

## О восстановлении параметра размытия в задаче оптического секционирования

С. Д. Бажитов

ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва,  
Российская Федерация

Адрес: 119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1  
cbajitov@gmail.com

### Аннотация

В статье рассматривается проблема нахождения параметра размытия между двумя изображениями для задачи оптического секционирования, в которой модель размытия имеет естественное оптическое происхождение, связанное с использованием некогерентного белого света в качестве источника излучения в приближении Френеля. Для её решения предлагается метод и описывается общая схема нахождения коэффициента размытия для функции рассеяния точки на основе сравнения градиентов исходного и размытого изображений. Градиенты изображения вычисляются через частные производные функции Гаусса, что дает возможность сгладить возможные фоновые шумы на изображениях. Приводятся результаты тестирования метода на симулированных и реальных изображениях с различным уровнем шума. Результаты показывают, что разработанный метод устойчиво находил искомые параметры по зашумленным изображениям с погрешностью, не превосходящей уровня шума, а для изображений без шума метод точно находил искомые параметры. Важной конструктивной особенностью метода является возможность замены одного вида функции рассеяния точки на другую, что позволяет адаптировать алгоритм к другим задачам, в которых изображение формируется на основе свертки объекта с функцией рассеяния точки.

**Ключевые слова:** градиент, изображающая система, итерационный метод, свертка, размытие

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

**Для цитирования:** Бажитов С. Д. О восстановлении параметра размытия в задаче оптического секционирования // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 1. С. 20-27. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202201.20-27>

© Бажитов С. Д., 2022



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## On Restoration of the Blur Parameter in the Optical Sectioning Problem

**S. D. Bazhitov**

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation  
Address: 1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation  
cbajitov@gmail.com

### Abstract

The article considers the problem of finding the blur parameter between two images for the optical sectioning problem, in which the blur model has a natural optical origin associated with the use of incoherent white light as a radiation source in the Fresnel approximation. A method for solving this problem is proposed, and a general scheme for finding the blur coefficient for the point spread function based on a comparison of the gradients of the original and blurred images is described. Image gradients are calculated through partial derivatives of the Gaussian function, which makes it possible to smooth out possible background noise in images. The article presents the results of testing the method on simulated and real images with different noise levels. The results show that the developed method well detects the desired parameters in noisy images, and the detection error does not exceed the noise level, and for images without noise, the method accurately finds the desired parameters. An important design feature of the method is the ability to replace one type of point scattering function with another, which allows adapting the algorithm to other problems in which the image is formed on the basis of the convolution of the object with the point scattering function.

**Keywords:** gradient, imaging system, iterative method, convolution, blur

*The author declares no conflict of interest.*

**For citation:** Bazhitov S.D. On Restoration of the Blur Parameter in the Optical Sectioning Problem. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022; 18(1):20-27. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202201.20-27>



## Введение

В науках, например, в офтальмологии и в клеточной биологии, актуальной является проблема изучения полупрозрачных участков живых тканей неинвазивными методами для определения пространственных взаимосвязей в трех измерениях. Световая микроскопия предоставляет уникальную возможность исследования пространственного распределения определенных компонентов биологических образцов. Многие современные проблемы клеточной биологии сосредоточены на определении пространственных взаимосвязей клеточных компонентов в трех измерениях. К сожалению, объективы, необходимые для получения изображения высокого разрешения, не обладают достаточной фокусной глубиной и на практике исследователю доступен только стек изображений, получаемых при фокусировки оптической системы на различную глубину. При этом любое отдельное изображение протяженного по глубине образца серьезно зашумлено информацией, находящейся вне фокуса от остальной части образца. Таким образом, возникает проблема оптического секционирования, состоящая в удалении этих дефокусированных слоев для получения трехмерного изображения исследуемого объекта с высоким разрешением.

Данная задача оптического секционирования решалась в работах<sup>1</sup> [1]-[7]. В них предполагалось, что функция рассеяния точки известна. В реальных экспериментах и исследованиях ни форма функции рассеяния точки, ни её параметры не известны точно. В настоящей статье предлагается способ нахождения параметров размытия при известной модели функции рассеяния точки для задачи оптического секционирования, основанной на приближении Френеля скалярной теории дифракции в случае полностью некогерентного света.

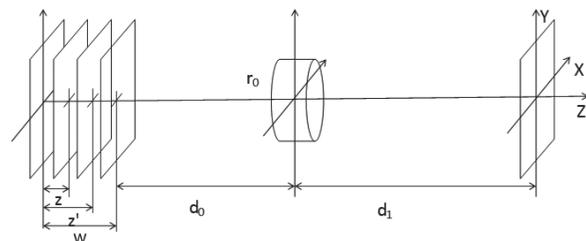
Доступные в современной литературе публикации по оценке параметра размытия обычно используют простые модели для ядра размытия в форме цилиндра или гауссиана. Например, в [8] и [9] (см. также [10]-[13]) авторы используют цилиндр в качестве ядра размытия, сила размытия характеризуется его радиусом, для определения которого сравниваются специальным образом обработанное распределение энергетического спектра с поведением соответствующих функций Бесселя, описывающих оптическую передаточную функцию<sup>2</sup>. В [14] для восстановления параметра дефокуса используется приближенная модель передаточной функции и проводится сравнение распределения ее нулей с нулями энергетического спектра размытого изображения. Дальнейшее развитие этого подхода представлено в работах [15]-[18].

В [19] использовалась модель сверточного размытия с ядром в форме гауссовского распределения для оценки параметра размытия на основе изучения распределения границ и изучения их размытия с помощью отношения модулей градиентов<sup>3</sup> (см. также [12], [20]-[24]).

В отличие от упомянутых выше работ используемая ниже модель размытия имеет естественное оптическое происхождение (аналогичные модели см., например, в [1], [7], [25]), связанное с использованием некогерентного белого света в качестве источника излучения при неинвазивном исследовании живых объектов в биологии и медицине.

## Постановка задачи

Задача реконструкции изображений многослойного объекта из наблюдаемых изображений, сфокусированных на разные слои, заключается в получении изображений искомого слоя, очищенных от дефокусированных изображений соседних слоев. Рассмотрим следующую схему формирования изображающей системы для оптического секционирования (см. Рис 1) [1].



Р и с. 1. Схема изображающей системы для оптического секционирования  
F i g. 1. Scheme of the depicting system for optical sectioning

Тонкий полупрозрачный трехмерный объект шириной  $w$  помещается на расстоянии  $d_0$  перед тонкой линзой с функцией зрачка  $M(x, y)$ , являющейся характеристической функцией диска радиуса  $r_0$  с центром в начале координат. Плоскость изображения  $(x, y)$  расположена на расстоянии  $d_1$  за объективом. Предполагается, что параметры  $d_0, d_1$  фиксированы, а фокусное расстояние объектива  $R(z)$  является функцией переменной  $z$ :

$$\frac{1}{R(z)} = \frac{1}{d_0 + w - z} + \frac{1}{d_1}.$$

Если объект расположен в плоскости  $z'$  и характеризуется функцией интенсивности  $f_{z'}(x', y')$ , то в плоскости  $z$  регистрируется интенсивность, описываемая сверткой [1]:

$$g_z(x, y, z, z') = K(z, z') \iint_{R^2} h(x - x', y - y', z, z') \cdot f_{z'}(x', y') dx' dy' \quad (1)$$

где  $h(\xi, \eta, z, z')$  определяется выражением:

$$h(\xi, \eta, z, z') = \left| \iint_{R^2} P(x', y') e^{i\pi d_1^2 \epsilon(z, z') (x'^2 + y'^2)} \cdot e^{-2\pi i (\xi x' + \eta y')} dx' dy' \right|^2 \quad (2)$$

<sup>1</sup> Castleman K. R. Digital Image Processing. 2nd ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall, 1996. 667 p.; Матвиенко А. Н., Новикова Т. Н. Метод обработки изображений полупрозрачных слоистых сред // Вестник Московского университета. Серия 15. Вычислительная математика и кибернетика. 1988. № 4. С. 33-37; Shantz M. J. A minicomputer-based image analysis system. In: Brown P.B. (ed.) Computer Technology in Neuroscience. New York: Halsted, 1976. p. 113-130.

<sup>2</sup> Кольцов П. П. Оценка размытия изображения // Компьютерная оптика. 2011. Т. 35, № 1. С. 95-102. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=15636447> (дата обращения: 03.11.2021).

<sup>3</sup> Там же.



Здесь функция зрачка  $P(x, y)$  суть индикаторная функция круга радиуса  $r_0$  с центром в начале координат,  $\lambda$  – средняя длина волны некогерентного освещения,  $K(z, z') = 1/\iint_{R^2} h(\xi, \eta, z, z') d\xi d\eta$   $K(z, z') = 1/\iint_{R^2} h(\xi, \eta, z, z') d\xi d\eta$  – нормировочный множитель. Функция  $\varepsilon = \varepsilon(z, z')$  описывает дефокусировку, вызванную возможным несовпадением фокальной плоскости  $z$  и плоскости объекта  $z'$ :

$$\varepsilon(z, z') = \frac{z' - z}{(d_0 + w - z')(d_0 + w - z)} \quad (3)$$

В рассматриваемой модели при фокусировке на слой  $z$  наблюдаемое изображение записывается в виде суммы вкладов каждого слоя:

$$g(x, y, z) = \sum_{n=1}^w g_z(x, y, z, z'_n).$$

Изменяя  $z$  от 0 до  $w$ , можно получить в плоскости изображения стек изображений сечения полупрозрачных объектов. Каждое наблюдаемое изображение поперечного сечения представляет собой истинное поперечное сечение, на котором также видны размытые изображения соседних по глубине сечений.

В задаче оптического секционирования в общем случае не известен параметр  $d = \lambda d_1^2 \varepsilon(z, z')$  функции размытия, отвечающей за степень размытия между двумя слоями.

$$h(\xi, \eta, d) = \left| \iint_{R^2} P(x', y') e^{i\pi d(x'^2 + y'^2)} e^{-2\pi i(\xi x' + \eta y')} dx' dy' \right|^2$$

Далее будет описан способ его нахождения на примере двух слоев исходного стека.

## Идея сравнения двух изображений

Предлагаемый метод основан на сравнении не самих изображений, а их модулей градиента. Это объясняется тем, что на изображениях может присутствовать фон и шум, которые с точки зрения получаемого изображения не несут полезной информации.

Область фона является однородной, поэтому производная, входящая в модуль градиента, позволит не учитывать фон при сравнении изображений, а если аппроксимировать производные с помощью частных производных функции Гаусса, то удастся сгладить шумы.

Напомним, что градиент это двумерная вектор-функция, определяемая формулой:

$grad f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ , где  $f(x, y)$  – дифференцируемая функция своих непрерывных аргументов. На практике изображение задается в дискретном наборе точек сетки и в классическом смысле производной не существует, поэтому её обычно аппроксимируют с помощью некоторого оператора. Для нахождения компонент градиента воспользуемся частными производными функции Гаусса, свертки с которыми наравне с другими операторами, аппроксимируют производную. Такой способ аппроксимации производных позволит сгладить возможные шумы на изображениях.

Двумерный гауссиан выглядит следующим образом:

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}}.$$

Её частные производные по  $x$  и по  $y$  соответственно:

$$G_x(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^4} (-x) e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}},$$

$$G_y(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^4} (-y) e^{-\frac{(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}}.$$

Тогда частные производные функции  $f(x, y)$  можно аппроксимировать так:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \approx f(x, y) * G_x(x, y),$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \approx f(x, y) * G_y(x, y),$$

где  $*$  – оператор свертки. Для модуля градиента будем использовать обозначение:

$$\nabla_G f(x, y) = \sqrt{(f(x, y) * G_x(x, y))^2 + (f(x, y) * G_y(x, y))^2}.$$

## Математическое описание коррективы функции размытия

Пусть  $f(x, y)$  это исходное изображение. Введем множество  $A_f$  точек  $(x, y)$  функции изображения  $f(x, y)$ , имеющих ненулевое значение модуля градиента:

$$A_f = \{(x, y) \mid \nabla_G f(x, y) > 0\}. \quad (4)$$

Тогда отношение двух изображений  $f_1$  и  $f_2$  будем характеризовать мощностью пересечения множеств  $A_{f_1}$  и  $A_{f_2}$ :

$$T_{f_1, f_2} = |A_{f_1} \cap A_{f_2}| \quad (5)$$

Здесь  $|\cdot|$  это число элементов множества.

После применения функции рассеяния точки

$$h(\xi, \eta, d) = \left| \iint_{R^2} P(x', y') e^{i\pi d(x'^2 + y'^2)} \cdot e^{-2\pi i(\xi x' + \eta y')} dx' dy' \right|^2 \cdot e^{-2\pi i(\xi x' + \eta y')} dx' dy' \quad (6)$$

к изображению  $f_2$  получим  $g_2(d)$ :

$$g_2(x, y, d) = f_2(x, y) * h(x, y, d) \quad (7)$$

Изображение  $g_2(d)$  является размытой версией изображения  $f_2$ , из-за чего оно выглядит более широкой или же «растекшейся».

Пусть имеется область определения коэффициентов размытия  $D = [m, M]$  ( $m$  – минимальное значение,  $M$  – максимальное значение коэффициента размытия) при рассмотрении изображений  $f_1$  и  $f_2$ , где  $f_1$  это размытая версия изображения  $f_2$ .

Введем на области  $\bar{D} = [0, M]$  равномерную сетку параметров размытия с шагом  $l = \frac{M}{K}$ ,  $\bar{D}_l = \{d_k = k \cdot l, k = 0, \dots, K\}$  и детектор параметра размытия  $\Phi(d_k)$ :

$$\Phi(d_k) = T_{f_1, g_2(d_k)} - T_{f_1, g_2(d_{k-1})}; d_k, d_{k-1} \in \bar{D}_l \quad (8)$$

Скорость роста  $T_{f_1, g_2(d)}$  при увеличении  $d$  будет уменьшаться, так как  $A_{f_1}$  не меняется. Поэтому можно поставить задачу отыскания коэффициента  $d_k$  в функции размытия:

$$\Phi(d_k) = 0; d_k \in \bar{D}_l,$$

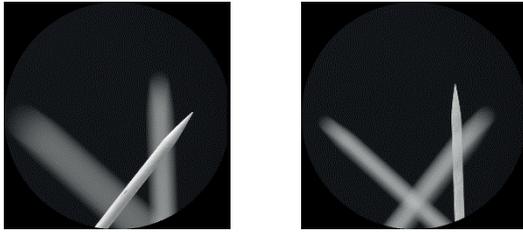
$$g_2(x, y, d) = f_2(x, y) * h(x, y, d),$$

$$A_{g_2(d)} = \{(x, y) \mid \nabla_G g_2(x, y, d) > 0\},$$

$$T_{f_1, g_2(d)} = |A_{f_1} \cap A_{g_2(d)}|.$$

Если рассматривать данную пару изображений (Рис. 2), то график функции (8) представлен на Рис. 5.





Р и с. 2. Типичная пара изображений из задачи оптического секционирования: слева  $f_1$ , справа  $f_2$

Fig. 2. A typical pair of images from an optical sectioning problem: on the left  $f_1$ , on the right  $f_2$

Функция  $\Phi(d_k)$  при увеличении значения параметра  $d_k$  может становиться отрицательным, что показано на Рис. 6. Это происходит, потому что степень размытия изображения  $f_2$  по сравнению с  $f_1$  становится слишком большим. Поэтому нужно выбирать  $d_k$  с наименьшим значением так, чтобы  $\Phi(d_k)$  было равно нулю. На Рис. 6.  $\Phi(d_k)$  равен нулю при  $d_k = 0.23$ .

**Утверждение.** Пусть  $f(x, y)$  – дискретная функция изображения,  $g(x, y)$  – её размытие по формуле (7). Тогда существует  $d' > 0$ :

$$\Phi(d') = 0; d' \in D,$$

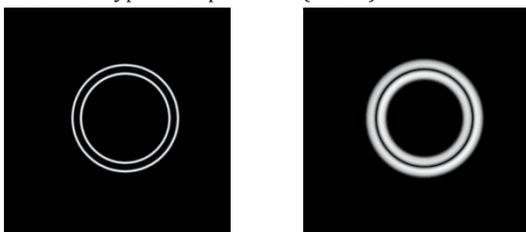
где  $\Phi(d)$  – дискретная функция от  $d$  определяемая формулой (8).

Для обоснования утверждения приведем следующие соображения. Обратим внимание на изображения на Рис. 3, а именно на исходное кольцо слева и на его размытый аналог справа.



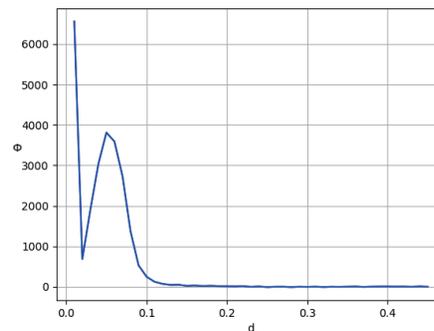
Р и с. 3. Пара изображений для примера  
Fig. 3. A couple of example images

В алгоритме получения коэффициента размытия, описанном выше, мы получаем модуль градиента изображений, которое показывает контуры изображения (Рис. 4).

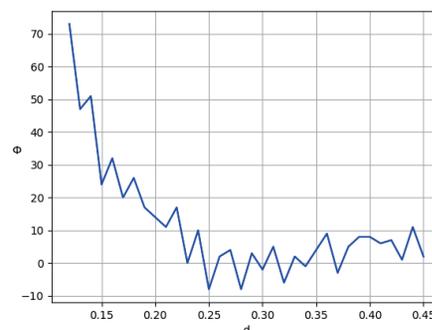


Р и с. 4. Контур исходного (слева) и размытого (справа) изображения  
Fig. 4. The outlines of the original (left) and blurred (right) image

Эти контуры имеют разную ширину у исходного и у размытого изображения. При увеличении степени размытия исходного изображения его контур расширяется, постепенно приближаясь в своем положении к контуру размытого изображения. Так как формула (5) характеризует расположение контуров двух изображений, то при определенном значении параметра  $d$  значение  $T_{f_1 f_2}$  достигнет своего максимума. А так как формула (8) — это фактически взятие производной функции, то в точке экстремума она равна нулю.



Р и с. 5. Типичный график функции (8) при  $D = [0.1, 0.45]$   
Fig. 5. A typical graph of function (8) for  $D = [0.1, 0.45]$



Р и с. 6. Часть графика на Рис. 5, начиная с  $d = 0.12$   
Fig. 6. Part of the graph in Fig. 5 starting from  $d = 0.12$

## Метод решения

Пусть параметр размытия находится в области от  $m$  до  $M$  ( $m$  – минимальное значение,  $M$  – максимальное значение коэффициента размытия). Введем равномерную сетку на отрезке  $[0, M]$  с шагом  $l = \frac{M}{K}$ ,  $\bar{D}_l = \{d_k = k \cdot l, k = 0, \dots, K\}$ . Формула (8) отражает скорость изменения функции (5) при изменении  $d_k$ . Поэтому нужно найти такое  $d_k$ , при котором эта скорость будет минимальна.

Тогда алгоритм восстановления параметра размытия между двумя изображениями выглядит следующим образом:

**Шаг 1.** Взять два изображения  $f_1, f_2$  и определить количество  $T_1 = T_{f_1 f_2}$  ненулевых пикселей, расположенных на одном и том же месте в изображениях их модулей градиентов.

**Шаг 2.** Выделить массив размера  $K + 1$ .

**Шаг 3.** Применить функцию размытия с текущим параметром  $d_k$  к  $f_2$ :  $f_2 * h(d_k) = g_2$ .



**Шаг 4.** Вычислить количество  $T_2 = T_{\text{л}0_2}$  ненулевых пикселей, расположенных на одном и том же месте в изображениях их модулей градиентов.

**Шаг 5.** Занести в массив значение  $T_2 - T_1$ .

**Шаг 6.** Увеличить значение  $d_k$  на  $l = \frac{M}{K}$ .

**Шаг 7.** Присвоить переменной  $T_1$  значение  $T_2$ .

**Шаг 8.** Повторять шаги 3–7, пока массив не заполнится.

**Шаг 9.** Найти минимальный индекс ( $k$ ) наименьшего неотрицательного элемента в массиве, для которого  $d_k > m$ . Выдать в качестве результата  $d_k$ .

### Примеры применения

Сначала применим метод к симулированным изображениям без шума, которые были размыты на разную величину. Пусть имеется исходное изображение:



Р и с. 7. Исходное изображение

Fig. 7. Original image

После размытия изображения на Рис. 7 и применения метода восстановления параметра размытия будем иметь следующее ( $d_r$  – параметр размытия входного изображения,  $d_t$  – восстановленный параметр размытия):



(a)	(b)	(c)
$d_r = 0.2$	$d_r = 0.3$	$d_r = 0.4$
$d_t = 0.2$	$d_t = 0.3$	$d_t = 0.4$

Р и с. 8. Размытые изображения без шума и результат восстановления

Fig. 8. Blurred images without noise and restoration result



(a)	(b)	(c)
$d_r = 0.2$	$d_r = 0.3$	$d_r = 0.4$
$d_t = 0.25$	$d_t = 0.35$	$d_t = 0.44$

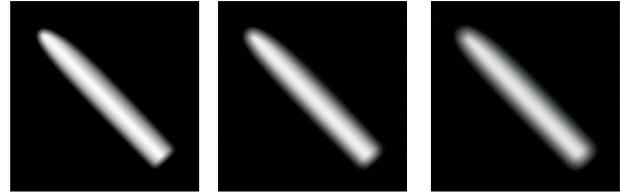
Р и с. 9. Размытые изображения с шумом и результат восстановления.

Среднее значение равно 0, стандартное отклонение равно 25, амплитуда равна 29.4%

Fig. 9. Blurred images with noise and restoration result. The mean value is 0, the standard deviation is 25, the amplitude is 29.4%

Видно, что для изображений без шума результат восстановления полностью совпадает с реальным размытием.

Теперь применим метод на тех же изображениях, но с гауссовским шумом с различным стандартным отклонением и амплитудой (Рис. 9, Рис. 10). Тогда результаты восстановления следующие:



(a)	(b)	(c)
$d_r = 0.2$	$d_r = 0.3$	$d_r = 0.4$
$d_t = 0.2$	$d_t = 0.3$	$d_t = 0.41$

Р и с. 10. Размытые изображения с шумом и результат восстановления.

Среднее значение равно 0, стандартное отклонение равно 4.25, амплитуда равна 5%

Fig. 10. Blurred images with noise and restoration result. The mean value is 0, standard deviation is 4.25, amplitude is 5%

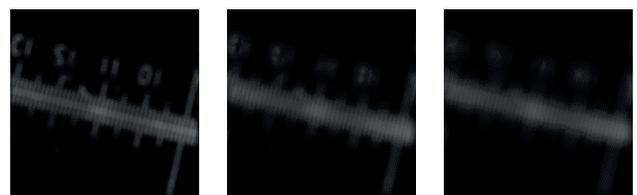
Видно, что шум внес изменения в восстановленные параметры размытия, но они всё ещё близки к исходным параметрам. Также видно, что для сильно зашумленных изображений возрастает величина ошибки восстановления.

Если применять метод к объектам с тонкими ребрами без шума и с гауссовским шумом, то будем иметь результаты, аналогичные предыдущим:



Р и с. 11. Исходное изображение

Fig. 11. Original image



(a)	(b)	(c)
$d_r = 0.2$	$d_r = 0.3$	$d_r = 0.4$
$d_t = 0.2$	$d_t = 0.3$	$d_t = 0.4$

Р и с. 12. Размытые изображения без шума и результат восстановления

Fig. 12. Blurred images without noise and restoration result





(a)  $d_r = 0.2$   
 $d_t = 0.24$

(b)  $d_r = 0.3$   
 $d_t = 0.32$

(c)  $d_r = 0.4$   
 $d_t = 0.42$

Р и с. 13. Размытые изображения с шумом и результат восстановления. Среднее значение равно 0, стандартное отклонение равно 15, амплитуда равна 17.6%

Fig. 13. Blurred images with noise and restoration result. The mean value is 0, standard deviation is 15, amplitude is 17.6%



(a)  $d_r = 0.2$   
 $d_t = 0.2$

(b)  $d_r = 0.3$   
 $d_t = 0.3$

(c)  $d_r = 0.4$   
 $d_t = 0.4$

Р и с. 14. Размытые изображения с шумом и результат восстановления. Среднее значение равно 0, стандартное отклонение равно 4.25, амплитуда равна 5%

Fig. 14. Blurred images with noise and restoration result. The mean value is 0, standard deviation is 4.25, amplitude is 5%

## Заключение

В статье рассматривалась задача отыскания параметра размытия между двумя изображениями для задачи оптического секционирования. Предложен метод решения задачи, учитывающий возможные фоновые шумы на изображениях, и описана общая схема нахождения коэффициента размытия для функции рассеяния точки. Было произведено тестирование метода

на симулированных и реальных изображениях. Результаты тестирования показали, что метод устойчиво находил искомые параметры по зашумленным изображениям с погрешностью, не превосходящей уровня шума. Сам метод построен так, что возможна замена вида функции рассеяния точки на другую, что дает возможность адаптации метода к другим задачам, в которых изображение формируется на основе свертки объекта с функцией рассеяния точки.

## References

- [1] Razgulin A.V., Iroshnikov N.G., Larichev A.V., et al. Fourier domain iterative approach to optical sectioning of 3d translucent objects for ophthalmology purposes. *The International Archives of the Photogrammetry, Remote Sensing and Spatial Information Sciences*. 2017; 42(2-W4):173-177. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.5194/isprs-archives-XLII-2-W4-173-2017>
- [2] Wang R., Li W., Zhang L. Blur image identification with ensemble convolution neural networks. *Signal Processing*. 2019; 155:73-82. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.sigpro.2018.09.027>
- [3] Larichev A.V., et al. Adaptive system for eye-fundus imaging. *Quantum Electronics*. 2002; 32(10):902-908. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1070/QE2002v032n10ABEH002314>
- [4] Capowski J.J., Cruce W.L.R. How to configure a computer-aided neuron reconstruction and graphics display system. *Computers and Biomedical Research*. 1979; 12(6):569-587. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1016/0010-4809\(79\)90038-7](https://doi.org/10.1016/0010-4809(79)90038-7)
- [5] Agard D., Sedat J. Three-dimensional architecture of a polytene nucleus. *Nature*. 1983; 302(5910):676-681. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1038/302676a0>
- [6] Agard D.A., Hiraoka Ya., Sedat J.W. Three-Dimensional Microscopy: Image Processing For High Resolution Subcellular Imaging. *Proceedings of SPIE: New Methods in Microscopy and Low Light Imaging*. 1989; 1161:24-30. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1117/12.962684>
- [7] Romanenko T.E., Razgulin A.V. A Three-Dimensional Deconvolution Algorithm Using Graphic Processors. *Computational Mathematics and Modeling*. 2019; 30(1):80-90. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/s10598-019-09436-z>
- [8] Oliveira J.P., Figueiredo M.A.T., Bioucas-Dias J.M. Parametric blur estimation for blind restoration of natural images: linear motion and out-of-focus. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2014; 23(1):466-477. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/TIP.2013.2286328>
- [9] Liang M. Parameter Estimation for Defocus Blurred Image Based on Polar Transformation. *Revista Técnica de la Facultad de Ingeniería Universidad del Zulia*. 2016; 39(1):333-338. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.21311/001.39.1.37>
- [10] Masoudifar M., Pourreza H.R. Texture based blur estimation in a single defocused image. *2020 10th International Conference on Computer and Knowledge Engineering (ICCKE)*. IEEE Press, Mashhad, Iran; 2020. p. 508-512. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/ICCKE50421.2020.9303719>
- [11] Wang Z., Yang Y. Depth information extraction of the image defocus area based on frequency domain. *2012 5th International Congress on Image and Signal Processing*. IEEE Press, Chongqing, China; 2012. p. 425-428. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/CISP.2012.6469718>



- [12] Elder J.H., Zucker S.W. Local scale control for edge detection and blur estimation. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 1998; 20(7):699-716. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/34.689301>
- [13] Lin H.-Y., Chou X.-H. Defocus blur parameters identification by histogram matching. *Journal of the Optical Society of America. A, Optics, image science, and vision*. 2012; 29(8):1694-1706. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1364/JOSAA.29.001694>
- [14] Sizikov V.S., Stepanov A.V., Mezhenin A.V., Burlov D.I., Éksempliyarov R.A. Determining image-distortion parameters by spectral means when processing pictures of the earth's surface obtained from satellites and aircraft. *Journal of Optical Technology*. 2018; 85(4):203-210. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1364/JOT.85.000203>
- [15] Sizikov V.S., Sergienko A.A., Kondulukova D.A. Spectral method for stable estimating the distortion parameters in inverse problem of image restoration. *Journal of Instrument Engineering*. 2019; 62(4):379-386. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2019-62-4-379-386>
- [16] Sizikov V., Loseva P., Medvedev E., Sharifullin D., Dovgan A., Rushchenko N. Removal of Complex Image Distortions via Solving Integral Equations using the "Spectral Method". *CEUR Workshop Proceedings*. 2020; 2893. Available at: [http://ceur-ws.org/Vol-2893/paper\\_2.pdf](http://ceur-ws.org/Vol-2893/paper_2.pdf) (accessed 07.12.2021). (In Eng.)
- [17] Sizikov V., Dovgan A., Lavrov A. Eliminating Nonuniform Smearing and Suppressing the Gibbs Effect on Reconstructed Images. *Computers*. 2020; 9(2):30. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.3390/computers9020030>
- [18] Chochia P. Analysis of the Image Spectrum for Distortion Diagnostics. *Journal of Physics: Conference Series*. 2019; 1368:032011. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1368/3/032011>
- [19] Zhuo S., Sim T. Defocus map estimation from a single image. *Pattern Recognition*. 2011; 44(9):1852-1858. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.patcog.2011.03.009>
- [20] Ying M. A Cauchy-Distribution-Based Point Spread Function Model for Depth Recovery from a Single Image. *2021 International Conference on Computer, Control and Robotics (ICCCR)*. IEEE Press, Shanghai, China; 2021. p. 310-314. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/ICCCR49711.2021.9349368>
- [21] Liu Y.-Q., Du X., Shen H.-L., Chen S. -J. Estimating Generalized Gaussian Blur Kernels for Out-of-Focus Image Deblurring. *IEEE Transactions on Circuits and Systems for Video Technology*. 2021; 31(3):829-843. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/TCSVT.2020.2990623>
- [22] Attarwala A.A., et al. A Method for Point Spread Function Estimation for Accurate Quantitative Imaging. *IEEE Transactions on Nuclear Science*. 2018; 65(3):961-969. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/TNS.2018.2806843>
- [23] Zhou X., Molina R., Ma Y., Wang T., Ni D. Parameter-Free Gaussian PSF Model for Extended Depth of Field in Brightfield Microscopy. *IEEE Transactions on Image Processing*. 2020; 29:3227-3238. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/TIP.2019.2957941>
- [24] Tang C., Hou C., Song Z. Defocus map estimation from a single image via spectrum contrast. *Optics Letters*. 2013; 38(10):1706-1708. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1364/OL.38.001706>
- [25] Budzinskiy S. Elliptic averaging of optical transfer functions for estimating astigmatism and defocus. *Optics Communications*. 2020; 461:125213. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2019.125213>

Поступила 03.11.2021; одобрена после рецензирования 27.01.2022; принята к публикации 18.02.2022.  
Submitted 03.11.2021; approved after reviewing 27.01.2022; accepted for publication 18.02.2022.

#### Об авторе:

**Бажитов Сергей Денисович**, магистрант кафедры математической физики, факультет вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8549-8260>, cbajitov@gmail.com

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

#### About the author:

**Sergey D. Bazhitov**, Master degree student of the Chair of Mathematical Physics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8549-8260>, cbajitov@gmail.com

*The author has read and approved the final manuscript.*

