\alpha)}{b} \text{ безразмерная функция сдвига центра давления}$$

$$R = \frac{r}{b} \text{ безразмерная длина стержня}$$

При переходе к новым безразмерным переменным уравнения (1) преобразуются к виду:

$$M\ddot{\gamma} = c_x(\alpha)U(R\Omega \cos \vartheta + \Omega \varepsilon(\alpha) \sin \vartheta - \dot{\gamma}) + c_y(\alpha)U(R\Omega \sin \vartheta + \Omega \varepsilon(\alpha) \cos \vartheta + 1) - KY$$

$$I\ddot{\vartheta} = U^2(Rc_r(\alpha) - \varepsilon(\alpha)c_n(\alpha)) - C\vartheta \quad (3)$$

$c_n(\alpha)$ ,  $c_r(\alpha)$  изображены на рисунках 5,6 для  $\lambda = 8$

После простых преобразований кинематические соотношения (2) будут иметь вид:

$$U \sin \alpha = \varepsilon(\alpha)\Omega - \dot{\gamma} \sin \vartheta + \cos \vartheta \quad (4)$$

$$U \cos \alpha = R\Omega + \dot{\gamma} \cos \vartheta + \sin \vartheta$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (3)-(4).

## Неоднозначность определения угла атаки

В уравнения движения (3)-(4) рассматриваемой задачи входят функции  $c_x(\alpha)$ ,  $c_y(\alpha)$ ,  $c_r(\alpha)$ ,  $c_n(\alpha)$ ,  $\varepsilon(\alpha)$ , являющиеся экспериментальными данными<sup>3</sup>. Решение задачи (3)-(4) можно найти только численно. При численном интегрировании уравнений движения, нужно сначала определить угол атаки из соотношений (4). Разделим первое уравнение (4) на второе и, избавляясь от  $U$ , получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon(\alpha)\Omega - \dot{\gamma} \sin \vartheta + \cos \vartheta}{R\Omega + \dot{\gamma} \cos \vartheta + \sin \vartheta} \quad (5)$$

Умножим правую и левую части уравнения (5) на знаменатель  $R\Omega + \dot{\gamma} \cos \vartheta + \sin \vartheta \neq 0$

Если знаменатель все-таки обращается в нуль, то тогда может быть потеряно решение  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

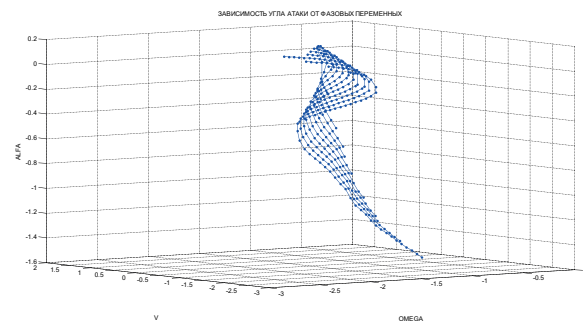
Получим нелинейное уравнение (6), равносильное соотношению (5):

$$(R\Omega + \dot{\gamma} \cos \vartheta + \sin \vartheta) \operatorname{tg} \alpha - \dot{\gamma} \cos \vartheta - \sin \vartheta = \varepsilon(\alpha)\Omega \quad (6)$$

Мы можем решить уравнение (6) и найти угол атаки  $\alpha$  при различных значениях фазовых переменных  $\dot{\gamma}$ ,  $\vartheta$ . Поверхность  $\alpha = \alpha(\dot{\gamma}, \vartheta)$  нельзя геометрически изобразить в трехмерном

пространстве. Можно изображать поверхности  $\alpha = \alpha(\vartheta, \Omega)$ ,  $\alpha = \alpha(\vartheta, \dot{\gamma})$ ,  $\alpha = \alpha(\Omega, \dot{\gamma})$  только при фиксированных значениях с  $\dot{\gamma}$ , либо  $\vartheta$ , либо  $\Omega$ . Подробная графическая интерпретация результатов решений уравнения (6) для прямоугольной пластинки с удлинением  $\lambda = 8$ , из которой видно нарушение единственности определения угла атаки при некоторых значениях  $\dot{\gamma}$ ,  $\vartheta$ ,  $\Omega$ , проведена в работе [1].

Изобразим некоторые из этих поверхностей со складкой, внутри которой кинематические соотношения (4) имеют ровно по три решения. Остановимся на области неоднозначности для поверхности  $\alpha = \alpha(\dot{\gamma}, \Omega)$  при фиксированном значении  $\vartheta = \frac{\pi}{10}$  изображен на рисунке 2.

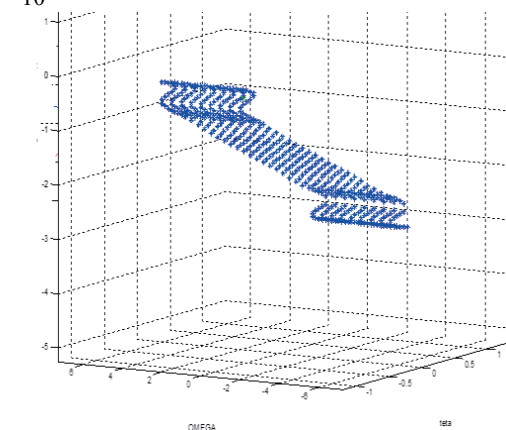


Р и с. 2. Решения уравнения (6) в случае  $\vartheta = \frac{\pi}{10}$

F i g. 2. Solutions to equation (6) in the case  $\vartheta = \frac{\pi}{10}$

При уменьшении значения скорости центра масс  $\vartheta$  до нуля на рассматриваемой поверхности, и области неоднозначности уменьшаются в размерах и появляется симметрия.

Изобразим на рисунке 4, последовательно находя численное решение уравнения (6), другую поверхность  $\alpha = \alpha(\Omega, \dot{\gamma})$  на участке неоднозначности при фиксированных значениях угла  $\vartheta$  ориентации тела. Построенная для случая  $\vartheta = 0$  поверхность симметрична относительно точки  $(0, 0, \frac{\pi}{2})$  и имеет по краям две складки, которые меньше по размеру, чем при  $\vartheta = \frac{\pi}{10}$ .



Р и с. 3. Решения уравнения (6) при  $\vartheta = 0$ . Области неоднозначности

F i g. 3. Solutions of equation (6) at  $\vartheta = 0$ . Areas of ambiguity

<sup>3</sup> Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1992.



Возникает вопрос: какое решение при прохождении области неоднозначности является истинным, и по какому правилу можно выбирать нужную ветвь при моделировании? Ведь неоднозначность определения угла атаки означает, что неоднозначно определяются аэродинамические функции и сдвиг центра давления. Учитывая то, что характер обтекания маятника носит непрерывный характер, значения угла атаки  $\alpha$  нужно выбирать, сохраняя его непрерывность. Приступим к проведению анализа положений равновесия для нашего тела.

## Решение уравнений равновесия

Рассмотрим поступательное движение тела. Найдем возможные стационарные решения.

При  $\dot{Y} = 0, \dot{\theta} = 0$  из кинематических соотношений (4), учитывая, что  $\frac{\partial \theta}{\partial Y} = \text{const}, Y_* = \text{const}$  следует, что  $\text{tg} \alpha_* = \text{ctg} \theta_*$ , откуда  $\alpha_* + \theta_* = \frac{\pi}{2}$ . Запишем уравнения равновесия для системы (7)

$$\begin{cases} c_y(\alpha_*) - kY_* = 0 \\ Rc_r(\alpha_*) - \varepsilon(\alpha_*)c_n(\alpha_*) = C\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_*\right) \end{cases} \quad (7)$$

Подробный анализ решений системы (7) в системе MATLAB для пластинок, имеющих удлинение восемь при уменьшении коэффициента жесткости  $c$  от больших значений до нуля при  $R > 0$  (тело ориентировано по потоку) и  $R < 0$  (тело ориентировано против потока), был проведен в работах [2-6]. Можно отметить, что при уменьшении коэффициента появляются новые положения равновесия, происходит их ветвление и число стационарных точек увеличивается и когда мы доходим до  $C = 0$ , мы имеем уже счетное множество стационарных точек [7]. У рассматриваемого тела есть неочевидные изолированные положения равновесия. Все найденные стационарные точки симметричны относительно положения  $\theta = 0, Y = 0$ , что под-

тверждает симметрию рассматриваемой задачи. Для всех найденных стационарных точек уравнение (6) преобразуется к виду:  $\text{tg} \alpha = \text{ctg} \theta$ . Это уравнение при фиксированном  $\theta$  имеет только одно решение, которое никогда не попадает в область неоднозначности. Таким образом, целесообразно проводить исследование устойчивости в рассматриваемых стационарных точках.

На этом анализ простейших положений равновесия можно закончить. Далее будет проведено исследование устойчивости произвольного положения равновесия:  $\theta = \theta_*, Y = Y_*$  в общем случае.

## Построение области устойчивости для произвольных стационарных точек

Будем считать, что маятник совершает малые колебания около произвольного положения равновесия  $Y = Y_*, \vartheta = \vartheta_*$ . Исследуем его устойчивость. Для исследования устойчивости воспользуемся критерием Гурвица [8] для системы четвертого порядка.

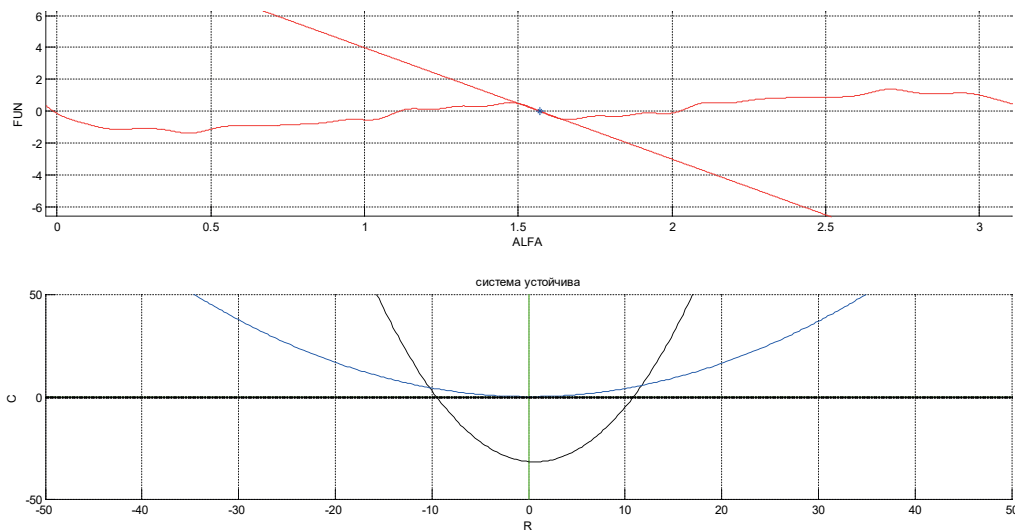
Пусть  $Y \rightarrow Y_*$  и  $\vartheta \rightarrow \vartheta_*$ . Введем малые отклонения:  $Y = Y_* + \Delta Y, \vartheta = \vartheta_* + \Delta \vartheta$ .

Линеаризуем уравнения движения (3)-(4), если  $\Delta Y \rightarrow 0$  и  $\Delta \vartheta \rightarrow 0$

Система уравнений первого приближения и условия Гурвица приведены для данной задачи в статье [2].

Их общий вид мы приводить не будем из-за того, что это достаточно большие и громоздкие выражения.

Изобразим области устойчивости для положения  $Y_* = 0, \vartheta_* = 0$  и для других положений  $(\vartheta_*, Y_*)$ , близких к тривиальному положению равновесия на плоскости безразмерных параметров  $(R, N)$ . Рассмотрим, также некоторые другие стационарные точки, близкие к центральному положению равновесия [9-16].

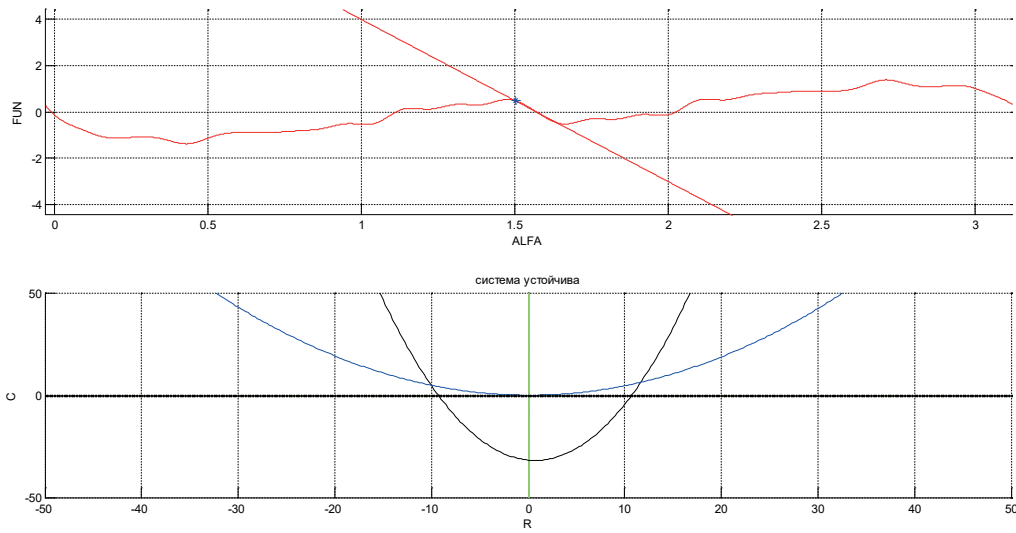


Р и с. 4. Область устойчивости в центральной точке  $Y_* = 0, \vartheta_* = 0$  и  $C = 7$

Fig. 4. Stability area at the central point  $Y_* = 0, \vartheta_* = 0$  and  $C = 7$

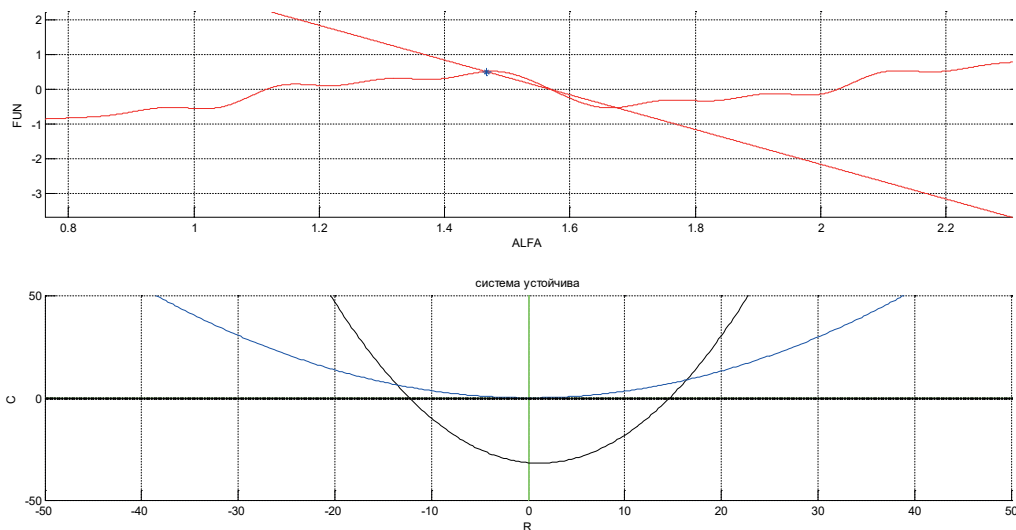


Исследуем как меняется область устойчивости с левой стороны от центральной точки  $Y_* = 0, \vartheta_* = 0$  при уменьшении  $C$ .



Р и с. 5. Область устойчивости при  $Y_* = 0.345, \vartheta_* = 0.0681$  и  $C = 7$   
Fig. 5. Stability area at  $Y_* = 0.345, \vartheta_* = 0.0681$  and  $C = 7$

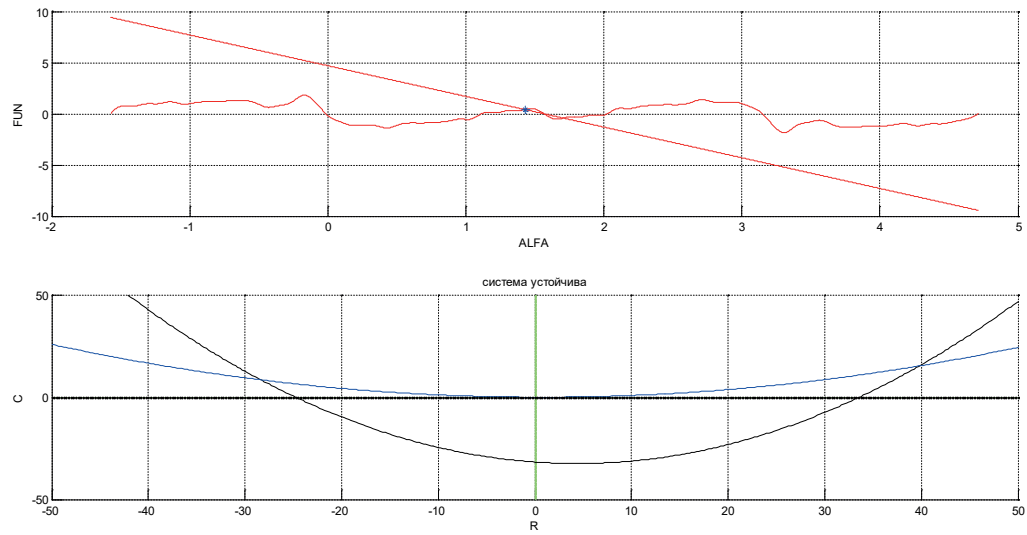
Ветви обеих парабол стали немного шире и размер области устойчивости увеличивается



Р и с. 6. Область устойчивости при  $Y_* = 0.486, \vartheta_* = 0.104$  и  $C = 5$   
Fig. 6. Stability area at  $Y_* = 0.486, \vartheta_* = 0.104$  and  $C = 5$

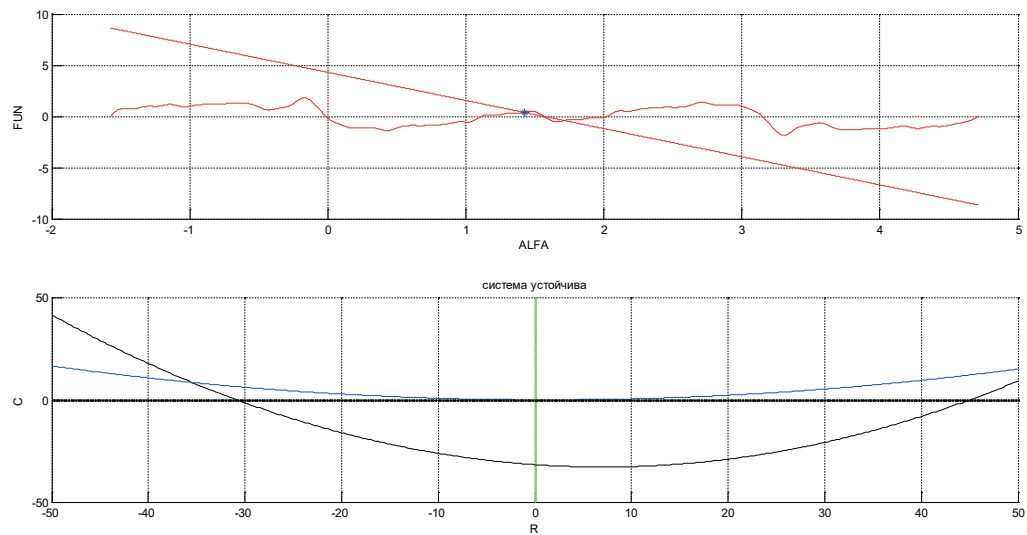


Происходит дальнейшее увеличение области устойчивости. Нижняя парабола немного смещается вправо



Р и с. 7. Область устойчивости при  $Y_* = 0.596$ ,  $\vartheta_* = 0.139$  и  $C = 3$   
Fig. 7. Stability area at  $Y_* = 0.596$ ,  $\vartheta_* = 0.139$  and  $C = 3$

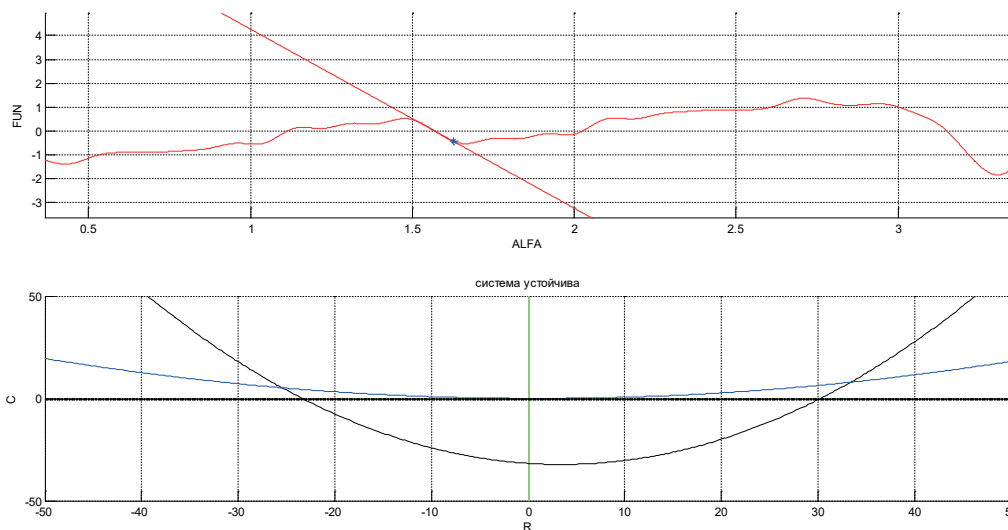
Происходит дальнейшее увеличение области устойчивости. Нижняя парабола еще смещается вправо



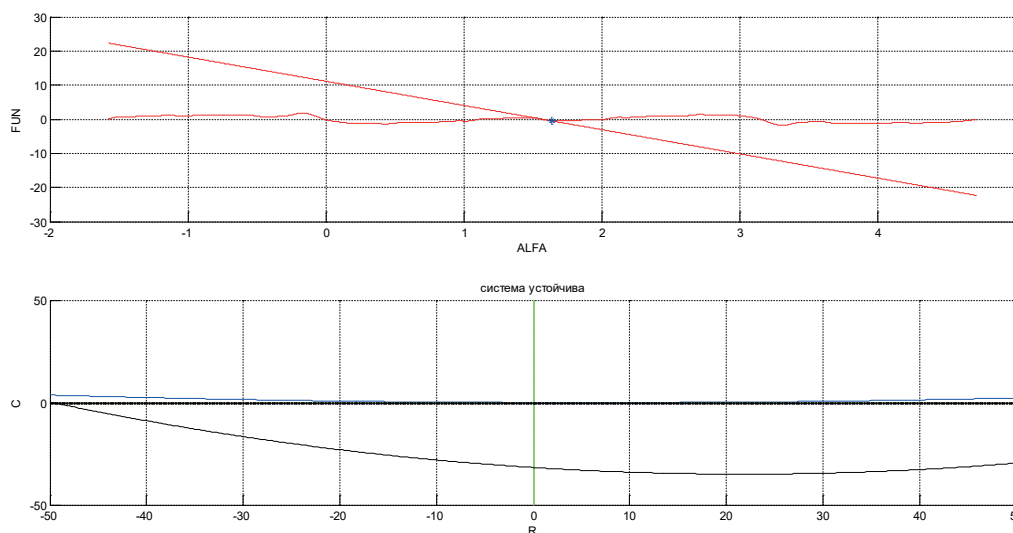
Р и с. 8. Область устойчивости при  $Y_* = 0.612$ ,  $\vartheta_* = 0.145$  и  $C = 2.75$   
Fig. 8. Stability area at  $Y_* = 0.612$ ,  $\vartheta_* = 0.145$  and  $C = 2.75$



Исследуем как меняется область устойчивости с левой стороны от центральной точки  $Y_* = 0, \vartheta_* = 0$



Р и с. 9. Область устойчивости при  $Y_* = -0.288, \vartheta_* = -0.059$  и  $C = 7.5$   
F i g. 9. Stability area at  $Y_* = -0.288, \vartheta_* = -0.059$  and  $C = 7.5$



Р и с. 10. Область устойчивости при  $Y_* = -0.335, \vartheta_* = -0.066$  и  $C = 7.1$   
F i g. 10. Stability area at  $Y_* = -0.335, \vartheta_* = -0.066$  and  $C = 7.1$

Здесь также происходит расширение и смещение парабол.

Граница области устойчивости является параболой и соответствует появлению нулевого корня в характеристическом уравнении. Такая граница области устойчивости соответствует ветвлению положений равновесия [17-20].

Исследование показало, что силы аэродинамического воздействия для тел с одними формами могут способствовать развитию автоколебаний, а для других затуханию.

Перейдем к следующему этапу данной работы – опишем программы, которые ищут стационарные точки, строят области устойчивости и реализуют численное интегрирование системы уравнений движения.





## Программа, численно решающая уравнений равновесия

В математическом пакете MATLAB 18 написана программа, которая находит численное решение уравнений равновесия (7). Сначала изображаются правые и левые части второго уравнения системы (7), графики функций  $y = Rc_r(\alpha) - \varepsilon(\alpha)c_n(\alpha)$  и  $y = C(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ .

Задача нахождения точек пересечения графиков функций  $y = Rc_r(\alpha) - \varepsilon(\alpha)c_n(\alpha)$  и  $y = C(\frac{\pi}{2} - \alpha)$  сводится к поиску численных решений системы уравнений:

$$\begin{cases} Rc_r(\alpha) - \varepsilon(\alpha)c_n(\alpha) - y = 0 \\ C(\frac{\pi}{2} - \alpha) - y = 0 \end{cases}$$

При решении этой системы необходимо учесть, что аэродинамические функции  $c_r(\alpha), c_n(\alpha), \varepsilon(\alpha)$  для плоских прямоугольных пластинок, представляют собой экспериментальные данные. Далее вводим  $\alpha, c_r(\alpha), c_n(\alpha), \varepsilon(\alpha)$

Для решения систем нелинейных уравнений в среде програм-

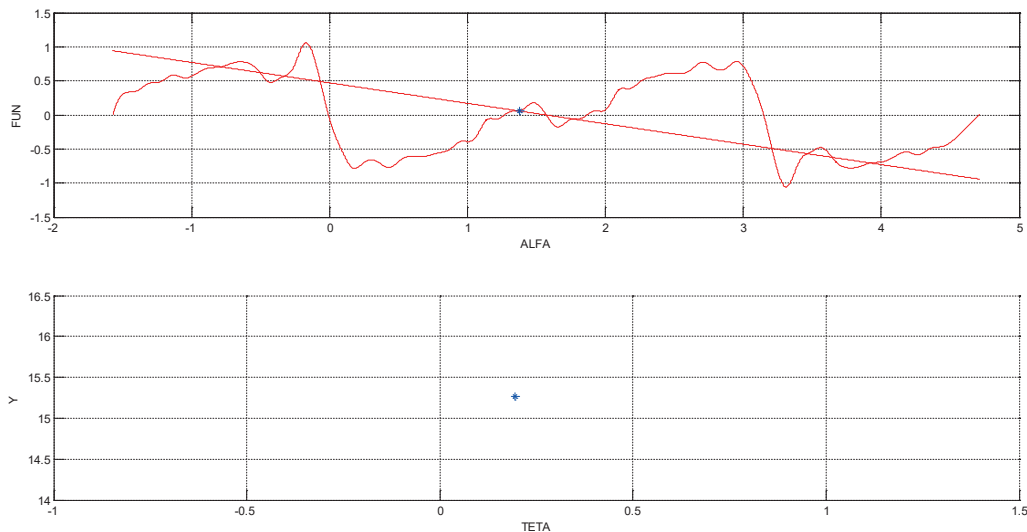
мирования MATLAB используется процедура `fsolve`, входящая в пакет расширения Optimization Toolbox. Эта процедура позволяет решить системы нелинейных уравнений вида:  $F(X) = 0$  методом наименьших квадратов. Необходимо подготовить файл-функцию для этой системы уравнений. Преобразованная система уравнений для составления файл-функции будет иметь вид:

$$F(X) = \begin{cases} f_1(x_1, x_2) = c(\frac{\pi}{2} - x(1)) - x(2) \\ f_2(x_1, x_2) = Rspline(alfa, c_r, x(1)) - spline(alfa, c_n, x(1)) spline(alfa, \varepsilon, x(1)) - x(2) \end{cases}$$

Значения  $c_r(\alpha), c_n(\alpha), \varepsilon(\alpha)$  в каждой точке итерационного процесса при поиске численных решений будем приближать кубическим сплайном.

После составления файла-функции в MATLAB графически вводится начальная точка итерационного процесса и происходит вызов процедуры `fsolve`:

```
params=ginput
y1=params
x=fsolve(@myfyn24,y1 ,optimset('Display','off'));
```



Р и с. 11. Решения уравнения равновесия и вывод стационарной точки  
Fig. 11. Solutions of the equilibrium equation and derivation of the stationary point

После завершения итерационного процесса найденное численное решение выводится с точностью, близкой к машинной.

## Программа, интегрирующая уравнения движения

В математическом пакете MATLAB 18 написана программа, реализующая численное интегрирование уравнений (3)-(4), описывающих колебания пластинки. Сначала вводятся основные параметры. В начале программы находится стационарная точка и для нее строится область устойчивости на плоскости параметров  $R, C$ . В программе задается интервал интегриро-

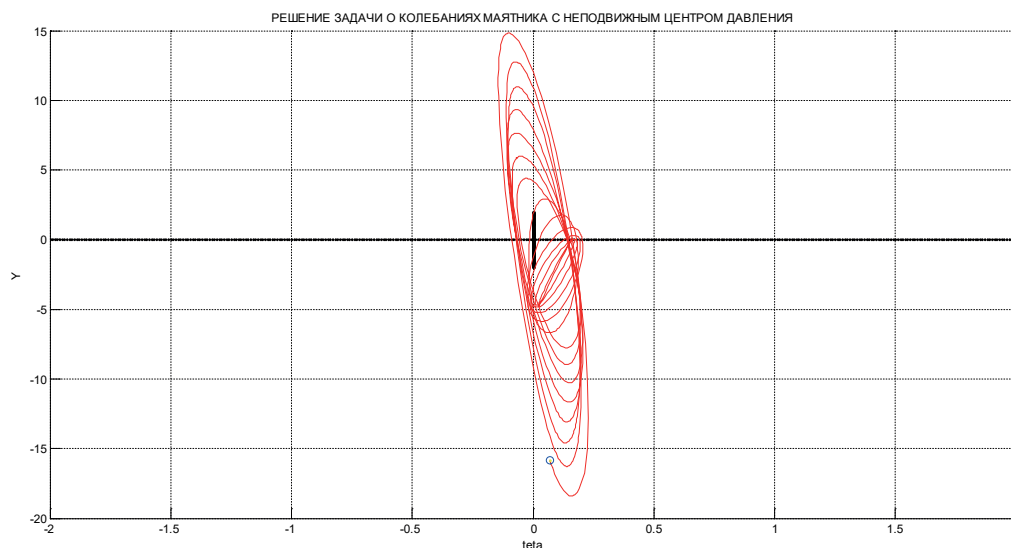
вания. Значения  $R$  и  $C$  вводятся путем выбора точки на графике области устойчивости.

При выполнении условий критерия Гурвица выводится сообщение: «Система устойчива». В противном случае выводится сообщение: «Система неустойчива». Начальные условия также выбираются графически.

При поиске численного решения используется процедура `ode45`, реализующая методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с переменным шагом. При поиске численного решения аэродинамические функции интерполируются кубическим сплайном [21-25].

Полученные путем интегрирования точки, изображаются как траектории в конфигурационном пространстве системы.





Р и с. 12. Решение задачи о колебаниях маятника с неподвижным центром давления  
F i g. 12. A solution of the problem of oscillations of a pendulum with a fixed pressure center

## Заключение

Таким образом, в работе:

1. Создана математическая модель колебаний аэродинамического маятника в безразмерной форме.
2. Показано нарушение единственности при определении угла атаки. Приведены примеры областей неоднозначности.

3. Проведены численные исследования устойчивости, в которых реализован критерий Гурвица и изображена эволюция областей устойчивости на плоскости параметров  $\tilde{N}, R$  для различных стационарных точек.
4. Предложен комплекс программ, позволяющий строить области устойчивости и проводить численное интегрирование уравнений движения для исследуемой модели.

## Список использованных источников

- [1] Самсонов В. А. Беляков Д. В. Геометрический анализ при исследовании колебаний тела сложной конфигурации в потоке среды // International Journal of Open Information Technologies. 2019. Т. 7, № 9. С. 31-38. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39529511> (дата обращения: 23.09.2021).
- [2] Беляков Д. В. Задача об исследовании автоколебаний аэродинамического маятника в потоке среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. Т. 16, № 2. С. 449-459. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.449-459>
- [3] Беляков Д. В. Математическое моделирование движения ротирующего спускающегося в воздухе объекта // Пятый Международный аэрокосмический конгресс IAC-06. Посвящается 20-летию вывода в космос орбитальной станции «МИР». Тезисы докладов. М., 2006. С. 62-63.
- [4] Беляков Д. В., Самсонов В. А., Филиппов В. В. Исследование движений несимметричного тела в сопротивляющейся среде // Вестник Московского энергетического института. 2006. № 4. С. 5-10. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (дата обращения: 23.09.2021).
- [5] Беляков Д. В. Разработка и исследование математической модели движения несимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде // Мехатроника, Автоматизация, Управление. 2007. № 11. С. 20-24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (дата обращения: 23.09.2021).
- [6] Samsonov V. A., Dosaev M. Z., Selyutskiy Yu. D. Methods of Qualitative Analysis in the Problem of Rigid Body Motion in Medium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2011. Vol. 21, no. 10. P. 2955-2961. doi: <https://doi.org/10.1142/S021812741103026X>
- [7] Strickland J. H., Webster B. T., Nguyen T. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study // Journal of Fluids Engineering. 1979. Vol. 101, issue 4. P. 500-505. doi: <http://doi.org/10.1115/1.3449018>
- [8] Лятхер В. М. Высотная ветровая электростанция с ортогональными агрегатами // Альтернативная энергетика и экология. 2014. № 7. С. 21-38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21497653> (дата обращения: 23.09.2021).



- [9] Москатов Г. К., Чепелев А. А. Надежность и безопасность систем автоматического управления летательными аппаратами // Научный вестник оборонно-промышленного комплекса России. 2013. № 2. С. 41-63. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24276464> (дата обращения: 23.09.2021).
- [10] Paraschivoiu I., Delclaux F. Double multiple streamtube model with recent improvements (for predicting aerodynamic loads and performance of Darrieus vertical axis wind turbines) // Journal of Energy. 1983. Vol. 7, no. 3. P. 250. doi: <http://doi.org/10.2514/3.48077>
- [11] Alqurashi F., Mohamed M. H. Aerodynamic Forces Affecting the H-Rotor Darrieus Wind Turbine // Modelling and Simulation in Engineering. 2020. Vol. 2020. Article number: 1368369. doi: <http://doi.org/10.1155/2020/1368369>
- [12] Parashivoiu I. Aerodynamic loads and rotor performance for the Darrieus wind turbines // Journal of Energy. 1982. Vol. 6. P. 406-412. doi: <http://doi.org/10.2514/6.1981-2582>
- [13] Досаев М. З., Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. О динамике малой ветроэлектростанции // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 1. С. 50-53. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9533786> (дата обращения: 23.09.2021).
- [14] Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. Сопоставление различных форм записи уравнений движения тела в потоке среды // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 171-178. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=10293701> (дата обращения: 23.09.2021).
- [15] Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2004. № 4. С. 24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17636289> (дата обращения: 23.09.2021).
- [16] Привалов В. А., Самсонов В. А. Об устойчивости движения тела, авторотирующего в потоке среды // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. № 2. С. 32-38.
- [17] Applications and Developments of Aeroelasticity of Flexible Structure in Flow Controls / J. Z. Zhang [и др.] // Advances in Mechanics. 2018. Vol. 48, issue 1. P. 299-319. doi: <http://doi.org/10.6052/1000-0992-16-034>
- [18] Климина Л. А. Ротационные режимы движения аэродинамического маятника с вертикальной осью вращения // Вестник Московского университета. Серия 1. Математика. Механика. 2009. № 5. С. 71-74. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=10293701> (дата обращения: 23.09.2021).
- [19] Климина Л. А., Локшин Б. Я. Об одном конструктивном методе поиска ротационных и автоколебательных режимов в автономных динамических системах // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 1. С. 25-40. doi: <http://doi.org/10.20537/nd1701003>
- [20] Климина Л. А. Метод формирования асинхронных автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 2. С. 152-171. doi: <http://doi.org/10.31857/S0032823521020065>
- [21] Yao J., Yeo K. S. Free hovering of hummingbird hawkmoth and effects of wing mass and wing elevation // Computers & Fluids. 2019. Vol. 186. P. 99-127. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.04.007>
- [22] Hesamian G., Akbari M. G. A fuzzy additive regression model with exact predictors and fuzzy responses // Applied Soft Computing. 2020. Vol. 95. Article number: 106507. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106507>
- [23] Radionov A. A., Gasiyarov V. R. Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021) // Lecture Notes in Mechanical Engineering. Vol. II. Springer Cham, 2022. 849 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-85230-6>
- [24] Li Q., Hou P. Three-dimensional quasi-static general solution for isotropic thermoelastic medium with applications // Case Studies in Thermal Engineering. 2021. Vol. 25. Article number: 100897. doi: <https://doi.org/10.1016/j.csite.2021.100897>
- [25] Liu X., Xu J., Liu Y. Trajectory tracking and point stability of three-axis aero-dynamic pendulum with MPC strategy in disturbance environment // Assembly Automation. 2021. Vol. 41, no. 3. P. 358-368. doi: <https://doi.org/10.1108/AA-11-2020-0181>

*Поступила 23.09.2021; одобрена после рецензирования 15.10.2021; принята к публикации 29.10.2021.*

#### Об авторе:

**Беляков Дмитрий Валерьевич**, доцент кафедры компьютерной математики, Институт № 8 «Информационные технологии и прикладная математика», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), кандидат технических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, [dimbel@rambler.ru](mailto:dimbel@rambler.ru)

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*



## References

- [1] Samsonov V.A., Belyakov D.V. Geometrical analysis in the study of body oscillations of complex configuration in the medium flow. *International Journal of Open Information Technologies*. 2019; 7(9):31-38. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39529511> (accessed 23.09.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [2] Belyakov D.V. The Problem of Studying the Self-Oscillations of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Medium. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2020; 16(2):449-459. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.449-459>
- [3] Belyakov D.V. *Matematicheskoe modelirovanie dvizhenija rotirujushhego spuskaushhegosja v vozduhe ob'ekta* [Mathematical modeling of the motion of a rotating object descending in the air]. *Proceedings of the Fifth international Aerospace Congress IAC-06. Dedicated to the 20th anniversary of the launch of the MIR Space Station*. Moscow; 2006. p. 62-63. (In Russ.)
- [4] Belyakov D.V., Samsonov V.A., Filippov V.V. Motion Investigation of Asymmetric Solid in Resistant Environment. *Vestnik Moskovskogo jenergeticheskogo instituta* = Vestnik MEI. Bulletin of Moscow Power Engineering Institute. 2006; (4):5-10. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (accessed 23.09.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [5] Belyakov D.V. Development and Features of Mathematical Model of Movement Asymmetrical Autorotating Bodies in Quasi-static to Environment. *Mehatronika, Avtomatizacija, Upravljenje* = Mechatronics, Automation, Control. 2007; (11):20-24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (accessed 23.09.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [6] Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Yu.D. Methods of Qualitative Analysis in the Problem of Rigid Body Motion in Medium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011; 21(10):2955-2961. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1142/S021812741103026X>
- [7] Strickland J.H., Webster B.T., Nguyen T. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study. *Journal of Fluids Engineering*. 1979; 101(4):500-505. (In Eng.) doi: <http://doi.org/10.1115/1.3449018>
- [8] Lyatkher V.M. High Jet Power Station with Orthogonal Power Units. *Alternativnaya Energetika i Ekologiya* = Alternative Energy and Ecology. 2014; (7):21-38. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=21497653> (accessed 23.09.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [9] Moskatov G.K., Chepelev A.A. Reliability and safety of feedback flight control systems. *Scientific Bulletin of the military-industrial complex of Russia*. 2013; (2):41-63. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24276464> (accessed 23.09.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [10] Paraschivoiu I., Delclaux F. Double multiple streamtube model with recent improvements (for predicting aerodynamic loads and performance of Darrieus vertical axis wind turbines). *Journal of Energy*. 1983; 7(3):250. (In Eng.) doi: <http://doi.org/10.2514/3.48077>
- [11] Alqurashi F., Mohamed M.H. Aerodynamic Forces Affecting the H-Rotor Darrieus Wind Turbine. *Modelling and Simulation in Engineering*. 2020; 2020:1368369. (In Eng.) doi: <http://doi.org/10.1155/2020/1368369>
- [12] Parashivoiu I. Aerodynamic loads and rotor performance for the Darrieus wind turbines. *Journal of Energy*. 1982; 6:406-412. (In Eng.) doi: <http://doi.org/10.2514/6.1981-2582>
- [13] Dosaev M.Z., Samsonov V.A., Seliutski Yu.D. On the Dynamics of a Small-Scale Wind Power Generator. *Doklady Physics*. 2007; 52(9):493-495. (In Eng.) doi: <http://doi.org/10.1134/S1028335807090091>
- [14] Samsonov V.A., Selyutskii Yu.D. Comparison of Different Notation for Equations of Motion of a Body in a Medium Flow. *Mechanics of Solids*. 2008; 43(1):146-152. (In Eng.) doi: <http://doi.org/10.1007/s11964-008-1015-x>
- [15] Samsonov V.A., Selyutskii Yu.D. About Vibrations of a Plate in a Flow of a Resisting Medium. *Mechanics of Solids*. 2004; (4):24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17636289> (accessed 23.09.2021). (In Russ., abstract in Eng.)
- [16] Privalov V.A., Samsonov V.A. *Ob ustojchivosti dvizhenija tela, avtorotirujushhego v potoke srede* [On the Stability of Motion of a Body Autorotating in the Flow of a Medium]. *Izv. USSR Acad. Sci. MTT*. 1990; (2):32-38. (In Russ.)
- [17] Zhang J.Z., Liu Y., Sun X., Chen J.H., Wang L. Applications and Developments of Aeroelasticity of Flexible Structure in Flow Controls. *Advances in Mechanics*. 2018; 48(1):299-319. (In Eng.) doi: <http://doi.org/10.6052/1000-0992-16-034>
- [18] Klimina L.A. Rotational modes of motion for an aerodynamic pendulum with a vertical rotation axis. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2009; 64(5):126-129. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.3103/S0027133009050069>
- [19] Klimina L.A., Lokshin B.Ya. On a constructive method of search for rotary and oscillatory modes in autonomous dynamical systems. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2017; 13(1):25-40. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <http://doi.org/10.20537/nd1701003>
- [20] Klimina L.A. Method for Generating Asynchronous Self-Sustained Oscillations of a Mechanical System with Two Degrees of Freedom. *Mechanics of Solids*. 2021; 56(7):1167-1180. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654421070141>
- [21] Yao J., Yeo K.S. Free hovering of hummingbird hawkmoth and effects of wing mass and wing elevation. *Computers & Fluids*. 2019; 186; 99-127. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.04.007>
- [22] Hesamian G., Akbari M.G. A fuzzy additive regression model with exact predictors and fuzzy responses. *Applied Soft Computing*. 2020; 95:106507. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106507>
- [23] Radionov A.A., Gasiyarov V.R. Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021). *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Vol. II. Springer Cham; 2022. 849 p. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-85230-6>
- [24] Li Q., Hou P. Three-dimensional quasi-static general solution for isotropic thermoelastic medium with applications. *Case Studies in Thermal Engineering*. 2021; 25:100897. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.csite.2021.100897>



- [25] Liu X., Xu J., Liu Y. Trajectory tracking and point stability of three-axis aero-dynamic pendulum with MPC strategy in disturbance environment. *Assembly Automation*. 2021; 41(3):358-368. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1108/AA-11-2020-0181>

*Submitted 23.09.2021; approved after reviewing 15.10.2021; accepted for publication 29.10.2021.*

**About the author:**

**Dmitry V. Belyakov**, Associate Professor of the Department of Computational Mathematics, Institute of Computer Mathematics and Information Technologies, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation), Cand.Sci. (Eng.), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, [dimbel@rambler.ru](mailto:dimbel@rambler.ru)

*The author has read and approved the final manuscript.*

