УДК 517.9
DOI: 10.25559/SITITO.18.202201.13-19

Научная статья

Устойчивость системы Валлиса

В. В. Нефедов*, **В. В. Тихомиров**, **Я. Д. Максимова**
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва, Российская Федерация
Адрес: 119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
* vv_nefedov@mail.ru

Аннотация
В работе предложен вариационный метод получения необходимых (и достаточных) условий устойчивости возмущенных решений системы уравнений Валлиса. Этот метод позволяет установить необходимые условия устойчивости по Ляпунову. Он является эффективным даже в случаях, когда применение классического метода Ляпунова вызывает трудности, связанные с построением функции Ляпунова или с неточностями линеаризации по Тейлору, что характерно для динамических систем большой размерности. В ряде случаев этот метод можно применить для нахождения областей фазовых переменных, в которых необходимые условия совпадают с достаточными условиями устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову. В этих случаях сама метрическая функция, как это показано в настоящей работе, может играть роль функции Ляпунова для получения достаточных условий устойчивости.

Ключевые слова: нелинейные дифференциальные уравнения, возмущенное решение, устойчивость по Ляпунову, необходимые и достаточные условия устойчивости

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Нефедов В. В., Тихомиров В. В., Максимова Я. Д. Устойчивость системы Валлиса // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 1. С. 13-19. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202201.13-19

Original article

Stability of the Vallis System

V. V. Nefedov*, **V. V. Tikhomirov**, **Ya. D. Maximova**
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
Address: 1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation
* vv_nefedov@mail.ru

Abstract

In this paper, a variational method is proposed for obtaining the necessary (and sufficient) stability conditions for perturbed solutions of the system of Vallis equations. This method allows us to establish the necessary conditions for Lyapunov stability. It is effective even in cases when the application of the classical Lyapunov method causes difficulties associated with the construction of the Lyapunov function or with inaccuracies of Taylor linearization, which is typical for dynamical systems of large dimension. In some cases, this method can be used to find regions of phase variables in which the necessary stability conditions coincide with sufficient stability conditions (asymptotic stability) according to Lyapunov. In these cases, the metric function itself, as shown in this paper, can play the role of the Lyapunov function to obtain sufficient stability conditions.

Keywords: nonlinear differential equations, perturbed solution, Lyapunov stability, necessary and sufficient conditions for stability

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Nefedov V.V., Tikhomirov V.V., Maximova Ya.D. Stability of the Vallis System. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education.* 2022; 18(1):13-19. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202201.13-19

Введение

В 1986 году Дж. Валлисом были предложены две модели для описания колебаний температуры в западной и восточной частях приэкваториальной области океана, которые оказывают сильное влияние на глобальный климат Земли. В работе вариационным методом проведено исследование устойчивости по Ляпунову возмущенных решений системы уравнений для двух моделей Валлиса [1]. Исследованы две модели, предложенные Валиссом для описания нелинейных взаимодействий атмосферы, океана и пассатных ветров в экваториальной области Тихого океана. Найдены необходимые условия устойчивости (асимптотической устойчивости) возмущенного решения в окрестностях точек бифуркации[1]. Найдены области фазовых переменных в окрестностях точек бифуркаций, в которых эти необходимые условия устойчивости по Ляпунову являются также и достаточными[2]. В этих случаях сама метрическая функция, как это показано в настоящей работе, может играть роль функции Ляпунова для получения достаточных условий устойчивости [4], [5].

Основная идея вариационного метода [2-4] состоит в определении максимума скорости изменения евклидовой метрики в фазовом пространстве решений[3]. Предполагается, что искомое возмущенное решение не покидает области – ε окрестности точки бифуркации [6-17].

Основные результаты

1. Первая предложенная Валлисом модель, которая не учитывает влияния пассатных ветров, представляет собой систему трёх нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$x_t = \mu y - ax \qquad y_t = xz - y \qquad z_t = 1 - xy - z \qquad (1)$$

которая описывает колебания температуры в приэкваториальных областях мирового океана.

Переменные, входящие в систему (1), являются безразмерными и имеют следующий физический смысл:

μ и – числовые параметры

x – скорость движения воды на поверхности океана

$$y = \frac{1}{2}(T_w - T_c); z = \frac{1}{2}(T_w + T_c)$$

T_w, T_c – температура, соответственно, в западной и восточной частях океана

Система (1) имеет следующие свойства:

1) Однодность (автономность)

2) Диссипативность (все траектории ограничены некоторым предельным множеством)

Действительно, дивергенция фазового потока равна

$$div(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu y - ax) + \frac{\partial}{\partial y}(xz - y) + \frac{\partial}{\partial z}(1 - xy - z) = -a - 2 < 0$$

Последнее означает, что поток сжимает некоторый объем фазового пространства, т.е. все фазовые траектории будут ограничены некоторым предельным множеством.

Эта система имеет три неподвижных положения равновесия:

$$O_1 = (0,0,1); \quad O_2 = (\sqrt{\frac{\mu - a}{a}}, \sqrt{a(\mu - a)}, \frac{a}{\mu}); \quad O_3 = (-\sqrt{\frac{\mu - a}{a}}, -\sqrt{a(\mu - a)}, \frac{a}{\mu}).$$

Рассмотрим поведение системы в окрестности точки $O_1 = (0,0,1)$.

Для этого сделаем замену $x = u, y = w, z = w + 1$.

В результате система принимает вид

$$u_t = \mu v - a w; \quad v_t = u w - v; \quad w_t = -u v - w \qquad (2)$$

Найдены необходимые (и достаточные) условия устойчивости по Ляпунову для нулевого положения равновесия системы (2). Справедлива

Теорема 1.

Возмущенное решение системы (1) в окрестности положения равновесия $(0,0,1)$ необходимо (асимптотически) устойчиво по Ляпунову при условиях $a > 0, (\mu + 1)^2 < 4a$. Эти условия будут достаточными для устойчивости по Ляпунову возмущенных решений в области фазовых переменных, удовлетворяющих неравенствам $\frac{\mu + 2}{2} x < y < \frac{2a}{\mu + 2} x$ в окрестности нулевого положения равновесия.

2. Далее вариационным методом проведено исследование и найдены необходимые условия устойчивости (асимптотической устойчивости) возмущенного решения системы (2) в окрестности точек бифуркации (положений равновесия) O_2 и O_3. Определены области фазовых переменных, в которых эти условия являются также и достаточными. В случае точки бифуркации $O_2(\alpha, \beta, \lambda)$ предварительно сделаем замену переменных $x = u + \alpha, y = v + \beta, z = w + \lambda$. Система (2) принимает вид

$$u_t = \mu v - a u; \; v_t = \lambda u - v + \alpha w - u w; \; w_t = -\beta u - \alpha v - w - u v. \quad (3)$$

Очевидно, что система (3) также диссипативна.

Справедлива следующая

Теорема 2. Возмущенное решение системы (2) в окрестности положения равновесия

$$O_2 = (\sqrt{\frac{\mu - a}{a}}, \sqrt{a(\mu - a)}, \frac{a}{\mu})$$

необходимо (асимптотически) устойчиво по Ляпунову при условиях $\sqrt{a(\mu - a)} \geq 0, \mu > a$.

При дополнительном неравенстве

$$(\mu + \frac{a}{\mu})^2 < 2a + \frac{1}{\mu}\sqrt{(\mu - a)a}$$

эти условия будут достаточными для устойчивости по Ляпунову возмущенных решений в окрестности

[1] Магницкий Н. А. Теория динамического хаоса. М.: URSS, 2011. 320 с.; Magnitskii N.A., Sidorov S.V. New Methods for Chaotic Dynamics. Singapore: World Scientific Publishing Co., 2006. 384 p.

[2] Городецкий С. Е. Управление параметрами динамической системы для реализации самоорганизующегося процесса перехода к устойчивому периодическому режиму : дисс. … канд. физ.-мат. наук : 01.01.09. М.: МФТИ, 2009. 92 с.

[3] Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 304 с.; Berge P., Pomeau Y., Vidal C. Order within Chaos. 1st ed. Wiley-VCH, 1987. 329 p.

точки бифуркации O_2 в области фазовых переменных, удовлетворяющих соотношениям

$$\frac{1}{2}(\mu+\frac{a}{\mu})^2 x \le y \le [2a+\frac{1}{\mu}\sqrt{(\mu-a)a}]x \qquad (4)$$

3. Другая модель была предложена Валлисом для описания нелинейного процесса изменений в атмосфере, океана и пассатных ветров в экваториальной области Тихого океана. Эта модель является нелинейной и описывается в общем случае неавтономной системой трех дифференциальных уравнений:

$$x_t = \mu(y-z) - b(x - (f(t)\ ,\ y_t = xz - y + c,\ z_t = -xy - z + c \qquad (5)$$

где $x(t)$ - скорость поверхностного течения в океане, $y(t)$ и $z(t)$ – температура воды на западной и восточной окраинах водного бассейна, соответственно, $f(t) = a_0 + a_1 \sin(\sin(2\pi t))$ – периодическая функция, учитывающая влияние пассатных ветров. Рассмотрим эту систему при $f(t) \equiv 0$ приведя ее, таким образом, к автономному виду

$$x_t = \mu(y-z) - bx,\quad y_t = xz - y + c,\quad z_t = -xy - z + c, \qquad (6)$$

Ясно, что система (6) является диссипативной системой. Она имеет три положения равновесия:

$$O_1 = (0, c, c);$$

$$O_2 = \left(\sqrt{\tfrac{2c\mu}{b} - 1}, \tfrac{b}{2\mu}\left(\sqrt{\tfrac{2c\mu}{b} - 1} + 1\right), \tfrac{b}{2\mu}\left(1 - \sqrt{\tfrac{2c\mu}{b} - 1}\right)\right);$$

$$O_3 = \left(-\sqrt{\frac{2c\mu}{b} - 1}, \frac{b}{2\mu}\left(-\sqrt{\frac{2c\mu}{b} - 1} + 1\right), \frac{b}{2\mu}\left(1 + \sqrt{\frac{2c\mu}{b} - 1}\right)\right).$$

Рассмотрим сначала систему в окрестности положения равновесия Сделаем замену переменных $x = u; y = v + c; z = w + c$. Тогда система принимает вид

$$u_t = \mu(v-w) - bu,\quad v_t = uw - v + cu,\quad w_t = -uv - w - cu, \qquad (7)$$

При этом точка переходит в точку $(0,0,0)$. Справедлива

Теорема 3. Возмущенное решение системы (7) в окрестности нулевого положения равновесия необходимо устойчиво (асимптотически устойчиво) при условии . Эти условия будут достаточными для устойчивости по Ляпунову возмущенных решений в области фазовых переменных, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{(\mu+c)}{2} u \le\ v\ \le \left(\frac{2b}{\mu+c}\ u + w\right);\ -\frac{(\mu+c)}{2}\ u\ \le w \qquad (8)$$

При этом должно выполняться неравенство $(\mu+c)^2 \ < 4b$

4. Рассмотрим далее поведение системы (6) в окрестности точки

$$O_2 = \left(\sqrt{\tfrac{2c\mu}{b} - 1}, \tfrac{b}{2\mu}\left(\sqrt{\tfrac{2c\mu}{b} - 1} + 1\right), \tfrac{b}{2\mu}\left(1 - \sqrt{\tfrac{2c\mu}{b} - 1}\right)\right)$$

Обозначим

$$\alpha = \sqrt{\tfrac{2c\mu}{b} - 1},\ \beta = \tfrac{b}{2\mu}\left(\sqrt{\tfrac{2c\mu}{b} - 1} + 1\right), \gamma = \tfrac{b}{2\mu}\left(1 - \sqrt{\tfrac{2c\mu}{b} - 1}\right).$$

Сделаем в системе (6) замену переменных $u = x + \alpha$, $v = y + \beta$, $w = z + \gamma$.

Получаем систему

$$x_t = \mu(y-z) - bx,\quad y_t = \gamma x - y + \alpha z + zx,$$
$$z_t = -\beta x - \alpha y - z - xy, \qquad (9)$$

Справедлива

Теорема 4. Возмущенное решение системы (9) в окрестности нулевого положения равновесия необходимо устойчиво (асимптотически устойчиво) при условии $\frac{2c\mu}{b} < 1$, $b \ge 0\ \ (b > 0)$

Эти условия будут достаточными для устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову возмущенных решений в области фазовых переменных, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{(\mu+\gamma)}{2} x \le\ y\ \le \left(\frac{2b}{\mu+\gamma}\ x + \frac{\mu+\beta}{\mu+\gamma}\ z\right);\ -\frac{(\mu+c)}{2}\ u\ \le w. \qquad (10)$$

Причем дополнительно должно быть справедливо неравенство $(\mu+\gamma)^2 \ < 4\,b$.

Заключение

Предложенная вариационная методика позволяет эффективно решать указанные вопросы устойчивости по Ляпунову для широкого класса нелинейных динамических систем, даже в случаях, когда применение классического метода Ляпунова вызывает трудности, связанные с нахождением функции Ляпунова или с неточностями линеаризации по Тейлору в окрестности точек бифуркаций (что характерно для существенно нелинейных динамических систем большой размерности) [18-25].

Этот метод, как показано выше, является эффективным для получения необходимых условий устойчивости и дает возможность для продолжения исследований (в целях определения достаточных условий). Он позволяет выяснить сепаратриссы поверхностей точек бифуркации. В нашей задаче сепаратриссы точек бифуркаций системы (1) Лоренца принадлежат граничным поверхностям фазовых переменных, которые определяются соотношениями (4), (8) и (10), соответственно.

Список использованных источников

[1] Vallis G. K. Conceptual models of El Niño and the Southern Oscillation // Journal of Geophysical Research: Oceans. 1988. Vol. 93, issue C11. P. 13979-13991. doi: https://doi.org/10.1029/JC093iC11p13979

[2] Смольяков Э. Р. Эффективный метод устойчивости существенно нелинейных динамических систем // Кибернетика и системный анализ. 2019. Т.55, № 4. С. 15-23.

[3] Vallis G. K. El Niño: A Chaotic Dynamical System? // Science. 1986. Vol. 232, no. 4747. P. 243-245. doi: https://doi.org/10.1126/science.232.4747.243

[4] Tikhomirov V. V., Isaev R. R. Application of the variational method for studying stability of the 3D Lotka – Volterra system // Proceedings of the International Conference on Actual Problems of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics. Voronezh: VSU, 2021. P. 17-21. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46371385 (дата обращения: 10.01.2022).

[5] Устойчивость системы Лоренца / В. В. Тихомиров, Р. Р. Исаев, А. В. Мальцева, В. В. Нефедов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 2. С. 241-249. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.241-249

[6] Kalantarov V. K., Yilmaz Y. Decay and growth estimates for solutions of second-order and third-order differential-operator equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2013. Vol. 89. P. 1-7. doi: https://doi.org/10.1016/j.na.2013.04.016

[7] Lorenz E. N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of the Atmospheric Sciences. 1963. Vol. 20. P. 130-141. URL: https://cdanfort.w3.uvm.edu/research/lorenz-1963.pdf (дата обращения: 10.01.2022).

[8] Арнольд В. И. Теория катастроф // Итоги науки и техники. Серия Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 5. М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985. С. 5-218.

[9] Zhu C., Liu Y., Guo Y. Theoretic and Numerical Study of a New Chaotic System // Intelligent Information Management. 2010. Vol. 2, issue 2. P. 104-109. doi: https://doi.org/10.4236/iim.2010.22013

[10] Wang C., Liu J. G., Johnston H. Analysis of a fourth order finite difference method for the incompressible Boussinesq equations // Numerische Mathematik. 2004. Vol. 97, issue 3. P. 555-594. doi: https://doi.org/10.1007/s00211-003-0508-3

[11] Магницкий Н. А., Сидоров С. В. О сценариях перехода к хаосу в нелинейных динамических системах, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями // Нелинейная динамика и управление. 2003. № 3. С. 73-98. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25713398 (дата обращения: 10.01.2022).

[12] Сидоров С. В. Структура решений и динамический хаос в нелинейных дифференциальных уравнениях // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Математика, информатика, физика. 2013. № 2. С. 45-63. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18932923 (дата обращения: 10.01.2022).

[13] Magnitskii N. A. Universal theory of dynamical chaos in nonlinear dissipative systems of differential equations // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2008. Vol. 13, issue 2. P. 416-433. doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.05.006

[14] Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А., Сидоров С. В. О природе турбулентности в конвекции Рэлея-Бенара // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, № 6. С. 890-893. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=12450406 (дата обращения: 10.01.2022).

[15] Евстигнеев Н. М., Магницкий Н. А. О возможных сценариях перехода к турбулентности в конвекции Рэлея-Бенара // Доклады Академии наук. 2010. Т. 433, № 3. С. 318-322. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15142426 (дата обращения: 10.01.2022).

[16] Kaloshin D. A., Magnitskii N. A. A Complete Bifurcation Diagram of Nonlocal Bifurcations of Singular Points in the Lorenz System // Computational Mathematics and Modeling. 2011. Vol. 22, issue 4. P. 444-453. doi: https://doi.org/10.1007/s10598-011-9112-z

[17] Калошин Д. А. О построении бифуркационной поверхности существования гетероклинических контуров седло-фокусов в системе Лоренца // Дифференциальные уравнения. 2004. Т. 40, № 12. С. 1705-1707. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17679168 (дата обращения: 10.01.2022).

[18] Chen X. Lorenz Equations Part I: Existence and Nonexistence of Homoclinic Orbits // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1996. Vol. 27, issue 4. P. 1057-1069. doi: https://doi.org/10.1137/S0036141094264414

[19] Evstigneev N. M., Magnitskii N. A., Sidorov S. V. Nonlinear dynamics of laminar-turbulent transition in three dimensional Rayleigh-Benard convection // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation. 2010. Vol. 15, issue 10. P. 2851-2859. doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.10.022

[20] Hirata Y., Judd K. Constructing dynamical systems with specified symbolic dynamics // Chaos. 2005. Vol. 15, issue 3. Article number: 033102. doi: https://doi.org/10.1063/1.1944467

[21] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields // Applied Mathematical Sciences. Vol. 42. Springer, New York, NY, 1983. 462 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2

[22] Shil'nikov A., Shil'nikov L., Turaev D. Normal forms and Lorenz attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 03, no. 05. P. 1123-1139. doi: https://doi.org/10.1142/S0218127493000933

[23] Sparrou C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors // Applied Mathematical Sciences. Vol. 41. Springer, New York, NY, 1982. 270 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5767-7

[24] Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. 3rd ed. Academic Press, Elsevier, 2013. 432 p. doi: https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0

[25] Численное исследование влияния стохастических возмущений на поведение решений некоторых дифференциальных уравнений / А. Н. Фирсов, И. Н. Иновенков, В. В. Тихомиров, В. В. Нефедов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 1. С. 37-43. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202101.730

Поступила 10.01.2022; одобрена после рецензирования 17.02.2022; принята к публикации 10.03.2022.

Об авторах:
Нефедов Владимир Вадимович, доцент кафедры автоматизации научных исследований, факультет вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4602-5070**, vv_nefedov@mail.ru
Тихомиров Василий Васильевич, доцент кафедры общей математики, факультет вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5569-1502**, zedum@cs.msu.ru
Максимова Яна Дмитриевна, студент факультета вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3439-156X,** s02210457@gse.cs.msu.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Vallis G.K. Conceptual models of El Niño and the Southern Oscillation. *Journal of Geophysical Research: Oceans.* 1988; 93(C11):13979-13991. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1029/JC093iC11p13979
[2] Smol'yakov E.R. *Jeffektivnyj metod ustojchivosti sushhestvenno nelinejnyh dinamicheskih sistem* [An efficient method of stability analysis for highly nonlinear dynamic systems]. *Kibernetika i sistemnyj analiz* = Cybernetics and Systems Analysis. 2019; 55(4):15-23. (In Russ.)
[3] Vallis G.K. El Niño: A Chaotic Dynamical System? *Science.* 1986; 232(4747):243-245. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1126/science.232.4747.243
[4] Tikhomirov V.V., Isaev R.R. Application of the variational method for studying stability of the 3D Lotka – Volterra system. *Proceedings of the International Conference on Actual Problems of Applied Mathematics, Informatics and Mechanics.* VSU, Voronezh; 2021. p. 17-21. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46371385 (accessed 10.01.2022). (In Eng.)
[5] Tikhomirov V.V., Isaev R.R., Maltseva A.V., Nefedov V.V. Stability of the Lorentz System. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2021; 17(2):241-249. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.241-249
[6] Kalantarov V.K., Yilmaz Y. Decay and growth estimates for solutions of second-order and third-order differential-operator equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications.* 2013; 89:1-7. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/j.na.2013.04.016
[7] Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow. *Journal of the Atmospheric Sciences.* 1963; 20:130-141. Available at: https://cdanfort.w3.uvm.edu/research/lorenz-1963.pdf (accessed 10.01.2022). (In Eng.)
[8] Arnold V.I. *Teorija katastrof* [Catastrophe Theory]. *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.* Vol. 5. VINITI, Moscow; 1985. p. 5-218. (In Russ.)
[9] Zhu C., Liu Y., Guo Y. Theoretic and Numerical Study of a New Chaotic System. *Intelligent Information Management.* 2010; 2(2):104-109. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.4236/iim.2010.22013
[10] Wang C., Liu J.G., Johnston H. Analysis of a fourth order finite difference method for the incompressible Boussinesq equations. *Numerische Mathematik*. 2004; 97(3):555-594. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/s00211-003-0508-3
[11] Magnitskii N.A., Sidorov S.V. Transition to chaos in nonlinear dynamical systems described by ordinary differential equations. *Computational Mathematics and Modeling*. 2007; 18(2):128-147. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/s10598-007-0014-z
[12] Sidorov S.V. Structure of solutions and dynamic chaos in nonlinear differential equations. *Vestnik Rossijskogo universiteta druzhby narodov. Serija: Matematika, informatika, fizika* = RUDN Journal of Mathematics, Information Sciences and Physics. 2013; (2):45-63. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18932923 (accessed 10.01.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
[13] Magnitskii N.A. Universal theory of dynamical chaos in nonlinear dissipative systems of differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2008; 13(2):416-433. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2006.05.006
[14] Evstigneev N.M., Magnitskii N.A., Sidorov, S.V. On the nature of turbulence in Rayleigh-Benard convection. *Differential Equations.* 2009; 45(6):909-912. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1134/S0012266109060135
[15] Evstigneev N.M., Magnitskii N.A. On possible scenarios of the transition to turbulence in Rayleigh-Bénard convection. *Doklady Mathematics.* 2010; 82(1):659-662. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1134/S106456241004040X

[16] Kaloshin D.A., Magnitskii N.A. A Complete Bifurcation Diagram of Nonlocal Bifurcations of Singular Points in the Lorenz System. *Computational Mathematics and Modeling*. 2011; 22(4):444-453. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/s10598-011-9112-z

[17] Kaloshin D.A. On the construction of a bifurcation surface of existence of heteroclinic saddle-focus contours in the Lorenz system. *Differential Equations*. 2004; 40(12):1790-1793. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/s10625-005-0112-7

[18] Chen X. Lorenz Equations Part I: Existence and Nonexistence of Homoclinic Orbits. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1996; 27(4):1057-1069. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1137/S0036141094264414

[19] Evstigneev N.M., Magnitskii N.A., Sidorov S.V. Nonlinear dynamics of laminar-turbulent transition in three dimensional Rayleigh-Benard convection. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2010; 15(10):2851-2859. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2009.10.022

[20] Hirata Y., Judd K. Constructing dynamical systems with specified symbolic dynamics. *Chaos*. 2005; 15(3):033102. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1063/1.1944467

[21] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. *Applied Mathematical Sciences*. Vol. 42. Springer, New York, NY; 1983. 462 p. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2

[22] Shil'nikov A., Shil'nikov L., Turaev D. Normal forms and Lorenz attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1993; 03(05):1123-1139. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1142/S0218127493000933

[23] Sparrou C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. *Applied Mathematical Sciences*. Vol. 41. Springer, New York, NY; 1982. 270 p. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5767-7

[24] Hirsch M.W., Smale S., Devaney R.L. Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. 3rd ed. Academic Press, Elsevier; 2013. 432 p. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/C2009-0-61160-0

[25] Firsov A.N., Inovenkov I.N., Tikhomirov V.V., Nefedov V.V. Numerical Study of the Effect of Stochastic Disturbances on the Behavior of Solutions of Some Differential Equations. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie* = Modern Information Technologies and IT-Education. 2021; 17(1):37-43. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202101.730

Submitted 10.01.2022; approved after reviewing 17.02.2022; accepted for publication 10.03.2022.

About the authors:

Vladimir V. Nefedov, Associate Professor of the Chair of Automation for Scientific Research, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor**, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4602-5070,** vv_nefedov@mail.ru

Vasiliy V. Tikhomirov, Associate Professor of the Chair of General Mathematics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5569-1502**, zedum@cs.msu.ru

Yana D. Maximova, student at the Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3439-156X,** s02210457@gse.cs.msu.ru

All authors have read and approved the final manuscript.