

УДК 681.5.013  
DOI: 10.25559/SITITO.18.202201.72-82

Научная статья

## Динамическое позиционирование автономного необитаемого подводного аппарата в мелководной зоне при воздействии внешних возмущений

И. Р. Литвишко

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Адрес: 199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9  
irlitvishko@gmail.com

### Аннотация

В представленной работе рассматривается задача построения системы динамического позиционирования автономного необитаемого подводного аппарата в пространствесмногоцелевой структурой. Стабилизация аппарата в заданном положении используется для обеспечения его стыковки с подводной станцией или получения более точной информации о морском дне при проведении исследований. Задача динамического позиционирования – одна из основных задач управления как надводными, так и подводными морскими объектами. Для надводных судов представлены многочисленные решения данной проблемы. Для подводных аппаратов получено меньшее количество результатов из-за достаточно сложной математической модели. Однако в случае динамического позиционирования в мелководной зоне возможны упрощения уравнения динамики, которые позволяют применить существующие подходы к управлению надводными судами для подводных аппаратов. Цель данной работы – усовершенствование системы управления с многоцелевой структурой, полученной на основе принципа разделения, за счет введения в закон управления дополнительного слагаемого, обеспечивающего астатизм замкнутой системы и экономичный режим работы приводов. Указанная система состоит из асимптотического наблюдателя, который восстанавливает скорости аппарата и очищает измерения от шума, и регулятора, решающего задачу динамического позиционирования. Предложенный в данной работе динамический корректор играет значительную роль на практике. Экономичный режим работы управляющих компонентов дает возможность уменьшить их износ и снизить общий расход топлива. Астатизм замкнутой системы позволяет исключить отклонение аппарата от заданного положения при воздействии на него постоянного возмущения, которое стандартно моделирует подводные и ветровые течения. Для иллюстрации эффективности системы проводится имитационное моделирование в среде Simulink на примере аппарата Kambara.

**Ключевые слова:** управление с обратной связью, динамическое позиционирование, автономный необитаемый подводный аппарат (АНПА), астатизм, внешние возмущения

**Благодарности:** автор выражает благодарность своему научному руководителю доценту кафедры компьютерных технологий и систем Санкт-Петербургского государственного университета, кандидату физико-математических наук, Жабко Наталии Алексеевне за помощь и поддержку при написании статьи.

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

**Для цитирования:** Литвишко, И. Р. Динамическое позиционирование автономного необитаемого подводного аппарата в мелководной зоне при воздействии внешних возмущений // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 1. С. 72-82. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202201.72-82>

© Литвишко И. Р., 2022



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Dynamic Positioning of Autonomous Underwater Vehicle in Shallow Water under the Influence of External Disturbances

I. R. Litvishko

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation  
Address: 7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation  
irlitvishko@gmail.com

### Abstract

This work is devoted to the formation of dynamic positioning system for autonomous underwater vehicle with multipurpose structure. Such vehicles are applied to oceanographic research and bottom exploration. To dock with an underwater station or obtain more accurate information about the bottom, it is necessary to stabilize the vehicle at a given point in space, in other words, position the device. The problem of dynamic positioning is one of the primary control problems of marine objects. Numerous solutions to this issue have been presented for vessels. Fewer results were obtained for underwater vehicles due to a rather complex mathematical model. However, simplifications of the dynamic equation are possible in the case of positioning in shallow water, which make it possible to apply existing approaches to vessel control for underwater vehicles. The purpose of this work is to enhance the control system with multipurpose structure obtained on the basis of the separation principle by introducing into the control law an additional term. The resulting system consists of the observer, which restores the speed components of the vehicle's movement and clears measurements of noise, and the controller, which positions the vehicle in a given position, provides the integral action of the closed-loop system and the economical mode of operation of the actuators. The integral action allows us to eliminate the deviation of the vehicle from the desired position when exposed to a constant disturbance (underwater and wind currents). Economical mode of control components makes it possible to lower their wear and reduce overall fuel consumption. A simulation is run in Simulink to illustrate the effectiveness of the obtained system.

**Keywords:** feedback control, dynamic positioning, autonomous underwater vehicle (AUV), integral action, external disturbances

**Acknowledgements:** The author expresses gratitude to the scientific adviser, Associate Professor of the Department of Computer Technologies and Systems of St. Petersburg State University, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Zhabko Natalia Alekseevna for assistance and support.

*The author declares no conflict of interest.*

**For citation:** Litvishko I.R. Dynamic Positioning of Autonomous Underwater Vehicle in Shallow Water under the Influence of External Disturbances. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022; 18(1):72-82. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202201.72-82>



## Введение

В настоящее время широко используются автономные морские подвижные объекты, способные функционировать без участия человека. В частности, автономные необитаемые подводные аппараты (АНПА) широко используются для проведения океанографических исследований, обезвреживания морских мин и разведки дна. Морские подвижные объекты должны поддерживать несколько режимов работы, в связи с чем основной целью в данной работе является построение системы управления с многоцелевой структурой, которая позволяет достигать желаемой динамики во всех имеющихся режимах<sup>1</sup> [1-6]. В работе рассматривается многоцелевой закон управления системой динамического позиционирования АНПА в пространстве. Задача достижения заданного положения и стабилизации аппарата в горизонтальной плоскости решена, например, в работе [7].

С математической точки зрения система динамического позиционирования состоит из двух основных компонентов – наблюдателя и регулятора.

Как известно, в большинстве случаев измерение скорости для АНПА недоступно или затруднено, например, применение доплеровского лага ограничивается из-за преобразования сигнала от аппарата и морского дна при их непосредственной близости [8], поэтому для вычисления скорости, как правило, синтезируется динамический наблюдатель на основе измерений положения и ориентации АНПА. При помощи наблюдателя так же необходимо выделить из поступающего с измерительных приборов сигнала оценки положения и ориентации аппарата без шума, обусловленного действием волн, помехами датчиков, который может привести к изнашиванию приводов, значительному увеличению затрат энергии и вовсе к потере устойчивости. В начале развития систем динамического позиционирования в 1960-1980-х годах использовался стандартный метод фильтрации и оценки компонент положения и ориентации – фильтр Калмана [9], однако для его использования необходимо линеаризовать динамическое уравнение в окрестности заранее заданного набора углов крена, дифферента и рыскания и для каждой линеаризованной модели строить фильтр Калмана, что очень трудоемко, к тому же многочисленные параметры настройки могут быть слабо соотнесены с физическими величинами. Один из широко используемых в данный момент аналитических подходов к формированию оценки компонент положения и ориентации и скоростных компонент – асимптотические наблюдатели<sup>2</sup>, например, [10-12].

Переход в желаемое положение и подавление внешнего воздействия должны быть осуществлены с помощью регулятора. Использование программного управления приемлемо при малой амплитуде внешних возмущений, действующих на аппарат [13]. Однако в большинстве случаев аппарат испытывает значительное воздействие волн и подводных течений, что делает применение такого управления невозможным. Робастность системы может быть достигнута при использовании управления с обратной связью. Подавляющее количество су-

ществующих методов построения управления получено для позиционирования аппарата по одной или нескольким компонентам его положения и ориентации, что вызвано наличием меньшего числа приводов по сравнению со степенями свободы аппарата [14-21].

В данной работе предлагается развитие многоцелевой структуры системы динамического позиционирования АНПА в мелководной зоне [6] с применением аналогичного подхода для позиционирования морского судна в горизонтальной плоскости [5]. Рассматриваемая система управления с обратной связью [6] состоит из асимптотического наблюдателя, который очищает измерения от шума и восстанавливает скоростные компоненты движения аппарата, и регулятора, решающего задачу динамического позиционирования в пространстве. В работе [5] обосновывается введение дополнительного слагаемого в закон управления морским надводным судном, которое обеспечивает астатизм замкнутой системы управления и экономичный режим работы приводов. Предложенный подход теоретически должен гарантировать достижение желаемого положения аппарата по всем компонентам. При практическом применении полученной системы количество стабилизируемых компонент положения и ориентации зависит от количества приводов конкретного аппарата.

В отличие от классических ПИД-регуляторов [22; 23] предложенный метод построения управления решает задачу обеспечения приводов экономичным режимом работы. Кроме того, как будет доказано далее, данный подход позволяет доставить астатизм замкнутой системы без использования интегрального слагаемого, что упрощает практическое применение регулятора.

## Структура системы динамического позиционирования и постановка задачи

Для определения модели аппарата рассматриваются две системы координат: абсолютная и относительная. Движение в относительной системе координат описывается шестью компонентами скорости  $\mathbf{v} = [u, v, w, p, q, r]^T$  – линейные скорости продольной, поперечной и вертикальной качки, угловая скорость крена, дифферента и рыскания соответственно. В абсолютной системе координат, связанной с Землей, используются три компоненты положения и три угла ориентации аппарат  $\boldsymbol{\eta} = [x, y, z, \varphi, \theta, \psi]^T$ . Связь скоростей в обеих системах координат описывается выражением

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v},$$

где матрица поворота

$$J(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} J_1(\boldsymbol{\eta}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & J_2(\boldsymbol{\eta}) \end{bmatrix},$$

<sup>1</sup> Сотникова М. В. Многоцелевые законы цифрового управления морскими объектами: дис. ... д.ф.-м.н. СПб., 2016. 371 с.

<sup>2</sup> Тагирова Р. А. Построение асимптотического наблюдателя для АНПА и его анализ // Colloquium-journal. 2019. № 9-2(33). С. 37. doi: <https://doi.org/10.24411/2520-6990-2019-10222>



$$J_1(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} c\psi c\theta & (c\psi s\theta s\varphi - s\psi c\varphi) & (s\psi s\varphi + c\psi c\varphi s\theta) \\ s\psi c\theta & (c\psi c\theta + s\varphi s\theta s\psi) & (s\theta s\psi c\varphi - c\psi s\varphi) \\ -s\theta & c\theta s\psi & c\theta c\psi \end{bmatrix},$$

$$J_2(\boldsymbol{\eta}) = \begin{bmatrix} 1 & s\varphi t\theta & c\varphi t\theta \\ 0 & c\varphi & -s\varphi \\ 0 & \frac{s\varphi}{c\theta} & \frac{c\varphi}{c\theta} \end{bmatrix}.$$

Здесь для краткости записи  $c$ ,  $s$  и  $t$  означают  $\cos$ ,  $\sin$  и  $\operatorname{tg}$  соответственно.

Движение АНПА в мелководной зоне описывается следующей системой<sup>3</sup>:

$$M\dot{\mathbf{v}} + D\mathbf{v} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}(t),$$

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = J(\boldsymbol{\eta})\mathbf{v}. \quad (1)$$

где  $M \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – матрица инерции и добавленной массы (положительно определенная);  $D \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – матрица демпфирования (положительно определенная);  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) \in \mathbb{R}^6$  – вектор восстанавливающих сил и моментов;  $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^6$  – вектор сил и моментов внешнего возмущения любой природы;  $\boldsymbol{\tau} \in \mathbb{R}^6$  – вектор управляющего воздействия.

Как было сказано ранее, измерение компонент скорости аппарата обычно не доступно, поэтому любой закон управления должен быть построен на базе измерений положения и ориентации. От замкнутой системы управления требуется, чтобы:

1. Существовало положение равновесия  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d$ , где  $\boldsymbol{\eta}_d = (x_d, y_d, z_d, \varphi_d, \theta_d, \psi_d)$  – желаемое положение аппарата;
2. Положение равновесия было глобально асимптотически устойчивым;
3. Управление обеспечивало астатизм по отношению к низкочастотным компонентам возмущения, обусловленным течениями, и осуществляло экономичный режим работы приводов при воздействии на объект высокочастотного возмущения.

Рассмотрим систему динамического позиционирования в виде

$$M\dot{\mathbf{z}}_v = -D\mathbf{z}_v - \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\tau} + J^T(\boldsymbol{\eta})K_1(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{z}_\eta),$$

$$\dot{\mathbf{z}}_\eta = J(\boldsymbol{\eta})\mathbf{z}_v + K_2(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{z}_\eta),$$

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) - K_d\mathbf{z}_v - J^T(\boldsymbol{\eta})K_p(\mathbf{z}_\eta - \boldsymbol{\eta}_d) + F(s)(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{z}_\eta), \quad (3)$$

где  $s$  – переменная Лапласа,  $\mathbf{z}_v \in \mathbb{R}^6$  и  $\mathbf{z}_\eta \in \mathbb{R}^6$  – оценки векторов  $\mathbf{v}$  и  $\boldsymbol{\eta}$  соответственно,  $K_1, K_2, K_d, K_p \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$  – заданные постоянные матрицы.

Наблюдатель вида (2) построен на основе наблюдателя, представленного в работе [24], в которой доказано, что для обеспечения глобальной асимптотической устойчивости нулевого положения равновесия системы ошибок

$$M\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_v = -D\boldsymbol{\varepsilon}_v - J^T(\boldsymbol{\eta})K_1\boldsymbol{\varepsilon}_\eta + \mathbf{d}(t),$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_\eta = J(\boldsymbol{\eta})\boldsymbol{\varepsilon}_v - K_2\boldsymbol{\varepsilon}_\eta, \quad (4)$$

полученной вычитанием (2) из (1), где  $\boldsymbol{\varepsilon}_v = \mathbf{z}_v - \mathbf{v}$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_\eta = \mathbf{z}_\eta - \boldsymbol{\eta}$ , при  $\mathbf{d}(t) \equiv 0$  достаточно, чтобы матрицы  $K_1, K_2$  имели диагональный вид и были положительно определенными. Глобальная асимптотическая устойчивость нулевого положения равновесия (4) гарантирует стремление оценок положения и скоростей аппарата к реальному их значению с течением времени, другими словами, полученные оценки будут достаточно точны для дальнейшего их использования при построении закона управления.

Закон управления (3) построен на основе управления, представленного в работе [6], с добавлением слагаемого  $F(s)(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{z}_\eta)$ . В соответствии с принципом разделения [6]

матрицы  $K_p, K_d$  необходимо взять такими, чтобы управление

$$\boldsymbol{\tau}^* = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) - K_d\mathbf{v} - J^T(\boldsymbol{\eta})K_p(\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d) \quad (5)$$

при замыкании системы (1) стабилизировало ее в положении равновесия  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ ,  $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d$ , при этом оно являлось глобально асимптотически устойчивым. Тогда закон управления, использующий оценки положений и скоростей, будет обладать теми же свойствами. Матрицы  $K_p, K_d$  при этом достаточно взять положительно определенными.

Замкнутая система (1)-(3) без учета слагаемого  $F(s)(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{z}_\eta)$  удовлетворяет введенным требованиям 1-2.

Требование 3 важно при практическом применении системы динамического позиционирования. Экономичный режим работы регуляторов позволяет уменьшить нагрузку на них, минимизировать их изнашивание и продлить срок службы. Астатизм замкнутой системы позволяет исключить отклонение аппарата от заданного положения при воздействии на него постоянного возмущения (подводного и ветрового течения).

Задача синтеза оптимального закона управления сводится к определению поправки  $F(s)(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{z}_\eta)$ . Во-первых, ее присутствие в законе управления не должно изменять положение равновесия замкнутой системы (1)-(3) и в целом нарушать устойчивость системы. Во-вторых, она должна обеспечивать систему астатизмом и выполнять роль режекторного фильтра с желаемыми динамическими свойствами, другими словами, управление должно подавлять низкочастотные возмущения и иметь небольшую амплитуду в ответ на высокочастотное внешнее воздействие. Формально это слагаемое должно доставлять минимум функционалу  $R(F)$ , определяющему интенсивность управления

$$R(F) \rightarrow \min_{F \in \Omega_c}, \quad (6)$$

где  $\Omega_c$  – множество передаточных функций, доставляющих глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы (1)-(3) и астатизм.

<sup>3</sup> Strand J. P. Nonlinear position control system design for marine vessels: Ph.D dissertation. Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 1999. 184 p.



## Определение дополнительного слагаемого в управлении

Для начала определим условия, при которых слагаемое  $F(s)(\boldsymbol{\eta} - \mathbf{z}_\eta)$  в законе управления не ухудшает динамических свойств системы. Для этого введем постоянные матрицы  $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\mu}$ , при этом матрица  $\boldsymbol{\alpha}$  – гурвицева, и запишем передаточную матрицу в виде  $F(s) = \boldsymbol{\gamma}(E_p s - \boldsymbol{\alpha})^{-1} \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\mu}$ , ей соответствует система в пространстве состояний

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= \boldsymbol{\alpha} \mathbf{p} + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{\varepsilon}_\eta, \\ \boldsymbol{\xi} &= \boldsymbol{\gamma} \mathbf{p} + \boldsymbol{\mu} \boldsymbol{\varepsilon}_\eta, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^l$  – вектор состояний системы,  $\boldsymbol{\varepsilon}_\eta = \mathbf{z}_\eta - \boldsymbol{\eta} \in \mathbb{R}^6$  – вход системы,  $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^6$  – выход системы.

Формулировка следующей теоремы повторяет формулировку соответствующей теоремы для морского надводного судна, представленной в [5], но рассматриваемые системы имеют иную структуру из-за увеличения числа компонент, описывающих движение аппарата, и учета влияния гравитационных и восстанавливающих сил и моментов  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$ . Доказательства приведенной теоремы аналогично доказательству из [5] с учетом указанных замечаний.

**Теорема 1:** Если система (7) асимптотически устойчива, то положение равновесия  $\mathbf{v} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d$  замкнутой системы (1)-(3) глобально асимптотически устойчиво.

Эта теорема – в некотором роде продолжение принципа разделения, представленного в работе [6]. Из нее следует, что наблюдатель, матрицы  $K_p, K_d$  и передаточную функцию

$F(s)$  в регуляторе можно настраивать отдельно друг от друга. Имеющаяся свобода в построении передаточной матрицы позволяет обеспечить систему желаемыми динамическими свойствами как относительно высокочастотных компонент внешнего возмущения, так и низкочастотных. В частности, для обеспечения астатизма замкнутой системы, то есть, для обеспечения стремления невязки  $\mathbf{e}_\eta = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d$  к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  при воздействии на систему постоянного возмущения  $\mathbf{d}(t) \equiv \mathbf{d}_0$  используется следующая теорема. Ее формулировка совпадает с формулировкой аналогичной теоремы для морского судна из [5], но рассматриваемые объекты соответствуют модели подводного аппарата. Доказательства следующей теоремы можно получить, развивая рассуждения из [5].

**Теорема 2:** Если выполняется следующее условие

$$\det \begin{pmatrix} -D & -J^T(\boldsymbol{\eta}_d) K_1 \\ J(\boldsymbol{\eta}_d) & -K_2 \end{pmatrix} \neq 0 \quad (8)$$

и если передаточная матрица  $F(s)$  удовлетворяет равенству

$$F(0) = K_\Delta,$$

где

$$K_\Delta = -(D + K_d) J^T(\boldsymbol{\eta}_d) K_2 - J^T(\boldsymbol{\eta}_d) (K_p + K_1),$$

тогда система (1)-(3) является астатической относительно вектора невязки  $\mathbf{e}_\eta = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d$  для любого  $\mathbf{d}_0 \in \mathbb{R}^6$ .

Следует отметить, что самый простой способ выполнения условий теоремы – это применение регулятора без динамики, то есть использование  $F(s) \equiv K_\Delta$ .

## Обеспечение экономичного режима работы регулятора. Случай одной доминирующей частоты волнового спектра

Основная задача конструирования регулятора (3) – это обеспечение экономичного режима работы, иначе говоря, результатом применения данного регулятора должна быть малая реакция приводов на достаточно высокие частоты волнового спектра. При этом он должен гарантировать асимптотическую устойчивость положения равновесия  $\mathbf{v} = \mathbf{0}, \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\eta}_d$  замкнутой системы (1)-(3) и доставлять свойство астатизма, что эквивалентно выполнению условий теорем 1 и 2. С математической точки зрения имеем задачу оптимизации (6).

Для начала рассмотрим решение задачи, предполагая, что воздействие волн на объект определено единственной доминирующей частотой  $\omega_0$ . В этом случае высокочастотная часть внешних возмущений может быть представлена как вектор  $\mathbf{d}(t) = \mathbf{a}_d \sin(\omega_0 t)$ , где  $\mathbf{a}_d \in \mathbb{R}^6$  – вектор амплитуд. Определим функционал интенсивности управления как  $R(F) = \|\mathbf{a}_\tau(F, \omega_0, \boldsymbol{\eta}_d)\|$ , где  $\mathbf{a}_\tau(F, \omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) \in \mathbb{R}^6$  – вектор интенсивности управляющего воздействия для замкнутой системы (1)–(3) относительно заданного внешнего возмущения.

Для дальнейшего рассмотрения оптимизационной задачи сделаем некоторые предварительные преобразования. Введем обозначение  $\mathbf{e} = \boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_d \Rightarrow \dot{\mathbf{e}} = \dot{\boldsymbol{\eta}}, \boldsymbol{\eta} = \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_d$ . Это позволит переписать систему (1), используя вектор состояний  $(\mathbf{v}^T, \mathbf{e}^T)^T$ , в следующем виде:

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{v}} &= -D\mathbf{v} - \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}(t), \\ \dot{\mathbf{e}} &= J(\mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_d) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (9)$$

Используя обозначение для ошибки позиционирования, введем вспомогательную переменную  $\mathbf{z}_e$ , определяемую формулой

$$\mathbf{z}_e = \mathbf{z}_\eta - \boldsymbol{\eta}_d \Rightarrow \dot{\mathbf{z}}_e = \dot{\mathbf{z}}_\eta, \mathbf{z}_\eta = \mathbf{z}_e + \boldsymbol{\eta}_d.$$

Очевидно, имеют место следующие равенства:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_\eta = \boldsymbol{\eta} - \mathbf{z}_\eta = \mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_d - \mathbf{z}_e - \boldsymbol{\eta}_d = \mathbf{e} - \mathbf{z}_e,$$

которые дают возможность переписать систему для наблюдателя (2) в виде

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{z}}_v &= -D\mathbf{z}_v - \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) + \boldsymbol{\tau} + J^T(\mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_d) K_1 (\mathbf{e} - \mathbf{z}_e), \\ \dot{\mathbf{z}}_e &= J(\mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_d) \mathbf{z}_v + K_2 (\mathbf{e} - \mathbf{z}_e). \end{aligned} \quad (10)$$

Систему (10) можно принять как асимптотический наблюдатель для уравнений динамики (9). В сущности, векторы ошибок  $\boldsymbol{\varepsilon}_v = \mathbf{v} - \mathbf{z}_v, \boldsymbol{\varepsilon}_e = \mathbf{e} - \mathbf{z}_e$  в соответствии с (9), (10) удовлетворяют системе



$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{e}}_v &= -D\mathbf{e}_v - J^T(\mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_d)K_1\mathbf{e}_e + \mathbf{d}(t), \\ \dot{\mathbf{e}}_e &= J(\mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_d)\mathbf{e}_v - K_2\mathbf{e}_e, \end{aligned} \quad (11)$$

которая, аналогично системе (4), имеет асимптотически устойчивое нулевое положение равновесия при  $\mathbf{d}(t) \equiv 0$ , из чего следует, что  $\mathbf{z}_v \rightarrow \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{z}_e \rightarrow \mathbf{e}$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Следует отметить, что равенства (10), (11) и (3) полностью определяют управляющее воздействие для системы динамического позиционирования в каждый момент времени. Запишем эти уравнения в следующей форме:

$$\begin{aligned} M\dot{\mathbf{e}}_v &= -D\mathbf{e}_v - J^T(\mathbf{e} + \boldsymbol{\eta}_d)K_1\mathbf{e}_e + \mathbf{d}(t), \\ \dot{\mathbf{e}}_e &= J(\boldsymbol{\eta})\mathbf{e}_v - K_2\mathbf{e}_e, \\ \dot{\boldsymbol{\xi}} &= F(s)\mathbf{e}_e, \\ M\dot{\mathbf{z}}_v &= -(D + K_d)\mathbf{z}_v - J^T(\boldsymbol{\eta})K_p\mathbf{z}_e + J^T(\boldsymbol{\eta})K_1\mathbf{e}_e + \boldsymbol{\xi}, \\ \dot{\mathbf{z}}_e &= J(\boldsymbol{\eta})\mathbf{z}_v + K_2\mathbf{e}_e, \\ \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) - K_d\mathbf{z}_v - J^T(\boldsymbol{\eta})K_p\mathbf{z}_e + \boldsymbol{\xi}. \end{aligned} \quad (12)$$

Перепишем последние три уравнения системы (12) в матричном виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{z}}_v \\ \dot{\mathbf{z}}_e \end{pmatrix} &= A_z(\boldsymbol{\eta}) \begin{pmatrix} \mathbf{z}_v \\ \mathbf{z}_e \end{pmatrix} + B_z(\boldsymbol{\eta}) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_e \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix}, \\ \boldsymbol{\tau} &= C_z(\boldsymbol{\eta}) \begin{pmatrix} \mathbf{z}_v \\ \mathbf{z}_e \end{pmatrix} + D_z \begin{pmatrix} \mathbf{e}_e \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} A_z(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{pmatrix} -M^{-1}(D + K_d) & -M^{-1}J^T(\boldsymbol{\eta})K_p \\ J(\boldsymbol{\eta}) & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \\ B_z(\boldsymbol{\eta}) &= \begin{pmatrix} M^{-1}J^T(\boldsymbol{\eta})K_1 & M^{-1} \\ K_2 & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \\ C_z(\boldsymbol{\eta}) &= (-K_d \mid -J^T(\boldsymbol{\eta})K_p), D_z = (\mathbb{O} \mid E). \end{aligned}$$

Следующая теорема решает задачу оптимизации (6) для заданной доминирующей частоты волн  $\omega_0$ .

**Теорема 3:** Если блок  $P_2(s, \boldsymbol{\eta}_d)$  размерности  $6 \times 6$  матрицы

$$\begin{aligned} P(s, \boldsymbol{\eta}_d) &= C_z(\boldsymbol{\eta}_d)(E_{12}s - A_z(\boldsymbol{\eta}_d))^{-1}B_z(\boldsymbol{\eta}_d) + D_z = \\ &= (P_1(s, \boldsymbol{\eta}_d) \mid P_2(s, \boldsymbol{\eta}_d)), \end{aligned} \quad (14)$$

удовлетворяет условию

$$\det P_2(j\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) \neq 0,$$

тогда существует передаточная матрица  $F = F^* \in \Omega_c$  регулятора такая, что  $\mathbf{a}_\tau(F, \omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_d)$ .

**Доказательство:** Систему (13), используя передаточную матрицу (14), можно представить как

$$\boldsymbol{\tau} = P(s, \boldsymbol{\eta}_d) \begin{pmatrix} \mathbf{e}_e \\ \boldsymbol{\xi} \end{pmatrix} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_d).$$

Принимая во внимание (16) и равенство  $\boldsymbol{\xi} = F(s)\mathbf{e}_e$ , перепишем формулу для  $\boldsymbol{\tau}$ , представленную выше

$$\boldsymbol{\tau} = (P_1(s, \boldsymbol{\eta}_d) + P_2(s, \boldsymbol{\eta}_d)F(s))\mathbf{e}_e + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_d).$$

Из вида данной формулы можно сделать вывод, что для любого асимптотически устойчивого регулятора с передаточной матрицей  $F(s)$ , удовлетворяющей условию

$$F = F^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) = -P_2^{-1}(j\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d)P_1(j\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d), \quad (15)$$

для вектора интенсивности управляющего воздействия верно равенство  $\mathbf{a}_\tau(F, \omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_d)$ . С точки зрения динамики АНПА такое управление является оптимальным, так как оно противодействует единственной внешней силе, действующей на объект, что гарантирует сохранение объекта в состоянии покоя при достижении желаемого положения. Для сохранения АНПА в состоянии покоя невозможно использовать управление, меньшее по норме, так как в таком случае действие гравитационных сил на аппарат будет сильнее действия управления и объект будет всплывать/тонуть в зависимости от его характеристик.

Далее докажем существование такой матрицы  $F = F^* \in \Omega_c$ .

В первую очередь необходимо вспомнить, что кроме удовлетворения условию (15) матрица  $F(s) = \{F_i(s)\}_{i=\overline{1,6}}$ , где

$$F_i(s) = (f_{i1}(s), f_{i2}(s), f_{i3}(s), f_{i4}(s), f_{i5}(s), f_{i6}(s)) - i\text{-ая}$$

строка передаточной матрицы  $F(s)$ , должна обеспечивать устойчивость и астатизм системы. То есть необходимо найти такую матрицу динамического фильтра

$$\boldsymbol{\xi} = F(s)\mathbf{e}_e = F(s)\boldsymbol{\eta}_e, \quad (16)$$

чтобы, в соответствии с теоремой 2, выполнялись следующие условия:

$$\begin{aligned} F(0) &= K_\Delta = \{K_{\Delta i}\}_{i=\overline{1,6}}, F(j\omega_0) = \\ &= F^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d) = \{F_i^*\}_{i=\overline{1,6}} \end{aligned} \quad (17)$$

где  $K_{\Delta i}$  и  $F_i^* = F_i^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d)$  -  $i$ -ые строки матриц  $K_\Delta$  и  $F^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d)$  соответственно. Более того, общий знаменатель

$f_{ik}(s) (i, k = \overline{1,6})$  должен быть гурвицевым для удовлетворения условий теоремы 1.

В соответствии с введенными обозначениями (17)  $i$ -ую компоненту выхода фильтра (16)  $\xi_i$  можно представить в виде системы в tf-форме

$$\xi_i = F_i(s)\boldsymbol{\eta}_e, i = \overline{1,6},$$

которой соответствует система в ss-форме

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}_i &= \boldsymbol{\alpha}_i\mathbf{p}_i + \boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{\eta}_e, \\ \xi_i &= \boldsymbol{\gamma}_i\mathbf{p}_i + \boldsymbol{\mu}_i\boldsymbol{\eta}_e. \end{aligned} \quad (18)$$

Далее покажем, что равенства (17) могут быть удовлетворены передаточной матрицей со строками

$$F_i(s) = \boldsymbol{\gamma}_i(E_2s - \boldsymbol{\alpha}_i)^{-1}\boldsymbol{\beta}_i + \boldsymbol{\mu}_i, i = \overline{1,6}, \quad (19)$$

которые соответствуют системе (18), где  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^2$ . Для этого выберем любые гурвицевы матрицы  $\boldsymbol{\alpha}_i$  размерности  $2 \times 2$  ( $i = \overline{1,6}$ ). Введя обозначения



$R_i(\boldsymbol{\eta}_d) = \operatorname{Re} F_i^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d), I_i(\boldsymbol{\eta}_d) = \operatorname{Im} F_i^*(\omega_0, \boldsymbol{\eta}_d), i = \overline{1, 6}$ ,  
перепишем условия (17)

$$F_i(0) = K_{\Delta i}, F_i(j\omega_0) = R_i(\boldsymbol{\eta}_d) + I_i(\boldsymbol{\eta}_d)j, i = \overline{1, 6},$$

при этом, учитывая (19), окончательно получаем

$$-\gamma_i \alpha_i^{-1} \beta_i + \mu_i = K_{\Delta i}, i = \overline{1, 6}, \quad (20)$$

$$\gamma_i (E_2 j \omega_0 - \alpha_i)^{-1} + \mu_i = R_i(\boldsymbol{\eta}_d) + I_i(\boldsymbol{\eta}_d)j.$$

Обратим внимание, что матрицы  $E_2 j \omega_0 - \alpha_i$  являются невырожденными (так как  $\alpha_i$  – гурвицевы), и определим

$$\alpha_{Ri}(\boldsymbol{\eta}_d) = \operatorname{Re}(E_2 j \omega_0 - \alpha_i)^{-1}, \quad (21)$$

$$\alpha_{Ii}(\boldsymbol{\eta}_d) = \operatorname{Im}(E_2 j \omega_0 - \alpha_i)^{-1}.$$

После постановки (21) в (20), выражения  $\mu_i$  из первого набора уравнений (20) и его подстановки во второй, выделения действительной и мнимой частей получим

$$\gamma_i (\alpha_{Ri} + \alpha_i^{-1}) \beta_i = R_i(\boldsymbol{\eta}_d) - K_{\Delta i}, \quad (22)$$

$$\gamma_i \alpha_{Ii} \beta_i = I_i(\boldsymbol{\eta}_d), i = \overline{1, 6}.$$

Выберем в качестве  $\gamma_i$  любые векторы-строки размерности  $1 \times 2$ , например,  $\gamma_i = (0, 1)$ . Отношения (22) для каждого  $i$  представляют системы из двенадцати уравнений с двенадцатью неизвестными (компонентами матриц  $\beta_i$  размерности  $2 \times 6$ ). Единственными решениями таких систем при условии, что матрицы систем не являются вырожденными (этого всегда можно добиться, так как матрицы  $\alpha_i$  выбираются любыми гурвицевыми), являются

$$\beta_i = \beta_i^*(\boldsymbol{\eta}_d) = \begin{pmatrix} \gamma_i (\alpha_{Ri} + \alpha_i^{-1}) \\ \gamma_i \alpha_{Ii} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R_i(\boldsymbol{\eta}_d) - K_{\Delta i} \\ I_i(\boldsymbol{\eta}_d) \end{pmatrix}, i = \overline{1, 6} \quad (23)$$

Окончательно, из первого равенства системы (20) можно найти  $\mu_i$ :

$$\mu_i = \mu_i^*(\boldsymbol{\eta}_d) = K_{\Delta i} + \gamma_i \alpha_i^{-1} \beta_i^*(\boldsymbol{\eta}_d), i = \overline{1, 6}. \quad (24)$$

Таким образом, определены все матрицы для (18) при  $i = \overline{1, 6}$ , что позволяет записать оптимальный динамический фильтр (16), соответствующий доминирующей частоте  $\omega_0$ , в ss-форме:

$$\begin{pmatrix} \dot{\mathbf{p}}_1 \\ \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{p}}_4 \\ \dot{\mathbf{p}}_5 \\ \dot{\mathbf{p}}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_5 \\ \mathbf{p}_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \beta_2^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \beta_3^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \beta_4^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \beta_5^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \beta_6^*(\boldsymbol{\eta}_d) \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_n, \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{p}_4 \\ \mathbf{p}_5 \\ \mathbf{p}_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_1^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \mu_2^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \mu_3^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \mu_4^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \mu_5^*(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \mu_6^*(\boldsymbol{\eta}_d) \end{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_n.$$

Передаточная матрица  $F(s)$ , соответствующая данной системе, будет удовлетворять условиями (17) и, следовательно, будет решением задачи оптимизации (6) при условии наличия внешнего возмущения с доминирующей частотой  $\omega_0$ .

## Обеспечение экономичного режима работы регулятора. Случай конечного числа доминирующих частот волнового спектра

В реальных условиях внешнее возмущение определяется единственной доминирующей частотой в редких случаях, поэтому для приближения условий к действительным рассмотрим случай, когда волновой спектр определяется конечным числом доминирующих частот  $\omega_k, k = \overline{1, N}$ . При данном предположении высокочастотная часть внешних возмущений может быть представлена как вектор  $\mathbf{d}(t) = A_d \sin(\boldsymbol{\omega}t)$ , где  $A_d \in \mathbb{R}^{6 \times N}$  – матрица амплитуд,  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)^T$  – вектор частот. Определим функционал интенсивности управления как  $R(F) = \|\mathbf{a}_\tau(F, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_d)\|$ , где

$\mathbf{a}_\tau(F, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_d) \in \mathbb{R}^6$  – вектор интенсивности управляющего воздействия для замкнутой системы (1)-(3) относительно заданного внешнего возмущения. Далее представлена теорема аналогичная теореме 3, но с учетом представленных выше условий на внешнее возмущение.

**Теорема 4:** Если выполнено условие теоремы 3 и если матрицы размерности  $2N \times 2N$

$$A_i = \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} \gamma_i (\alpha_{Ri}^R(\boldsymbol{\eta}_d) + \alpha_i^{-1}) \\ \gamma_i \alpha_{Ii}^I(\boldsymbol{\eta}_d) \\ \dots \\ \gamma_i (\alpha_{IN}^R(\boldsymbol{\eta}_d) + \alpha_i^{-1}) \\ \gamma_i \alpha_{iN}^I(\boldsymbol{\eta}_d) \end{array} \right) \end{pmatrix}, i = \overline{1, 6},$$

Где

$$\alpha_{ik}^R(\boldsymbol{\eta}_d) = \operatorname{Re}(E_{2N} j \omega_k - \alpha_i)^{-1}, \quad (26)$$

$$\alpha_{ik}^I(\boldsymbol{\eta}_d) = \operatorname{Im}(E_{2N} j \omega_k - \alpha_i)^{-1}, k = \overline{1, N},$$

являются невырожденными, тогда существует передаточная матрица  $F = F^* \in \Omega_c$  регулятора такая, что  $\mathbf{a}_\tau(F, \boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\eta}_d) = \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}_d)$ , при этом  $\alpha_i$  – любые гурвицевы матрицы размерности  $2N \times 2N$  ( $i = \overline{1, 6}$ ),  $\gamma_i$  – любые векторы-строки размерности  $1 \times 2N$ , например,  $\gamma_i = (0, 0, \dots, 1), i = \overline{1, 6}$ .

**Доказательство:** В отличие от теоремы 3 фильтр (18) должен быть сконструирован не только для единственной частоты  $\omega_0$ , а для набора частот  $\omega_k, k = \overline{1, N}$ . Чтобы добиться такого результата, предположим, что векторы состояний



систем (18) имеют размерность  $\rho = 2N$ , то есть  $\mathbf{p}_i \in \mathbb{R}^\rho$ ,  $i = \overline{1, 6}$ , и при этом

$$F_i(s) = \gamma_i (E_\rho s - \alpha_i)^{-1} \beta_i + \mu_i, i = \overline{1, 6}.$$

Соответственно, условия корректировки  $i$ -ой компоненты фильтра (16)  $\xi_i$  относительно  $k$ -ой частоты  $\omega_k$  примут следующий вид:

$$-\gamma_i \alpha_i^{-1} \beta_i + \mu_i = K_{\Delta i}, i = \overline{1, 6}, k = \overline{1, N}, \quad (27)$$

$$\gamma_i (E_2 j \omega_k - \alpha_i)^{-1} + \mu_i = R_{ik}(\mathbf{\eta}_d) + I_{ik}(\mathbf{\eta}_d) j,$$

где

$$R_{ik}(\mathbf{\eta}_d) = \operatorname{Re} F_i^*(\omega_k, \mathbf{\eta}_d), I_{ik}(\mathbf{\eta}_d) = \operatorname{Im} F_i^*(\omega_k, \mathbf{\eta}_d), i = \overline{1, 6}.$$

Учитывая, что матрицы  $E_{2N} j \omega_k - \alpha_i$  являются невырожденными, и подставляя введенные обозначения (26) в (27), вычисляя  $\mu_i$  из первого набора уравнений (27) и подставляя во второй, выделяя действительную и мнимую части, получаем

$$\gamma_i (\alpha_{ik}^R + \alpha_i^{-1}) \beta_i = R_{ik}(\mathbf{\eta}_d) - K_{\Delta i}, \quad (28)$$

$$\gamma_i \alpha_{ik}^I \beta_i = I_{ik}(\mathbf{\eta}_d), i = \overline{1, 6}, k = \overline{1, N}.$$

Выберем любые гурвицевы матрицы  $\alpha_i$  размерности  $2N \times 2N$  и любые векторы-строки  $\gamma_i$  размерности  $1 \times 2N$ , например,  $\gamma_i = (0, 0, \dots, 1)$ ,  $i = \overline{1, 6}$ . Отношения (28) при каждом  $i$  представляют собой систему из  $2N \times 6$  уравнений с  $2N \times 6$  неизвестными, которыми являются компоненты матриц  $\beta_i: A_i \beta_i = B_i$ ,

где  $A_i$  – матрицы из формулировки теоремы,  $B_i$  имеет следующий вид:

$$B_i = \begin{pmatrix} \left( \begin{array}{c} R_{i1}(\mathbf{\eta}_d) - K_{\Delta i} \\ I_{i1}(\mathbf{\eta}_d) \\ \dots \\ R_{iN}(\mathbf{\eta}_d) - K_{\Delta i} \\ I_{iN}(\mathbf{\eta}_d) \end{array} \right) \end{pmatrix}, i = \overline{1, 6}.$$

Эта система имеет единственное решение

$$\beta_i = \beta_i^*(\mathbf{\eta}_d) = A_i^{-1} B_i. \quad (29)$$

Используя этот результат, можно найти  $\mu_i$  из системы (27):

$$\mu_i = \mu_i^*(\mathbf{\eta}_d) = K_{\Delta i} + \gamma_i \alpha_i^{-1} \beta_i^*(\mathbf{\eta}_d), i = \overline{1, 6}. \quad (30)$$

Таким образом, для заданных доминирующих частот волнового спектра оптимальный регулятор (25) может быть построен, используя формулы (29), (30).

## Моделирование в среде Simulink

Для иллюстрации эффективности данного подхода проведем моделирование в среде Simulink на примере АНПА Kambara, исследованного в работе<sup>4</sup>.

При теоретическом анализе данного подхода рассматривалось упрощенное уравнение динамики аппарата (1), но для приближения условий к реальным при моделировании рассмотрим общее уравнение

$$M\dot{\mathbf{v}} + C(\mathbf{v})\mathbf{v} + D(\mathbf{v})\mathbf{v} + \mathbf{g}(\boldsymbol{\eta}) = \boldsymbol{\tau} + \mathbf{d}(t).$$

Вид матриц  $M, C(\mathbf{v}), D(\mathbf{v})$  вектора  $\mathbf{g}(\boldsymbol{\eta})$  представлен в.

Рассматриваемый аппарат является неполноприводным, у аппарата нет подруливающего устройства, которое создает тягу в направлении оси  $y$ , поэтому нельзя гарантировать достижение желаемого положения по этой оси.

Для моделирования волн используются суммы передаточных функций вида [13]:

$$h_i(s) = \frac{\sigma s}{s^2 + 2\zeta\omega_i s + \omega_i^2}, i = \overline{1, 3}.$$

В качестве доминирующих частот волнового спектра взяты  $\omega_1 = 0,6283$  рад/с,  $\omega_2 = 0,7628$  рад/с,  $\omega_3 = 0,2762$  рад/с.

Параметр, отвечающий за интенсивность волн,  $\sigma = 1$ , параметры режекторного фильтра  $\zeta_{ni} = 20, \omega_{ci} = 2, i = \overline{1, 3}$ , коэффициент демпфирования  $\zeta = 0,5$ . При моделировании используется гауссовый белый шум.

Матрицы  $K_1, K_2$  для наблюдателя (2) взяты следующим образом [24]:

$$K_1 = E_{6 \times 6}, K_2 = \begin{pmatrix} 30,0063 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 35,3594 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15,9928 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы управляющего воздействия (3) выбраны в следующем виде:

$$K_d = 16E_{6 \times 6}, K_p = 32E_{6 \times 6}.$$

В качестве матриц  $\alpha_i, i = \overline{1, 6}$  взяты матрицы  $6 \times 6$  в форме Фробениуса с собственными числами

$$i = 1 \Leftrightarrow [-0,228; -0,216; -0,235; -0,213; -0,207; -0,205];$$

$$i = 2 \Leftrightarrow [-0,190; -0,183; -0,186; -0,184; -0,197; -0,185];$$

$$i = 3 \Leftrightarrow [-0,242; -0,248; -0,244; -0,238; -0,242; -0,286];$$

$$i = 4 \Leftrightarrow [-0,253; -0,250; -0,248; -0,245; -0,243; -0,240];$$

$$i = 5 \Leftrightarrow [-0,208; -0,205; -0,202; -0,198; -0,195; -0,192];$$

$$i = 6 \Leftrightarrow [-0,307; -0,391; -0,294; -0,288; -0,285; -0,282].$$

Векторы  $\gamma_i, i = \overline{1, 6}$  принимаются равными

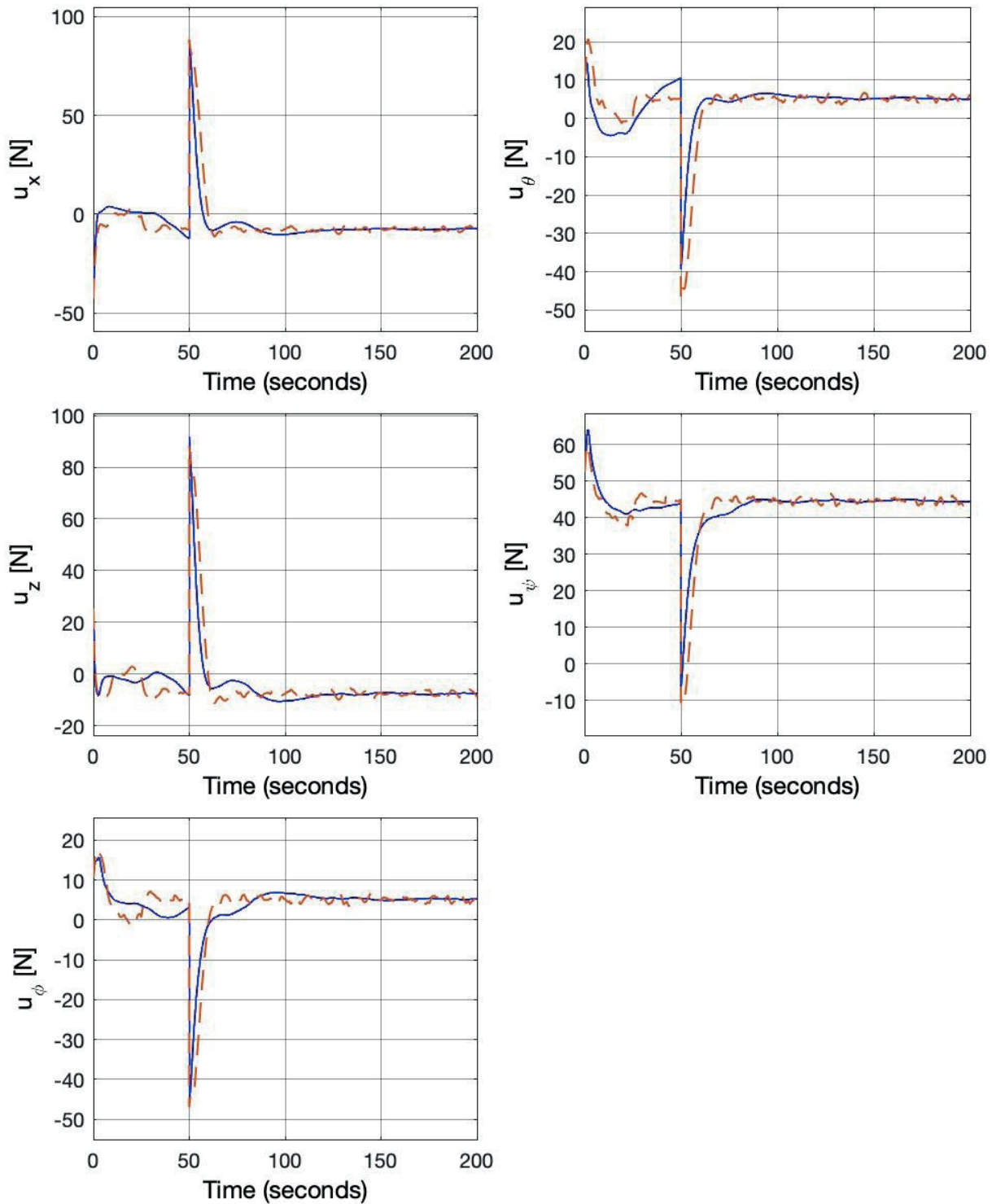
$$\gamma_i = \gamma_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 1).$$

Вычисления матриц  $\beta, \mu$  проводятся в среде MATLAB. Начальное положение аппарата принималось равным  $\boldsymbol{\eta}_0 = (1, 0, 2, 0, 0, 1)$ , желаемое положение –  $\boldsymbol{\eta}_d = (6, 0, 5, 0, 0, 0)$ .

<sup>4</sup> Silpa-Anan C. Autonomous underwater robot: Vision and control: Master's thesis. The Australian National University, Canberra, 2001. 158 p.







Р и с. 1. Действие управляющих приводов при использовании в законе управления поправки  $F(s)(\eta - z_\eta)$  (сплошная линия) и  $K_\Delta(\eta - z_\eta)$  (прерывистая линия)

Fig. 1. The action of control drives when used in the Amendment Management Law  $F(s)(\eta - z_\eta)$  (solid line) and  $K_\Delta(\eta - z_\eta)$  (dashed line)



Позиционирование аппарата начинается в 50 с. Кроме того для иллюстрации астатизма замкнутой системы, начиная с 25 с на аппарат действует постоянное возмущение в направлении осей  $x$  и  $z$ .

Рассмотрим результат моделирования. Аппарат действительно устанавливается в заданной позиции с заданной ориентацией с учетом неуправляемости по компоненте  $y$ , при этом интенсивность управления при подавлении высокочастотных внешних возмущений мала (см. Рис. 1). Для сравнения на рис. 1 приведена интенсивность управления при замене передаточной матрицы  $F(s)$  в законе управления на постоянную матрицу  $K_{\Delta}$ . При такой замене замкнутая система остается устойчивой, регулятор так же доставляет астатизм замкнутой системе, но его реакция на высокочастотные возмущения имеет амплитуду больше, чем в первом

случае, что на практике нежелательно во избежание износа приводов и увеличения расхода энергии.

## Заключение

В работе рассмотрена многоцелевая структура системы динамического позиционирования. Было предложено ее развитие, которое позволяет достигнуть астатизма замкнутой системы и экономичный режим работы приводов при известных доминирующих частотах волнового спектра для АНПА. С практической точки зрения введенное улучшение позволяет исключить отклонение аппарата от желаемого положения при воздействии на него постоянного возмущения и снизить износ приводов и общий расход энергии. Проведенное имитационное моделирование подтвердило работоспособность и эффективность представленного подхода.

## References

- [1] VEDIKOVA A.O., VEDYAKOV A.A., BOEV V.S. Dynamic positioning of a sea vessel under the influence of a multi-harmonic external disturbance. *Journal of Physics: Conference Series*. 2021; 1864(1):012153. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1864/1/012153>
- [2] Sotnikova M.V., Veremey E.I., Korovkin M.V. Transoceanic routes optimization using dynamic properties of ship and weather conditions. *2017 Constructive Nonsmooth Analysis and Related Topics (dedicated to the memory of V.F. Demyanov) (CNSA)*. IEEE Press, St. Petersburg, Russia; 2017. p. 1-4. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/CNSA.2017.7974017>
- [3] Veremey E.I. Synthesis of multi-objective control laws for ship motion. *Gyroscopy and Navigation*. 2010; 1(2):119-125. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1134/S2075108710020069>
- [4] Loria A., Fossen T.I., Panteley E.A separation principle for dynamic positioning of ships: Theoretical and experimental results. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*. 2000; 8(2):332-343. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/87.826804>
- [5] Veremey E.I., Sotnikova M.V. Optimal filtering correction for marine dynamical positioning control system. *Journal of Marine Science and Application*. 2016; 15:452-462. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/s11804-016-1370-x>
- [6] Liu S., Wang D., Poh E.K., Wang Y. Dynamic positioning of AUVs in shallow water environment: Observer and controller design. *Proceedings of the 2005 IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*. Vol. 1. IEEE Press; 2005. p. 705-710. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/AIM.2005.1511065>
- [7] Aguiar A.P., Pascoal A. Dynamic positioning and way-point tracking of underactuated AUVs in the presence of ocean currents. *International Journal of Control*. 2007; 80:1092-1108. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1080/00207170701268882>
- [8] Bandara D., Leong Z., Nguyen H., Jayasinghe S., Forrest A.L. Technologies for under-ice AUV navigation. *2016 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicles (AUV)*. IEEE Press; 2016. p. 108-114. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/AUV.2016.7778657>
- [9] Balchen J.G., Jenssen N.A., Mathisen E., Sælid S. A dynamic positioning system based on Kalman filtering and optimal control. *Modeling, Identification and Control*. 1980; 1(3):135-163. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.4173/mic.1980.3.1>
- [10] Sotnikova M.V., Veremey E.I. Algorithms for Motion Optimization on a Given Trajectory Taking into Account Weather Forecast and Constraints. *IFAC-PapersOnLine*. 2018; 51(32):389-394. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.415>
- [11] Viegas D., Batista P., Oliveira P., Silvestre C. Position and velocity filters for ASC/I-AUV tandems based on single range measurements. *Journal of Intelligent & Robotic Systems*. 2014; 74:745-768. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/s10846-013-9876-9>
- [12] Desai R.P., Manjarekar N.S. Disturbance observer based sliding mode control for lateral motion of an AUV. *2021 Seventh Indian Control Conference (ICC)*. IEEE Press; 2021. p. 1-6. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/ICC54714.2021.9703168>
- [13] Fossen T.I. *Guidance and Control of Ocean Vehicles*. New York: John Wiley & Sons; 1994. 494 p. (In Eng.)
- [14] Desai R.P., Manjarekar N.S. Controller Design for Steering and Diving Model of an AUV. In: Sanyal G., Travieso-González C.M., Awasthi S., Pinto C.M., Purushothama B.R. (eds.). *International Conference on Artificial Intelligence and Sustainable Engineering. Lecture Notes in Electrical Engineering*. Vol. 837. Springer, Singapore; 2022. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1007/978-981-16-8546-0\\_21](https://doi.org/10.1007/978-981-16-8546-0_21)
- [15] Petrich J., Stilwell D.J. Model simplification for AUV pitch-axis control design. *Ocean Engineering*. 2010; 37:638-651. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2009.11.007>
- [16] Zavislak C., Keow A., Chen Z., Ghorbel F. AUV buoyancy control with hard and soft actuators. *2021 American Control Conference (ACC)*. IEEE Press; 2021. p. 1420-1425. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.23919/ACC50511.2021.9483109>
- [17] Qi Z., Su Y. Research on integrated roll and yaw control strategy for AUV diving near surface. *2021 40th Chinese Control Conference (CCC)*. IEEE Press; 2021. p. 2339-2343. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.23919/CCC52363.2021.9549645>
- [18] Desai R.P., Manjarekar N.S. Pitch channel tracking control of an autonomous underwater vehicle with delayed output. *2021 IEEE 18th India Council International Conference (INDICON)*. IEEE Press; 2021. p. 1-6. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/INDICON52576.2021.9691723>



- [19] Bhattacharya D., Puttamadappa C. An effective pitch control technique for unmanned underwater vehicles based on type 2 fuzzy logic controller. *2021 International Conference on Computational Performance Evaluation (ComPE)*. IEEE Press; 2021. p. 180-187. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/ComPE53109.2021.9752186>
- [20] Siddhartha V., Mahapatra S. Design of a state derivative optimal control law using LMI technique for diving motion of autonomous underwater vehicle. *2022 2nd International Conference on Artificial Intelligence and Signal Processing (AISP)*. IEEE Press; 2022. p. 1-5. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/AISP53593.2022.9760550>
- [21] Desai R.P., Manjarekar N.S. Yaw channel control of an autonomous underwater vehicle using sliding mode control based on an extended state observer. *OCEANS 2022 – Chennai*. IEEE Press; 2022. p. 1-8. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/OCEANSChennai45887.2022.9775300>
- [22] Wei Z., Hongtao W., Xinqian B., Zheping Y., Guoqing X. The application of self-tuning fuzzy PID control method to recovering AUV. *2012 Oceans*. IEEE Press; 2012. p. 1-5. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/OCEANS.2012.6404908>
- [23] Alonge F., D'Ippolito F., Raimondi F.M. Trajectory tracking of underactuated underwater vehicles. *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control (Cat. No.01CH37228)*. Vol. 5. IEEE Press; 2001. p. 4421-4426. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/CDC.2001.980898>
- [24] Liu S., Wang D., Poh E.K. A nonlinear observer for AUVs in shallow water environment. *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS)*. IEEE Press; 2004. Vol. 2. p. 1130-1135. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/IROS.2004.1389548>
- [25] Essaouari Y., Turetta A. Cooperative underwater mission: Offshore seismic data acquisition using multiple autonomous underwater vehicles. *2016 IEEE/OES Autonomous Underwater Vehicles (AUV)*. IEEE Press; 2016. p. 435-438. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/AUV.2016.7778709>

*Поступила 10.02.2022; одобрена после рецензирования 15.03.2022; принята к публикации 21.03.2022.*

*Submitted 10.02.2022; approved after reviewing 15.03.2022; accepted for publication 21.03.2022.*

#### Об авторе:

**Литвишко Ирина Романовна**, студент кафедры компьютерных технологий и систем, факультет прикладной математики – процессов управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8999-2525>, [irlitvishko@gmail.com](mailto:irlitvishko@gmail.com)

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

#### About the author:

**Irina R. Litvishko**, Student of the Chair of Computer Applications and Systems, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University (7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-8999-2525>, [irlitvishko@gmail.com](mailto:irlitvishko@gmail.com)

*The author has read and approved the final manuscript.*

