

Беляков Д.В.

Московский Авиационный Институт (национальный исследовательский университет), г. Москва,
Россия.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

АННОТАЦИЯ

Работа посвящена построению и исследованию математической модели движения тела сложной конфигурации в гравитационном поле.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА

Авторотация; тело сложной конфигурации; стационарный режим; осреднение; установочный угол тела; установочный угол пластинок.

Belyakov D.V.

Moscow aircraft institute (national exploratory university)

STUDY OF THE MOVING THE SYMMETRYCAL BODY IN QAUSTATIC TO AMBIENCE

ABSTRACT

Work is dedicated to building and study to mathematical model of the moving the body to complex deskside in gravitation field.

KEYWORDS

Autorotation; body to complex deskside; stationary mode; averaging; mounting corner of the body; mounting corner plate.

Введение

В истории развития аэродинамики можно выделить два направления: первое - разработка новых идей и путей совершенствования летательных аппаратов, второе - изыскание способов предотвращения возникающих опасных физических явлений, ведущих к большим материальным потерям и человеческим жертвам. Явление авторотации означает свободное вращение несущего винта под воздействием набегающего потока. Эта проблема появилась в начале прошлого века в период разработки первых вертолетов и автожиров и очень актуальна в авиаракетостроении. С одной стороны, режим авторотации может быть использован в качестве режима аварийной посадки вертолета. При этом сила сопротивления максимальна и компенсирует силу тяжести. С другой стороны, неправильная ориентация самолета по отношению к набегающему потоку лишь усиливает сопротивление и это может привести к самовращению или штопору, а при минимальном сопротивлении полет самолета устойчив по отношению к вращению. В работе рассматривается математическая модель движения тела сложной конфигурации в квазистатической среде и показывается, что из него можно построить систему безопасного спуска в атмосфере и выбор управления для достижения максимального угла отклонения при спуске.

Постановка задачи

Рассмотрим плоскопараллельное движение в квазистатической среде тела сложной конфигурации. Тело состоит из стержня и двух параллельных пластинок. Плоскости пластинок образуют угол δ с плоскостью, ортогональной стержню (Рис. 1). Будем считать, что движение происходит в вертикальной плоскости.

В модели воздействия среды на тело используется гипотеза о квазистационарном обтекании пластинок средой [1], [3]. Согласно этой гипотезе сила воздействия среды на каждую пластинку характеризуется скоростью некоторой ее точки, которая называется центром давления. Модель с неподвижным центром давления рассматривалась в [1], [3]. В рассматриваемой модели предполагается, что центры давления пластинок точки А и В можно считать неподвижными относительно пластинок. Аэродинамические силы, действующие на каждую пластинку, разложим

на две составляющие: силы сопротивления \vec{S}_A, \vec{S}_B , направленные против абсолютных скоростей \vec{V}_A, \vec{V}_B центров давления, и подъемные силы \vec{P}_A, \vec{P}_B , направленные им ортогонально. При этом

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha + \delta)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha + \delta)V_A^2$$

$$|\vec{P}_A| = p(\alpha + \delta)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha + \delta)V_A^2$$

величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_B| = s(\beta + \delta)V_B^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\beta + \delta)V_B^2$$

$$|\vec{P}_B| = p(\beta + \delta)V_B^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\beta + \delta)V_B^2$$

Где α, β - углы атаки между векторами окружных скоростей ($\vec{v}_{AO}, \vec{v}_{BO}$) точек A, B и векторами \vec{V}_A, \vec{V}_B

p, s - аэродинамические функции углов атаки, c_x, c_y - безразмерные аэродинамические функции,

ρ - плотность воздуха, σ - площадь одной пластинки. Зависимости $c_x(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$ определены

из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и являются экспериментальными данными [2]. Их типичный вид (для удлинения $\lambda = 8$) представлен на рисунке 3.

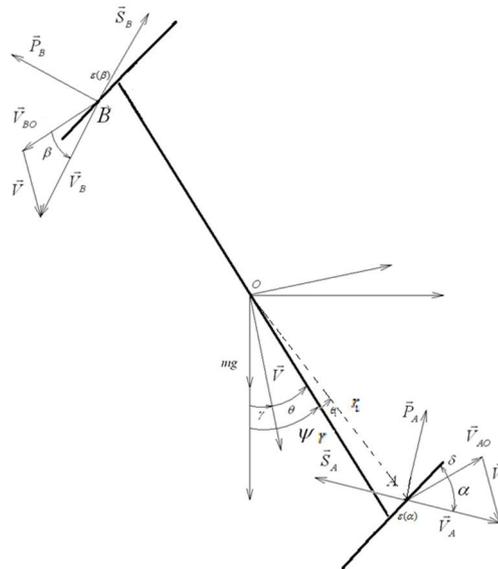


Рис.1. Тело сложной конфигурации

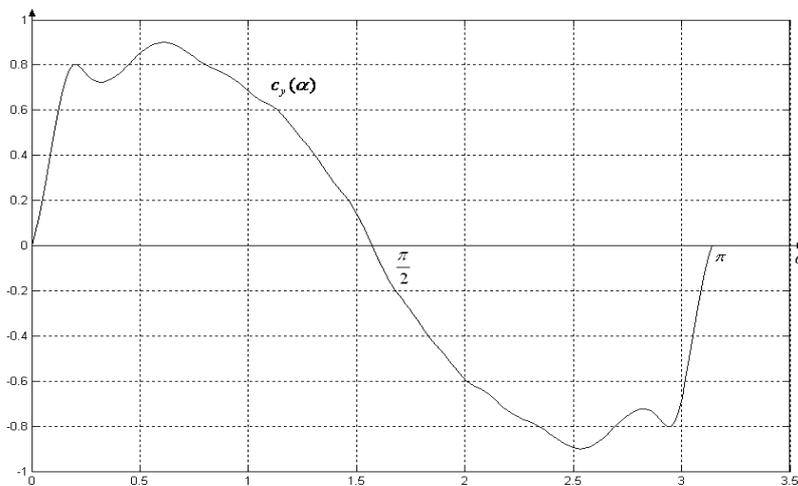


Рис.2. Аэродинамическая функция подъемной силы

В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координаты x, y центра масс O , совпадающего с серединой стержня AB , и угол ψ отклонения стержня AB от

вертикали. Для описания распределения скоростей точек нашего тела, зададим величину вектора абсолютной скорости центра масс \vec{V} , угол γ отклонения вектора \vec{V} от вертикали, угол θ отклонения стержня АВ от вектора абсолютной скорости центра масс \vec{V} и абсолютную угловую скорость стержня $\vec{\omega}$.

Где α, β - углы атаки между векторами окружных скоростей ($\vec{V}_{AO}, \vec{V}_{BO}$) точек A, B и векторами \vec{V}_A, \vec{V}_B , p, s - аэродинамические функции углов атаки, c_x, c_y - безразмерные аэродинамические функции, ρ - плотность воздуха, σ - площадь одной пластинки. Зависимости $c_x(\alpha)$ и $c_y(\alpha)$ определены из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и являются экспериментальными данными [2]. Их типичный вид (для удлинения $\lambda = 8$) представлен на рисунке 3.

В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координаты x, y центра O масс, совпадающего с серединой стержня АВ, и угол ψ отклонения стержня АВ от вертикали. Для описания распределения скоростей точек нашего тела, зададим величину вектора абсолютной скорости центра масс \vec{V} , угол γ отклонения вектора \vec{V} от вертикали, угол θ отклонения стержня АВ от вектора абсолютной скорости центра масс \vec{V} и абсолютную угловую скорость стержня $\vec{\omega}$.

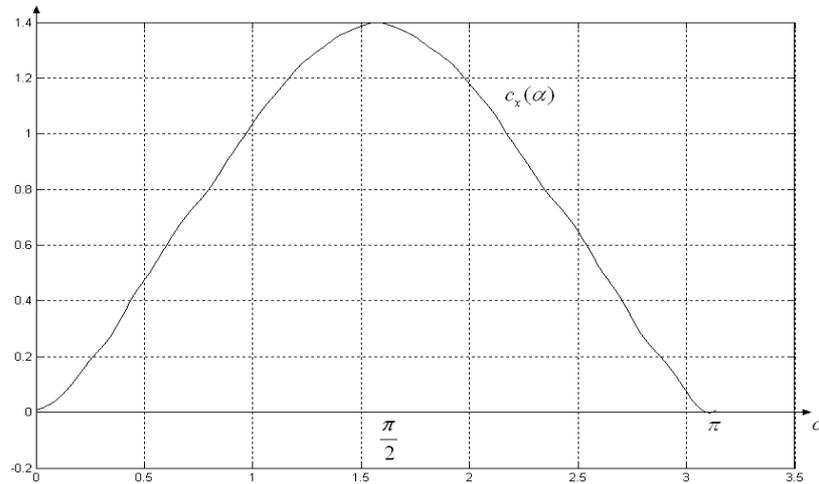


Рис.3. Аэродинамическая функция силы сопротивления

Для того, чтобы составить уравнения движения тела, воспользуемся теоремой о движении центра масс в проекциях на направление вектора V и ему ортогональное, теоремой об изменении кинетического момента и теоремой о сложении скоростей. Получим:

$$\begin{aligned}
 m\dot{V} &= p(\alpha)V_A r \dot{\theta} \cos \theta - p(\beta)V_B r \dot{\theta} \cos \theta + s(\alpha)V_A (r \dot{\theta} \sin \theta - V) - s(\beta)V_B (r \dot{\theta} \sin \theta + V) + mg \cos \gamma \\
 mV\dot{\gamma} &= -s(\alpha)V_A r \dot{\theta} \cos \theta + s(\beta)V_B r \dot{\theta} \cos \theta + p(\alpha)V_A (r \dot{\theta} \sin \theta - V) - p(\beta)V_B (r \dot{\theta} \sin \theta + V) - mg \sin \gamma \\
 J\dot{\omega} &= r(V_A^2 (p(\alpha) \sin(\alpha - \delta) - s(\alpha) \cos(\alpha - \delta)) + V_B^2 (p(\beta) \sin(\beta - \delta) - s(\beta) \cos(\beta - \delta))) \\
 \dot{\theta} + \dot{\gamma} &= \omega \\
 \dot{x} &= V \cos \gamma \\
 \dot{y} &= V \sin \gamma
 \end{aligned} \tag{1}$$

Соотношения, определяющие величины V_A, V_B, α, β , через фазовые переменные V, θ, ω , имеют вид:

$$\begin{aligned}
 V_A \sin(\alpha - \delta) &= -V \cos \theta, V_B \sin(\beta - \delta) = V \cos \theta, \\
 V_A \cos(\alpha - \delta) &= r \dot{\theta} - V \sin \theta, V_B \cos(\beta - \delta) = r \dot{\theta} + V \sin \theta
 \end{aligned} \tag{2}$$

Кинематические соотношения, связывающие координаты центра масс с V и γ имеют вид:

$$\dot{x} = V \cos \gamma, \dot{y} = V \sin \gamma \quad (3)$$

Таким образом, построена математическая модель движения тела, представляющая замкнутую систему уравнений (1)-(3)

Режим авторотации

Будем считать, что тело совершает спуск в режиме авторотации, т.е. $V \ll r\omega$.

Аэродинамические функции c_x, c_y разложим в ряд учитывая, что $\alpha, \beta \rightarrow \delta$

$$\begin{aligned} c_x(\alpha) &= c_{x\delta} + c'_{x\delta}(\alpha - \delta), c_y(\alpha) = c_{y\delta} + c'_{y\delta}(\alpha - \delta), \\ c_x(\beta) &= c_{x\delta} + c'_{x\delta}(\beta - \delta), c_y(\beta) = c_{y\delta} + c'_{y\delta}(\beta - \delta), \\ \varepsilon(\alpha) &= \varepsilon_\delta + \varepsilon'_\delta(\alpha - \delta), \varepsilon(\beta) = \varepsilon_\delta + \varepsilon'_\delta(\beta - \delta) \end{aligned}$$

где:

$$\begin{aligned} c_{x\delta} &= c_x(\delta), c'_{x\delta} = c'_x(\delta), c_{y\delta} = c_y(\delta) \\ c'_{y\delta} &= c'_y(\delta), \varepsilon_\delta = \varepsilon(\delta), \varepsilon'_\delta = \varepsilon'(\delta) \end{aligned}$$

Левые части кинематических соотношений (2) линеаризуем в случае $\alpha, \beta \rightarrow \delta$:

$$\begin{aligned} V_A(\alpha - \delta) &= -V \cos \theta \\ V_B(\beta - \delta) &= V \cos \theta \\ V_A &= r\omega - V \sin \theta \\ V_B &= r\omega + V \sin \theta \end{aligned}$$

Пользуясь этими соотношениями, сделаем в уравнениях (1), переход от переменных α, β, V_A, V_B к переменным θ, V, ω . Проведем осреднение полученной системы на отрезке $[0, 2\pi]$. Осредненная система имеет следующее стационарное решение ω_0, V_0, γ_0 :

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \frac{1}{r} \sqrt{\frac{2mg \cos \gamma_0}{\rho \sigma (c'_{y0} + 3c_{x0} + 3c_{x2} \delta^2)}} \sqrt{\frac{c'_{y0} - c_{x0} - c_{x2} \delta^2}{2c_{x0} + c_{x2} \delta^2}} \\ V_0 &= \sqrt{\frac{2mg \cos \gamma_0}{\rho \sigma (c'_{y0} + 3c_{x0} + 3c_{x2} \delta^2)}} \sqrt{\frac{2c_{x0} + c_{x2} \delta^2}{c'_{y0} - c_{x0} - c_{x2} \delta^2}} \\ \gamma_0 &= \arctg \left[\frac{2c_{x2} \delta - 3c'_{y0} \delta}{c'_{y0} + 3c_{x0} + c_{x2} 3\delta^2} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

Коэффициенты $c_{x\delta}, c'_{x\delta}, c_{y\delta}, c'_{y\delta}$ связаны с δ так:

$$c_{x\delta} = c_{x0} + c_{x2} \delta^2, c'_{x\delta} = 2c_{x2} \delta, c_{y\delta} = c'_{y0} \delta, c'_{y\delta} = c'_{y0}, \text{ где } c_{x0} = c_x(0), c_{x2} = \frac{1}{2} c''_x(0), c'_{y0} = c'_y(0).$$

Режим (4) носит название режима авторотации. При малых δ установившийся угол планирования в режиме авторотации γ_0 пропорционален величине установочного угла пластинок δ . Режим авторотации является притягивающим и он асимптотически устойчив.

Сравнение установившейся скорости режима авторотации со скоростями других режимов

Проведем сравнение стационарного значения вертикальной составляющей скорости на режиме авторотации со стационарными значениями вертикальных составляющих скоростей на других установившихся режимах, при которых тело движется поступательно. Установившийся угол планирования в режиме авторотации γ_0 пропорционален величине угла перекоса пластинок δ . Если он достаточно мал, то вертикальная составляющая скорости в первом приближении будет иметь такой же вид, как в формулах (17), определяющих параметры режима авторотации.

$$V_{y0} = \sqrt{\frac{2mg}{\rho\sigma(c'_{y0} + 3c_{x0} + 3c_{x2}\delta^2)}} \sqrt{\frac{2(c_{x0} + c_{x2}\delta^2)}{c'_{y0} - c_{x0} - c_{x2}\delta^2}} <$$

$$< \sqrt{\frac{2mg}{\rho\sigma(c'_{y0} + 3c_{x0})}} \sqrt{\frac{2c_{x0}}{c'_{y0} - c_{x0}}}$$

С другой стороны, для минимального значения вертикальной составляющей скорости при поступательном движении в § 2 Главы 1 при помощи первого приближения была получена оценка

$$(13). \text{ Таким образом, достаточно сравнить: } \sqrt{\frac{1}{(c'_{y0} + 3c_{x0})}} \sqrt{\frac{2c_{x0}}{c'_{y0} - c_{x0}}} \text{ и } \sqrt{\frac{c_{x2}}{[4c_{x0}c_{x2} + (c'_{y0})^2]}}.$$

Для тела, имеющего прямоугольные пластинки с удлинением ($\lambda = 8$), имеем:

$$c_{x0} = 0.01, c''_{x0} \approx 2.6242,$$

$$c_{x2} = \frac{1}{2} c''_{x0} = 1.3121, c'_{y0} = 4.58$$

$$\sqrt{\frac{1}{(c'_{y0} + 3c_{x0})}} \sqrt{\frac{2c_{x0}}{c'_{y0} - c_{x0}}} = 0.0379 \quad \sqrt{\frac{c_{x2}}{[4c_{x0}c_{x2} + (c'_{y0})^2]}} = 0.2498.$$

Таким образом, неравенство $V_0 < V_{y6}$ выполнено заведомо, так что вертикальная проекция скорости в режиме авторотации является минимальной по сравнению с вертикальными составляющими скоростей на других простейших установившихся режимах.

Закон управления

Рассмотрим задачу управления установочным углом $\delta = \delta(\vartheta)$ для максимизации угла $\gamma(\vartheta, V\omega)$ отклонения от вертикали при спуске в режиме авторотации: нужно выбрать управление установочным углом пластинок δ таким образом, чтобы боковая сила была максимальна. Пусть тело раскручено до высокой угловой скорости, т.е. $r\omega \gg V, \alpha, \beta \rightarrow \delta$.

После простых преобразований, проведем линеаризацию кинематических соотношений (1.2):

$$\alpha - \delta = -\arctg\left(\frac{V \cos \theta}{r\omega - V \sin \theta}\right) = -\arctg\left(\frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon \sin \theta}\right) \square -\frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon \sin \theta}$$

$$\beta - \delta = \arctg\left(\frac{V \cos \theta}{r\omega + V \sin \theta}\right) = \arctg\left(\frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \sin \theta}\right) \square \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \sin \theta}$$

где $\varepsilon = \frac{V}{r\omega}$ - малый параметр

Из (1.2) выразим V_A, V_B :

$$V_A = -\frac{V \cos \theta}{\sin(\alpha - \delta)} = \frac{r\omega - V \sin \theta}{\cos(\alpha - \delta)}, V_B = \frac{V \cos \theta}{\sin(\beta - \delta)} = \frac{r\omega + V \sin \theta}{\cos(\beta - \delta)}$$

Функции $\sin(\alpha - \delta), \cos(\alpha - \delta), \sin(\beta - \delta), \cos(\beta - \delta)$ также разложим в ряд, оставив только члены первого порядка:

$$\sin(\alpha - \delta) = \sin\left(-\arctg\left(\frac{V \cos \theta}{r\omega - V \sin \theta}\right)\right) \square -\frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon \sin \theta}, \sin(\beta - \delta) = \sin\left(\arctg\left(\frac{V \cos \theta}{r\omega + V \sin \theta}\right)\right) \square \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \sin \theta}$$

$$\cos(\alpha - \delta) = \cos\left(-\arctg\left(\frac{V \cos \theta}{r\omega - V \sin \theta}\right)\right) \square 1, \cos(\beta - \delta) = \cos\left(\arctg\left(\frac{V \cos \theta}{r\omega + V \sin \theta}\right)\right) \square 1$$

Проведем линеаризацию функций p, s при $\alpha, \beta \rightarrow 0$.

$$s(\alpha) = s_\delta + s'_\delta(\alpha - \delta), p(\alpha) = p_\delta + p'_\delta(\alpha - \delta),$$

$$s(\beta) = s_\delta + s'_\delta(\beta - \delta), p(\beta) = p_\delta + p'_\delta(\beta - \delta)$$

здесь $s_\delta = s(0), s'_\delta = s'(0), p_\delta = p(0), p'_\delta = p'(0)$.

Преобразуем правую часть второго уравнения системы (1.1) которая представляет собой

боковую силу и сделаем переход от переменных α, β, V_A, V_B к фазовым переменным θ, V, ω .

После вычислений получим:

$$F_{бок} = 2s(\delta)(r\omega)^2 \cos \theta + 2s'(\delta)Vr\omega \cos^2 \theta - 2p(\delta)Vr\omega(1 + \sin^2 \theta) + \\ + p'(\delta)\left[\frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon \sin \theta}((r\omega)^2 + V^2) \sin \theta - \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \sin \theta}Vr\omega(1 + \sin^2 \theta)\right]$$

В случае малых значений δ справедливы соотношения:

$$p(\delta) = p'(0)\delta = p'_0\delta, \quad p'(\delta) = p'(0) = p'_0$$

$$s(\delta) = s(0) + \frac{1}{2}s''(0)\delta^2 = s_0 + s_2\delta^2, \quad s'(\delta) = 2s_2\delta$$

Учитывая эти соотношения будем иметь:

$$F_{бок}(\delta, V, \omega, \theta) = 2(s_0 + s_2\delta^2)(r\omega)^2 \cos \theta + 4s_2Vr\omega \cos^2 \theta - 2p'_0\delta Vr\omega(1 + \sin^2 \theta) + \\ + p'_0\left[\frac{\varepsilon \cos \theta}{1 - \varepsilon \sin \theta}((r\omega)^2 + V^2) \sin \theta - \frac{\varepsilon \cos \theta}{1 + \varepsilon \sin \theta}Vr\omega(1 + \sin^2 \theta)\right] \quad (5)$$

Боковая сила (2.1) если зафиксировать θ, V, ω представляет собой параболу, ветви которой направлены вниз, если $\cos \theta < 0$. Найдём для (2.1) экстремум по δ при всех фиксированных значениях θ, V, ω

$$\frac{dF_{бок}}{d\delta} = 4\delta s_2(r\omega)^2 \cos \theta + 4s_2Vr\omega \cos^2 \theta - 2p'_0Vr\omega(1 + \sin^2 \theta) = 0$$

$$\text{Отсюда: } \delta(\theta) = \frac{1}{2} \frac{V}{r\omega} \frac{p'_0(1 + \sin^2 \theta) - 2s_2 \cos^2 \theta}{s_2 \cos \theta} = \frac{1}{2} \varepsilon \frac{p'_0(1 + \sin^2 \theta) - 2s_2 \cos^2 \theta}{s_2 \cos \theta}$$

(См. рис. 4).

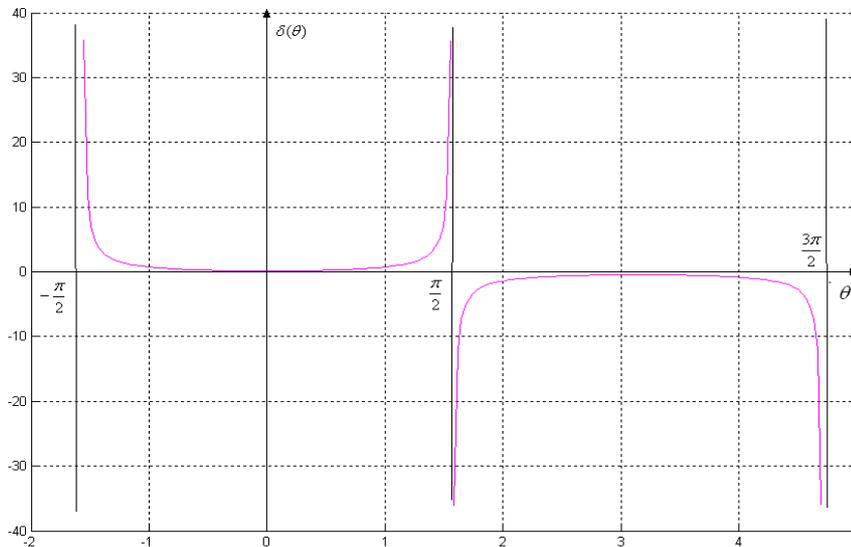


Рис. 4

Таким образом:

$$\delta(\vartheta) = \begin{cases} \frac{1}{2} \frac{V_0}{r\omega_0} \frac{p'_0(1 + \sin^2 \theta) - 2s_2 \cos^2 \theta}{s_2 \cos \theta}, & \text{если } \frac{\pi}{2} + 2\pi k < \theta < \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \\ \delta_0, & \text{если } 2\pi k \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad (6)$$

Типичный вид закона управления $\delta(\vartheta)$ изображен на рис. 3:

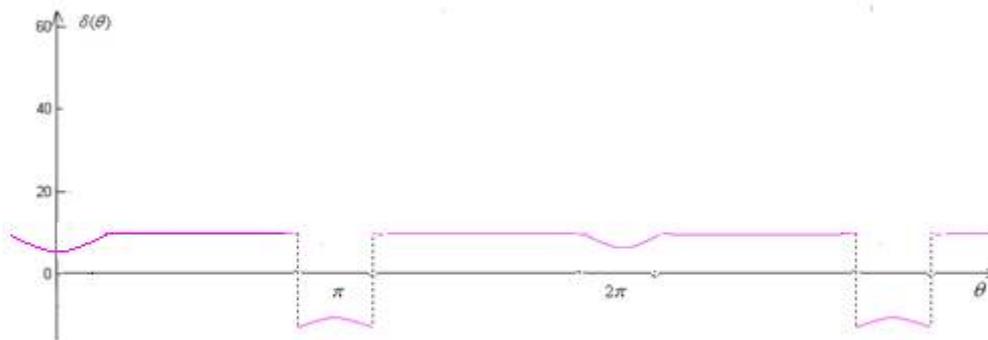


Рис. 5

Численное интегрирование уравнений движения тела

В математическом пакете MATLAB написана программа, реализующая численное интегрирование уравнений движения тела при помощи метода Рунге-Кутты 4-го порядка с автоматическим выбором шага. В программу заложен закон управления $\delta(\vartheta)$.

Аэродинамические функции интерполируются кубическим сплайном. Графически выводятся фазовые зависимости переменных интегрирования и траектории центра масс. После выхода на режим авторотации численные значения угловой скорости, скорости центра масс и угол планирования сглаживаются и вычисляются их средние значения, которые сравниваются с теоретическими оценками, найденными при помощи метода осреднения.

Проведем численные исследования движения тела при малых значениях массы и момента инерции, когда формулы первого приближения режима авторотации не работают. Проведем имитационное моделирование движения тела, имеющего прямоугольные пластинки с удлинением $\lambda=8$, при различных значениях массы. При моделировании используем следующие числовые значения: $\sigma = 0,32 \text{ м}^2$, $r = 1.2 \text{ м}$, $J=0.05 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$. Будем искать численные значения среднего угла планирования после выхода тела на стационарный режим. Результаты представлены на рисунке 4, в таблице №1.

Таблица №1

m	ω_0 (рад/сек)	V_0 (м./с)	γ_0 (градусов)
0.8	5.31749682056733	1.75024249186019	29.99597147452421
0.7	4.86248406261044	1.72295523579573	37.80183421535442
0.6	4.62351145414563	1.73199361127869	42.57624639495855
0.5	4.37428548150068	1.76024885605723	47.68484786216970
0.4	4.10946037436869	.80499636955786	52.59986993403626
0.3	3.81955042609736	1.86590605853392	56.45653298358099
0.2	3.51020255326372	1.96770131502943	58.16879813386458
0.1	3.12937412318084	2.22024315408998	55.44187461846403

Заключение

Таким образом, в работе:

1. Создана математическая модель движения тела.

2. Получены следующие результаты:

- найдено множество неизолированных установившихся режимов, при которых у тела отсутствует вращение. Показано существование максимального значения угла планирования,
- найден стационарный режим авторотации. Показана зависимость режима авторотации от аэродинамических характеристик,

Сравнение скорости снижения режима авторотации со скоростью спуска в других режимах показало, что спуск в режиме авторотации происходит с наименьшей скоростью по сравнению со всеми другими режимами, поэтому данную конструкцию можно использовать как систему спуска в атмосфере.

Проведена оптимизация угла отклонения от вертикали при движении в режиме авторотации с управляющим воздействием $\delta(\vartheta)$.

Литература

1. Беляков Д.В., Самсонов В.А., Филиппов В.В. «Исследование движения несимметричного тела в сопротивляющейся среде». Издательство «МЭИ», журнал «Вестник МЭИ», выпуск № 4 2006 г., стр. 5-10.
2. Табачников В.Г. «Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки». Труды ЦАГИ 1974 г. выпуск 1621.
3. Самсонов В.А. Беляков Д.В. «Оптимизация движения спускающегося авторотирующего тела». Седьмой Международный Аэрокосмический Конгресс IAC'07. Полные доклады. 27-31 августа 2012 г., Москва, Россия. Электронный вид. Регистрационный номер: ISBN 7-85312-056-7.

References

1. Belyakov D.V., Samsonov V.A., Filippov V.V. "Study of the moving the asymmetrical body in resisting ambience". The Publishers "MEI", journal "Herald MEI", issue 4 2006, p. 5-10.
2. Tabachnikov V.G. "Stationary features wing on small velocity in all range angle attacks.". Works CAGI 1974 issue 1621.
3. Samsonov V.A. Belyakov D.V. "Optimization of the motion coming down autorotating of the body". The Seventh International Aerospace Congress IAC 07. The Full reports. the August 27-31 2012, Moscow, Russia. The Electronic type. Registration number: ISBN 7-85312-056-7.

Поступила 15.10.2016

Об авторах:

Беляков Дмитрий Валерьевич, доцент кафедры Прикладная математика, информационные технологии и электротехника Московского Авиационного Института (национального технического университета), кандидат технических наук dimbel@rambler.ru.