УДК 519.711.2:314.1(571.621)
DOI: 10.25559/SITITO.18.202202.300-309

Научная статья

Компьютерное моделирование динамики населения городского образования

И. Н. Иновенков, В. В. Нефедов*, В. В. Тихомиров
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва, Российская Федерация
Адрес: 119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
* vv_nefedov@mail.ru

Аннотация

В предлагаемой статье методами математического моделирования изучается проблема совместного сосуществования различных групп городского населения. В простейшем случае рассматривается только взаимодействие двух групп населения внутри одной городской территории. На качественном уровне такая задача может быть описана системой двух нестационарных и нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного типа с граничными условиями третьего рода. Результаты проведенного численного моделирования показывают, что при соответствующем выборе коэффициентов диффузии и функций взаимодействия между различными группами населения можно получить различные сценарии динамики численности городского населения: от полного вытеснения одной группы населения другой (изначально более «агрессивной») до ситуации «мирного» совместного сосуществования.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейные дифференциальные уравнения диффузионного типа, устойчивые и неустойчивые режимы, урбанистические процессы, пространственная экономика

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Иновенков И. Н., Нефедов В. В., Тихомиров В. В. Компьютерное моделирование динамики населения городского образования // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 2. С. 300-309. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.300-309

Original article

Computer Simulation of Population Dynamics Inside the Urban Environment

I. N. Inovenkov, V. V. Nefedov*, V. V. Tikhomirov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
Address: 1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation
* vv_nefedov@mail.ru

Abstract
In this paper using a mathematical model of the so-called "space-dynamic" approach we investigate the problem of development and temporal dynamics of different urban population groups. For simplicity, we consider an interaction of only two population groups inside a single urban area with axial symmetry. This problem can be described qualitatively by a system of two non-stationary nonlinear differential equations of the diffusion type with boundary conditions of the third type. The results of numerical simulations show that with a suitable choice of the diffusion coefficients and interaction functions between different population groups we can receive different scenarios of population dynamics: from complete displacement of one population group by another (originally more "aggressive") to the "peaceful" situation of co-existence of them together.

Keywords: mathematical modeling, the urban population, the non-linear differential equations of the diffusion type, spatiotemporal dynamics of urban population, stable and unstable regimes

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Inovenkov I.N., Nefedov V.V., Tikhomirov V.V. Computer Simulation of Population Dynamics Inside the Urban Environment. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education.* 2022; 18(2):300-309. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.300-309

Введение

В последние годы для описания различных урбанистических процессов широко используются модели пространственной экономики.

Процессы централизации и одновременно укрупнения городов наблюдаются уже длительное время как в развитых странах, так и в странах развивающихся, но в современных городских образованиях все чаще просматриваются тенденции к децентрализации, и сегодня все чаще можно наблюдать гетерогенные городские образования, нежели гомогенные [1]-[10].

Образцами сложности как уже сложившихся, так и еще складывающихся городских форм являются такие современные мегаполисы как Токио, Нью-Йорк, Лондон, Мехико-сити, Москва, Шанхай, город-государство Сингапур и т.п.

Хорошо известно, что распределение различных групп населения по ареалу проживания является достаточно сложной функцией пространственных переменных и времени [11]-[15].

В настоящей работе приведены компьютерные результаты, полученные при использовании так называемой «мягкой» математической модели[1] взаимодействия двух различных групп городского населения с учетом нелинейной пространственной диффузии.

Математическая модель

В описываемой ниже математической модели все население городского образования подразделяется на две группы в соответствии с их социальными и экономическими показателями.

Например, жителей городского образования можно классифицировать по уровню дохода («бедные» – «богатые»), по уровню образования («более образованные» – «менее образованные»), а также по целому ряду иных социально-экономических показателей.

В целом ряде высокоразвитых в экономическом и социальном отношениях стран сосуществование групп населения, принадлежащих к различным общественным слоям, порождает серьезные социальные проблемы, вследствие чего эти процессы стали весьма активно изучаться с различных точек зрения, в том числе и с точки зрения применения моделей математического моделирования в рамках пространственной экономики.

Взаимодействие подобных групп населения внутри единой городской агломерации может быть описано на качественном уровне с использованием нестационарных уравнений в частных производных диффузионного типа.

В предлагаемой работе для простоты и наглядности мы ограничиваемся рассмотрением только двух групп населения, характеризующихся соответственно плотностями распределения (расселения) $u = u(x, y, t)$ и $v = v(x, y, t)$ в точке (x, y) фиксированной двумерной области D в текущий момент времени t.

Система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая пространственно-временную динамику этих групп населения, имеет формальный (операторный) вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = L_1[u] + F_1(u,v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = L_2[v] + F_2(u,v), \end{cases} \tag{1}$$

где эллиптический дифференциальный оператор второго порядка $L_s[w] = \nabla \cdot (K_s \nabla w)$, $s = \overline{1,2}$, описывает пространственную диффузию функций плотностей u и v каждой из групп населения. В общем случае, коэффициенты диффузии K_s могут нелинейно зависеть от неизвестных функций u и v.

Функции $F_s(u,v)$, $s = \overline{1,2}$, описывают «взаимодействие» различных групп населения в процессе их сосуществования на одной и той же территории. Достаточно реалистичным является следующий функциональный вид для этих функций:

$$\begin{aligned} F_1(u,v) &= u\,(a_1 - b_1 u - c_1 v) - d_1\, u\, v, \\ F_2(u,v) &= v\,(a_2 - b_2 v - c_2 u) - d_2\, u\, v. \end{aligned} \tag{2}$$

В настоящей работе в качестве двумерной области D мы рассматриваем пока простейшую область (вообще говоря, это не является серьезным ограничением, но способствует лучшему пониманию качественному пониманию изучаемых процессов), а именно прямоугольник $D = \{(x,y) : (0 \le x \le l_1) \times (0 \le y \le l_2)\}$ на плоскости переменных (x, y). На границе $\Gamma = \partial D$ этой области D задаются неоднородные краевые условия вида (краевые условия 3-го рода):

$$\left. h_s \frac{\partial w}{\partial n} + p_s w \right|_{\Gamma} = \varphi_s(x,y,t), \quad s = \overline{1,2}, \tag{3}$$

где $\dfrac{\partial .}{\partial n}$ обозначает производную по единичной внешней нормали в точках границы Γ рассматриваемой двумерной области D.

К уравнениям (1) и граничным условиям (3) необходимо добавить начальные условия (условия Коши).

В результате мы придем к следующей системе, состоящей из двух нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного (параболического) типа[2]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K_1(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(K_1(u,v)\dfrac{\partial u}{\partial y}\right) + F_1(u,v), \\ \dfrac{\partial v}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(K_2(u,v)\dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(K_2(u,v)\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + F_2(u,v), \\ \left. h_1 \dfrac{\partial u}{\partial n} + p_1 u \right|_{\Gamma} = \varphi_1(x,y,t), \ (x,y) \in \Gamma, \\ \left. h_2 \dfrac{\partial v}{\partial n} + p_2 v \right|_{\Gamma} = \varphi_2(x,y,t), \ (x,y) \in \Gamma, \\ \left. u(x,y,t) \right|_{t=0} = u_0(x,y), \ (x,y) \in D, \\ \left. v(x,y,t) \right|_{t=0} = v_0(x,y), \ (x,y) \in D. \end{cases} \tag{4}$$

Приведенная система уравнений (4) решалась численно мето-

[1] Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2004. 32 с.

[2] Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 5-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.

дом конечных разностей[3] с использованием хорошо известного алгоритма Писмена-Рэкфорда (метода переменных направлений) [11]. Программный код был разработан и реализован в программной среде MatLab.

При проведении вычислительных экспериментов варьировались как начальные условия (функции) $u_0(x,y)$ и $v_0(x,y)$, так и параметры, входящие в выражения для коэффициентов диффузии $K_s(u,v)$, а также функций так называемого «взаимодействия» $F_s(u,v)$, $s=\overline{1,2}$.

Результаты компьютерного моделирования

Предположим, что отношения между двумя выбранными нами группами населения могут быть как «дружелюбными», так и «нейтральными» или даже «недружелюбными». Подобный подход был ранее предложен Зангом в известной монографии [12].

В математической модели Занга числовые коэффициенты $a_1=a_2=a$, $b_1=b_2=b$ и $c_1=c_2=c$, а слагаемое вида $u(a-bu-cv)$ служит для описания реакции населения на существующие экономические условия проживания внутри городской среды.

Интерпретировать коэффициент a можно как физическую вместимость городского пространства в точке (x_1,x_2). Когда параметр a постоянен, физическая вместимость однородна в пространстве. Если предположить, что величина $(bu+cv)$ – количественная мера пространства, занимаемого обеими группами, то величину $(a-bu-cv)$ можно рассматривать как избыток предложения физической вместимости.

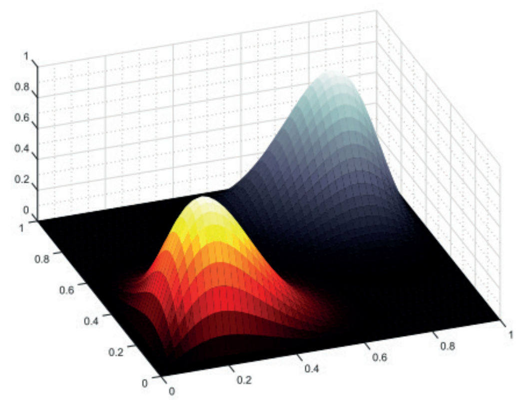
Когда эта величина в некоторой точке становится больше нуля, то данное место проживания оказывается более привлекательным для населения. Очевидно, что когда она равна нулю, а член $(-d_1uv)$ и диффузионные эффекты пренебрежимо малы, миграция населения прекращается. Член $(-d_1uv)$ служит для измерения *взаимодействия* групп.

Коэффициент d_1 может быть как положительным, так и отрицательным и нулевым. Если он положителен, то «группе населения 1» «не нравится» жить с «группой населения 2». Если же $d_1=0$, то «межгрупповые» предубеждения отсутствуют. Если коэффициент d_1 отрицателен, то высокая плотность «группы 2» «притягивает» население из «группы 1».

В данной модели краевые условия (3) являются однородными и имеют следующий простой вид:

$$\begin{cases} h_1\dfrac{\partial u}{\partial n}+p_1u\Big|_{\Gamma}=0,\ (x,y)\in\Gamma, \\ h_2\dfrac{\partial v}{\partial n}+p_2v\Big|_{\Gamma}=0,\ (x,y)\in\Gamma, \end{cases} \quad (5)$$

В качестве начальных плотностей распределения для обеих взаимодействующих между собой групп населения возьмем «симметричные» функции, такие, чтобы вся городская площадь частично была занята той или иной группой населения (Рис. 1).



Р и с. 1. Начальная плотность распределения для функций u и v

F i g. 1. The initial distribution density for the functions u and v

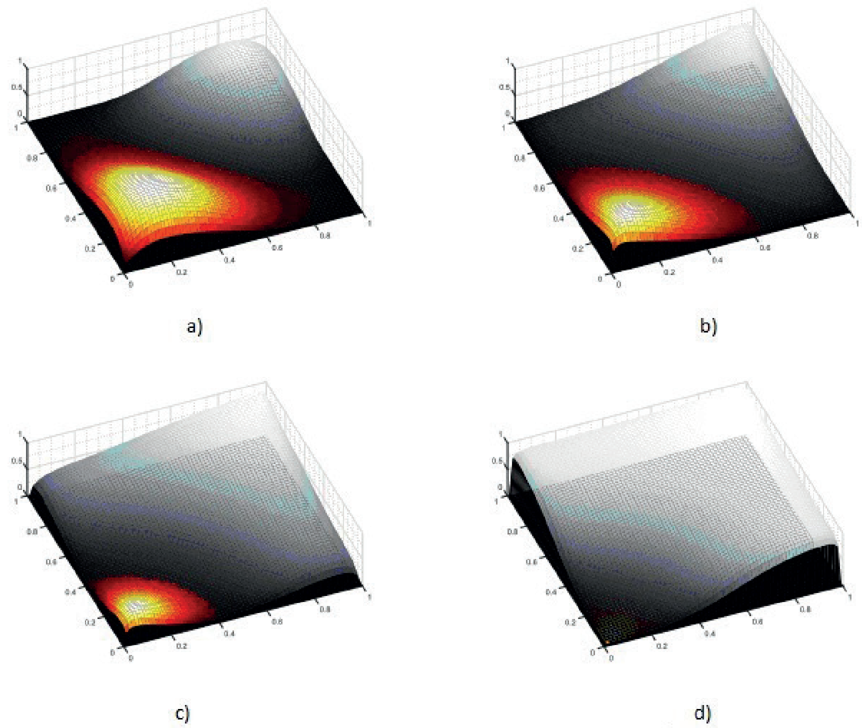
Можно показать, как будет изменяться городская структура для разных параметров моделируемой системы. Например, когда отношения двух групп населения носят «агрессивный» в отношении друг друга характер, а коэффициенты диффузии сделать зависящими от противоположных функций, т.е. $K_1(u,v)=v$ и, соответственно, $K_2(u,v)=u$, из полученного результата вычислений (Рис. 2, a-d) можно видеть, что сначала обе группы населения равномерно заполняют предоставленное им пространство, но из-за чисто враждебных настроений одна группа (можно сказать, что более «агрессивная») в результате полностью вытесняет другую, и в результате городская структура населения становится практически однородной [16]-[20].

Если сделать коэффициент $d_1<0$, а $d_2=0$, коэффициенты диффузии K_1 и K_2 зависящими только от функции u, то можно видеть следующую картину пространственно-временной диффузии населения (Рис. 3, a-f; вид сверху в виде линий уровня).

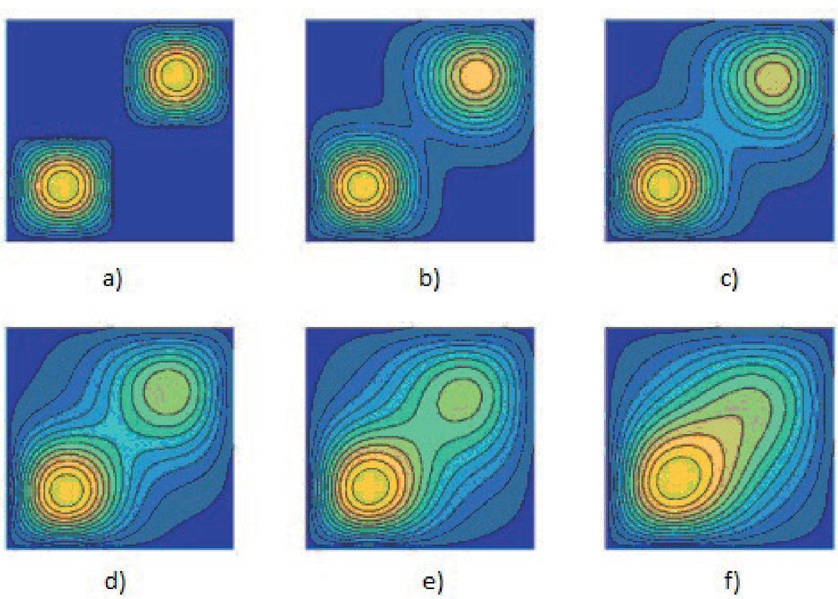
Этот пример можно классифицировать в соответствии с образовательным уровнем, когда менее образованные люди стремятся к проживанию в районе с преобладанием более высокообразованного населения. Также можно утверждать, что зоны с более благоприятными условиями существования предпочтительнее для жизни, что определяет очевидную миграцию населения из одной зоны проживания в другую[4].

[3] Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.

[4] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.



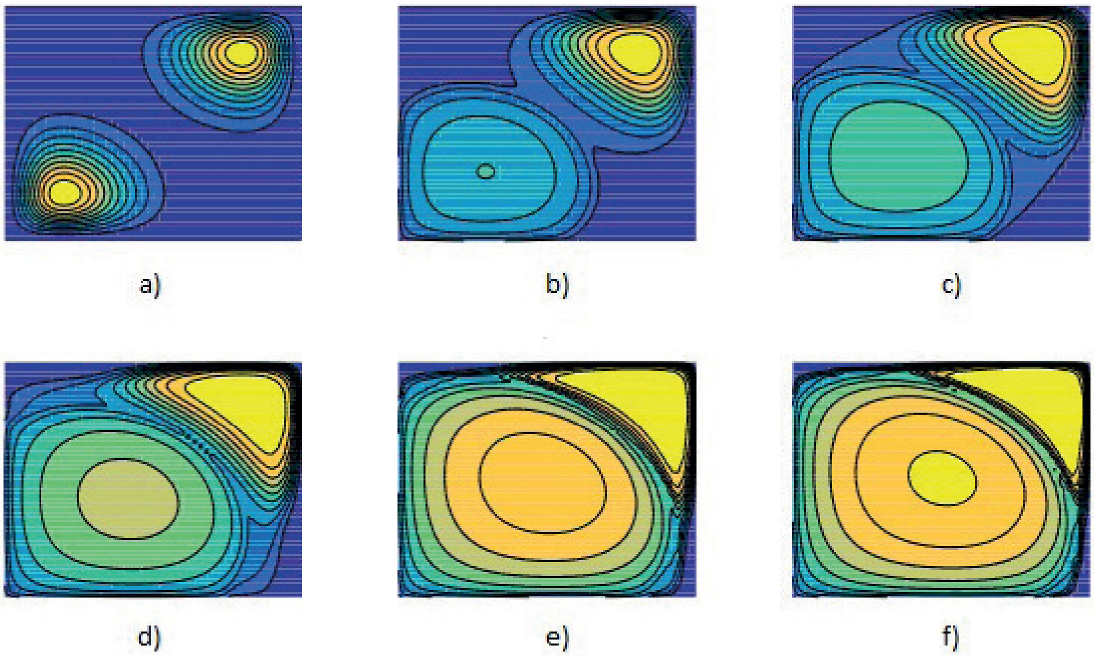
Р и с. 2. Эффект «географической» диффузии населения при условии «враждебных» отношений между группами населения
F i g. 2. The effect of "geographical" diffusion of the population under the condition of "hostile" relations between population groups



Р и с. 3. Перераспределение населения, при условии нейтрально-дружественных отношений ($K_1 = u$, $K_2 = u$)
F i g. 3. Redistribution of the population under the condition of neutral-friendly relations ($K_1 = u$, $K_2 = u$)

В качестве следующего примера, предположим, что характер взаимодействия групп населения между собой можно квалифицировать как чисто конкурентный. Будим полагать, что коэффициенты диффузии в вышеприведенных уравнениях (4) имеют степенную зависимость [21]-[25].

В этих предположениях оказывается, что одна группа населения доминирует над второй, постепенно вытесняя ее к границам области и, тем самым, вытесняя ее и заставляя жить на периферии вблизи городских границ (Рис. 4, a-f).



Р и с. 4. Перераспределение населения при условии конкурентных отношений ($K_1 = u^k$, $K_2 = u^\sigma$, $k < \sigma$)
F i g. 4. Redistribution of the population under the condition of competitive relations ($K_1 = u^k$, $K_2 = u^\sigma$, $k < \sigma$)

Заключение

В настоящей работе рассмотрена модельная математическая задача, связанная с попыткой описать механизм взаимодействия различных групп населения, проживающих на единой городской территории. Эта задача формулируется в терминах системы нелинейных дифференциальных уравнений диффузионного типа. Использовать при такого рода математическом моделировании так называемую «жесткую» модель не имеет смысла. Речь, по крайней мере сейчас, может идти только лишь о так называемом «мягком» математическом моделировании.
При формулировке «мягкой» математической модели в первую очередь учитываются только те параметры и факторы, которые необходимы или доступны. Имея же проверенную и верифицированную математическую модель, далее можно переходить уже и к решению сугубо прикладных и практических задач.
В свое время (в 1997 году) выдающийся российский математик В.И. Арнольд заметил, что «... успех приносит не только применение готовых рецептов («жестких» моделей), сколько математический подход к проблемам явлений реального мира»[5].

Приложение

Для проверки скорости сходимости используемых в настоящей работе численных методов и точности разностных схем был проведен анализ их сходимости с использованием точных аналитических решений.

Этот анализ был проведен на примере системы типа «реакция–диффузия» вида[6]:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + u\,f(bu - cw) + g(bu - cw), \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} = \dfrac{a}{x^n}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(x^n \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) + w\,f(bu - cw) + h(bu - cw), \end{cases} \quad (6)$$

причем параметр $n = 1$ определяет задачу с осевой, а при $n = 2$ – задачу с центральной симметрией.
Величину u принято называть «активатором», а w, которая замедляет моделируемый процесс, называют «ингибитором».
Система (6) имеет точное решение вида:

[5] Арнольд В. И. «Жесткие» и «мягкие» математические модели. М.: МЦНМО, 2004. 32 с.
[6] Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики: точные решения. М.: Физматлит, 2002. 432 с.

$$\begin{cases} u = \phi(t) + c\exp\left(\int f(b\phi - c\psi)dt\right)\theta(x,t), \\ w = \psi(t) + b\exp\left(\int f(b\phi - c\psi)dt\right)\theta(x,t), \end{cases} \quad (7)$$

где функции $\phi = \phi(t)$ и $\psi = \psi(t)$ определяются системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dt} = \varphi\, f(b\phi - c\psi) + g(b\phi - c\psi), \\ \dfrac{d\psi}{dt} = \psi\, f(b\phi - c\psi) + h(b\phi - c\psi), \end{cases} \quad (8)$$

а функция $\theta = \theta(x,t)$ удовлетворяет линейному уравнению в частных производных:

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial\theta}{\partial x}\right). \quad (9)$$

Умножим первое уравнение системы (6) на b и сложим его со вторым, умноженным на ($-c$). Тогда получим уравнение:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + \zeta\, f(\zeta) + b\, g(\zeta) - c\, h(\zeta), \quad (10)$$

где $\zeta = bu - cw$.
Это уравнение можно получить преобразованием первого уравнения исходной системы вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial u}{\partial x}\right) + u\, f(\zeta) + g(\zeta). \quad (11)$$

Уравнение (10) можно преобразовать методом разделения. Если задано решение $\zeta = \zeta(x,t)$ уравнения (10), то функцию $u = u(x,t)$ можно найти, решая линейное уравнение (11), а функцию $w = w(x,t)$ определить по формуле $w = (bu - \zeta)/c$.
Отметим еще два важных решения уравнения (10):
(a) в общем случае уравнение (9) содержит стационарное решение $\zeta = \zeta(x)$, а соответствующее точное решение уравнения (11) имеет форму $u = u_0(x) + \sum e^{\beta_n t}\, u_n(x)$.

(b) если имеет место условие вида $\zeta\, f(\zeta) + b\, g(\zeta) - c\, h(\zeta) = k_1\zeta + k_0$, то уравнение (9) линейно и принимает вид:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{a}{x^n}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^n\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) + k_1\zeta + k_0$$

или преобразуется к линейному уравнению (9) с заменой переменных $\zeta = e^{k_1 t}\overline{\zeta} - k_0 k_1^{-1}$.
Представляет определенный интерес и стационарный случай, когда система (6) сводится к системе нелинейных эллиптических уравнений вида:

$$\begin{cases} \Delta u = u\, f(bu - cw) + g(bu - cw), \\ \Delta w = w\, f(bu - cw) + h(bu - cw), \end{cases} \quad (12)$$

где $\Delta . = \dfrac{\partial^2 .}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 .}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.
Точное решение системы (12) можно представить в виде:

$$\begin{cases} u = \phi(x) + c\,\theta(x,y), \\ w = \psi(x) + b\,\theta(x,y), \end{cases} \quad (13)$$

где функции $\phi = \phi(x)$ и $\psi = \psi(x)$ определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\phi}{dx^2} = \varphi\, f(b\phi - c\psi) + g(b\phi - c\psi), \\ \dfrac{d^2\psi}{dx^2} = \psi\, f(a\phi - b\psi) + h(a\phi - b\psi), \end{cases} \quad (14)$$

причем функция $\theta = \theta(x,y)$ удовлетворяет линейному уравнению Шредингера специального вида:

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = F(x)\theta(x,y), \quad (15)$$

где функция $F(x) = f(bu - cw)$.
Его решение можно найти методом разделения переменных.

Умножим первое уравнение системы (11) на b и добавим второе уравнение, умноженное на ($-c$), получим уравнение:

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} = \zeta\, f(\zeta) + b\, g(\zeta) - c\, h(\zeta), \quad (16)$$

где $\zeta = bu - cw$.
Это уравнение можно преобразовать с помощью первого уравнения исходной системы вида. В результате приходим к уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u\, f(\zeta) + g(\zeta). \quad (17)$$

Уравнение (17) может быть разрешено последовательно способом разделения. Существование точных решений для таких кинетических функций как $F(\zeta) = \zeta\, f(\zeta) + b\, g(\zeta) - c\, h(\zeta)$ можно найти в [12].

В заключение отметим два важных случая:
- в первом случае, когда уравнение (17) содержит решение вида бегущей волны $\zeta = \zeta(z)$, где z$= k_1 x + k_2 y$ (k_1, k_2 – произвольные константы);
- во втором случае, если выполнено условие $\zeta\, f(\zeta) + b\, g(\zeta) - c\, h(\zeta) = {}_1\zeta + {}_0$, то уравнение (16) является хорошо известным линейным уравнением Гельмгольца.

Список использованных источников

[1] Тополева Т. Н. Генезис концептуальных подходов пространственной экономики: основополагающие теории, новые направления и перспективы исследований // Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2022. Т. 19, № 4(124). С. 94-130. doi: https://doi.org/10.21686/2413-2829-2022-4-94-130

[2] Барашкова О. В. «Центр» и «периферия» России: технологический прогресс как ключ к росту сбалансированности национальной экономики // Экономическое возрождение России. 2020. № 2(64). С. 171-179. doi: https://doi.org/10.37930/1990-9780-2020-2-64-171-179

[3] Данилова И. В., Резепин А. В. Пространственные экономические системы: методология и теоретические подходы к исследованию // Вестник Алтайской академии экономики и права. 2021. № 7-1. С. 24-32. doi: https://doi.org/10.17513/vaael.1776

[4] Фрисман Е. Я., Ревуцкая О. Л., Неверова Г. П. Моделирование динамики лимитированной популяции с возрастной и половой структурой // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, № 11. С. 65-78. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21276428 (дата обращения: 11.06.2022).

[5] Хавинсон М. Ю. Регулирование демографической ситуации в регионе: социально-экономический аспект // Региональные проблемы. 2014. Т. 17, № 2. С. 89-92. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23339861 (дата обращения: 11.06.2022).

[6] Хавинсон М. Ю., Кулаков М. П. Гравитационная модель динамики численности населения // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия «Математическое моделирование и программирование». 2017. Т. 10, № 3. С. 80-93. doi: https://doi.org/10.14529/mmp170307

[7] Лаврикова Ю. Г., Акбердина В. В., Суворова А. В. Согласование приоритетов научно-технологического и пространственного развития индустриальных регионов // Экономика региона. 2019. Т. 15, № 4. С. 1022-1035. doi: https://doi.org/10.17059/2019-4-5

[8] Haque M. S. Globalization, State Formation, and Reinvention in Public Governance: Exploring the Linkages and Patterns in Southeast Asia // Public Organization Review. 2013. Vol. 13, issue 4. P. 381-396. doi: https://doi.org/10.1007/s11115-013-0258-3

[9] Bessa-Gomes C., Legendre S., Clobert J. Discrete two-sex models of population dynamics: On modeling the mating function // Acta Oecologica. 2010. Vol. 36, issue 5. P. 439-445. doi: https://doi.org/10.1016/j.actao.2010.02.010

[10] Revutskaya O., Neverova G., Frisman E. Complex Dynamic Modes in a Two-Sex Age-Structured Population Model // Developments in Environmental Modelling. 2012. Vol. 25. P. 149-162. doi: https://doi.org/10.1016/B978-0-444-59396-2.00010-9

[11] Peaceman D. W., Rachford Jr. H. H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations // Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics. 1955. Vol. 3, no. 1. P. 28-41. doi: https://doi.org/10.1137/0103003

[12] Zhang W.-B. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics // Springer Series in Synergetics. Vol. 53. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1991. 246 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-75909-3

[13] Clar G., Sautter B. Research Driven Clusters at the Heart of (Trans-)Regional Learning and Priority-Setting Processes // Journal of the Knowledge Economy. 2014. Vol. 5, issue 1. P. 156-180. doi: https://doi.org/10.1007/s13132-014-0180-0

[14] Aleksandrova E., Behrens K., Kuznetsova M. Manufacturing (co)agglomeration in a transition country: Evidence from Russia // Journal of Regional Science. 2020. Vol. 60, issue 1. P. 88-128. doi: https://doi.org/10.1111/jors.12436

[15] Mortezazadeh M., Wang L. L., Albettar M., Yang S. CityFFD – City fast fluid dynamics for urban microclimate simulations on graphics processing units // Urban Climate. 2022. Vol. 41. Article number: 101063. doi: https://doi.org/10.1016/j.uclim.2021.101063

[16] Dzerzhinsky R. I., Zausailov A. S., Vorontsov A. A. Modelling World Population Dynamics // Data Science and Intelligent Systems. CoMeSySo 2021. Lecture Notes in Networks and Systems ; R. Silhavy, P. Silhavy, Z. Prokopova (eds.). Vol. 231. Springer, Cham, 2021. P. 423-432. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-90321-3_34

[17] Hiebert K. L. An Evaluation of Mathematical Software That Solves Systems of Nonlinear Equations // ACM Transactions on Mathematical Software. 1982. Vol. 8, issue 1. P. 5-20. doi: https://doi.org/10.1145/355984.355986

[18] Aluffi-Pentini F., Parisi V., Zirilli F. A differential-equations algorithm for nonlinear equations // ACM Transactions on Mathematical Software. 1984. Vol. 10, issue 3. P. 299-316. doi: https://doi.org/10.1145/1271.1631

[19] Fuqiang D. Mining Dynamic Transition Rules of Cellular Automata in Urban Population Simulation // 2010 Second International Conference on Computer Modeling and Simulation. IEEE Computer Society, 2010. P. 471-474. doi: https://doi.org/10.1109/ICCMS.2010.159

[20] Singh K., Sajjad M., Ahn C. -W. Towards full scale population dynamics modelling with an agent based and micro-simulation based framework // 2015 17th International Conference on Advanced Communication Technology (ICACT). IEEE Computer Society, 2015. P. 495-501. doi: https://doi.org/10.1109/ICACT.2015.7224844

[21] Основные направления и обзор современного состояния исследований динамики структурированных и взаимодействующих популяций / Е. Я. Фрисман, М. П. Кулаков, О. Л. Ревуцкая [и др.] // Компьютерные исследования и моделирование. 2019. Т. 11, № 1. С. 119-151. doi: https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151

[22] Петров Л. Ф. Нелинейные модели в экономических и социальных исследованиях // Вестник Российского экономического университета имени Г.В. Плеханова. 2022. Т. 19, № 4(124). С. 23-31. doi: https://doi.org/10.21686/2413-2829-2022-4-23-31

[23] Киселев Д. О. Вычислительные аспекты решения задачи взаимодействия групп населения в урбанистическом образовании // Computational Nanotechnology. 2019. Т. 6, № 2. С. 48-52. doi: https://doi.org/10.33693/2313-223X-2019-6-2-48-52

[24] Purvis B., Mao Y., Robinson D. Entropy and its Application to Urban Systems // Entropy. 2019. Vol. 21, issue 1. Article number: 56. doi: https://doi.org/10.3390/e21010056

[25] Guichard F., Gouhier T. C. Non-equilibrium spatial dynamics of ecosystems // Mathematical Biosciences. 2014. Vol. 255. P. 1-10. doi: https://doi.org/10.1016/j.mbs.2014.06.013

Поступила 11.06.2022; одобрена после рецензирования 09.07.2022; принята к публикации 13.07.2022.

Об авторах:

Иновенков Игорь Николаевич, доцент кафедры автоматизации научных исследований факультета вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4633-4404**, inov@cs.msu.ru

Нефедов Владимир Вадимович, доцент кафедры автоматизации научных исследований факультета вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4602-5070**, vv_nefedov@mail.ru

Тихомиров Василий Васильевич, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5569-1502**, zedum@cs.msu.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Topoleva T.N. Genesis of conceptual approaches of spatial economics: fundamental theories, new trends and prospects of research. *Vestnik of the Plekhanov Russian University of Economics.* 2022; 19(4):94-130. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.21686/2413-2829-2022-4-94-130

[2] Barashkova O.V. Center and Periphery in Russia: technological progress as key to achieving a more balanced national economy. *Economic Revival of Russia*. 2020; (2):171-179. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.37930/1990-9780-2020-2-64-171-179

[3] Danilova I.V., Rezepin A.V. Spatial economic systems: methodology and theoretical approaches to research. *Vestnik Altajskoj akademii jekonomiki i prava* = Journal of Altai academy of economics and law. 2021; (7-1):24-32. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.17513/vaael.1776

[4] Frisman E.Ya., Revutskaya O.L., Neverova G.P. Modelling dynamics of the limited population with age and sex structure. *Matematicheskoe modelirovanie* = Mathematical Models and Computer Simulations. 2010; 22(11):65-78. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21276428 (accessed 11.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[5] Khavinson M.Yu. Control over the demographic situation in the region: socioeconomic aspect. *Regional Problems.* 2014; 17(2):89-92. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23339861 (accessed 11.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[6] Khavinson M.Y., Kulakov M.P. Gravitational model of population dynamics. *Vestnik Juzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Serija: Matematicheskoe modelirovanie i programmirovanie* = Bulletin of the South Ural State University. Series: Mathematical Modelling, Programming & Computer Software. 2017; 10(3):80-93. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.14529/mmp170307

[7] Lavrikova Yu.G., Akberdina V.V., Suvorova A.V. Coordinating the Priorities of Scientific, Technological and Spatial Development of Industrial Regions. *Ekonomika regiona* = Economy of region. 2019; 15(4):1022-1035. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.17059/2019-4-5

[8] Haque M.S. Globalization, State Formation, and Reinvention in Public Governance: Exploring the Linkages and Patterns in Southeast Asia. *Public Organization Review*. 2013; 13(4):381-396. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/s11115-013-0258-3

[9] Bessa-Gomes C., Legendre S., Clobert J. Discrete two-sex models of population dynamics: On modeling the mating function. *Acta Oecologica*. 2010; 36(5):439-445. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/j.actao.2010.02.010

[10] Revutskaya O., Neverova G., Frisman E. Complex Dynamic Modes in a Two-Sex Age-Structured Population Model. *Developments in Environmental Modelling.* 2012; 25:149-162. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/B978-0-444-59396-2.00010-9

[11] Peaceman D.W., Rachford Jr.H.H. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations. *Journal of the Society for industrial and Applied Mathematics*. 1955; 3(1):28-41. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1137/0103003

[12] Zhang W.-B. Synergetic Economics: Time and Change in Nonlinear Economics. *Springer Series in Synergetics*. Vol. 53. Springer-Verlag Berlin Heidelberg; 1991. 246 p. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-75909-3

[13] Clar G., Sautter B. Research Driven Clusters at the Heart of (Trans-)Regional Learning and Priority-Setting Processes. *Journal of the Knowledge Economy.* 2014; 5(1):156-180. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/s13132-014-0180-0

[14] Aleksandrova E., Behrens K., Kuznetsova M. Manufacturing (co)agglomeration in a transition country: Evidence from Russia. *Journal of Regional Science*. 2020; 60(1):88-128. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1111/jors.12436

[15] Mortezazadeh M., Wang L.L., Albettar M., Yang S. CityFFD – City fast fluid dynamics for urban microclimate simulations on graphics processing units. *Urban Climate*. 2022; 41:101063. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/j.uclim.2021.101063

[16] Dzerzhinsky R.I., Zausailov A.S., Vorontsov A.A. Modelling World Population Dynamics. In: Silhavy R., Silhavy P., Prokopova Z. (eds.) *Data Science and Intelligent Systems. CoMeSySo 2021. Lecture Notes in Networks and Systems.* Vol. 231. Springer, Cham; 2021. p. 423-432. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-90321-3_34

[17] Hiebert K.L. An Evaluation of Mathematical Software That Solves Systems of Nonlinear Equations. *ACM Transactions on Mathematical Software.* 1982; 8(1):5-20. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1145/355984.355986

[18] Aluffi-Pentini F., Parisi V., Zirilli F. A differential-equations algorithm for nonlinear equations. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 1984; 10(3):299-316. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1145/1271.1631

[19] Fuqiang D. Mining Dynamic Transition Rules of Cellular Automata in Urban Population Simulation. *2010 Second International Conference on Computer Modeling and Simulation*. IEEE Computer Society; 2010. p. 471-474. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1109/ICCMS.2010.159

[20] Singh K., Sajjad M., Ahn C. -W. Towards full scale population dynamics modelling with an agent based and micro-simulation based framework. *2015 17th International Conference on Advanced Communication Technology (ICACT).* IEEE Computer Society; 2015. p. 495-501. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1109/ICACT.2015.7224844

[21] Frisman E.Ya., Kulakov M.P., Revutskaya O.L., Zhdanova O.L., Neverova G.P. The key approaches and review of current researches on dynamics of structured and interacting populations. *Computer Research and Modeling*. 2019; 11(1):119-151. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.20537/2076-7633-2019-11-1-119-151

[22] Petrov L.F. Non-linear models in economic and social research. *Vestnik of the Plekhanov Russian University of Economics.* 2022; 19(4):23-31. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.21686/2413-2829-2022-4-23-31

[23] Kiselev D.O. Computational aspects of solving the problem of interaction of population groups in urban education. *Computational nanotechnology.* 2019; 6(2):48-52. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.33693/2313-223X-2019-6-2-48-52

[24] Purvis B., Mao Y., Robinson D. Entropy and its Application to Urban Systems. *Entropy.* 2019; 21(1):56. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.3390/e21010056

[25] Guichard F., Gouhier T.C. Non-equilibrium spatial dynamics of ecosystems. *Mathematical Biosciences*. 2014; 255:1-10. In Eng.) doi: https://doi.org/10.1016/j.mbs.2014.06.013

Submitted 11.06.2022; approved after reviewing 09.07.2022; accepted for publication 13.07.2022.

About the authors:

Igor N. Inovenkov, Associate Professor of the Chair of Automation for Scientific Research, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4633-4404**, inov@cs.msu.ru

Vladimir V. Nefedov, Associate Professor of the Chair of Automation for Scientific Research, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor**, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4602-5070,** vv_nefedov@mail.ru

Vasiliy V. Tikhomirov, Associate Professor of the Chair of General Mathematics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5569-1502**, zedum@cs.msu.ru

All authors have read and approved the final manuscript.