

Об исследовании имитационной математической модели сложной технической системы в современных системах компьютерной математики

В. Р. Кристаллинский^{1*}, П. Л. Лютикас², Е. И. Пахомов²

¹ ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет», г. Смоленск, Российская Федерация

Адрес: 214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4

* kristivr@rambler.ru

² ФГКВУ ВО «Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил

Российской Федерации имени Маршала Советского Союза А. М. Василевского» Министерства

обороны Российской Федерации, г. Смоленск, Российская Федерация

Адрес: 214027, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Котовского, д. 2

Аннотация

Исследование функционирования сложных технических систем является одной из центральных задач математического и компьютерного моделирования. В настоящее время разработано большое число подходов к решению этой задачи. Одним из таких подходов является имитационное моделирование. Он применим, в частности, в случае, если объектом исследования является дискретная система со стохастическим характером функционирования. В настоящей работе рассматривается построение такой модели на примере функционирования сложной технической системы, с учетом влияния результатов функционирования систем имеющих противоположные цели, а также технических и функциональных характеристик участников процесса, что делает их привлекательными для анализа поведения того или иного фактора, влияющего на эффективность функционирования и выполнения задач по назначению. Очевидно, что характер данного процесса позволяет рассматривать его как процесс массового обслуживания. Это предопределяет гипотезу о пуассоновских входящих потоках заявок и потоках восстановления, циркулирующих внутри системы. Процесс компьютерного моделирования таких систем представляется весьма сложным для его реализации на ЭВМ, поскольку число состояний велико. С появлением современных систем компьютерной математики, в частности, системы Wolfram Mathematica, возможности исследования таких моделей значительно возрастают. При этом Wolfram Mathematica позволяет исследовать системы двумя способами: составить уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы в явном виде и получить их аналитические или численные решения либо построить матрицу скоростей переходов и использовать команду системы, предназначенную для анализа марковских процессов с непрерывным временем. Применение предлагаемого подхода позволяет построить модель процесса функционирования сложной технической системы с учетом основных факторов, влияющих на исход противоборства, принятых в вероятностной форме, что позволяет решать с ее помощью различные оптимизационные задачи.

Ключевые слова: имитационная математическая модель, сложная техническая система, система Wolfram Mathematica

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Кристаллинский В. Р., Лютикас П. Л., Пахомов Е. И. Об исследовании имитационной математической модели сложной технической системы в современных системах компьютерной математики // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 2. С. 391-403. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.391-403>

© Кристаллинский В. Р., Лютикас П. Л., Пахомов Е. И., 2022



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



About the Study of a Simulation Mathematical Model of a Complex Technical System in Modern Systems of Computer Mathematics

V. R. Kristalinskii^a, P. L. Luticas^b, E. I. Pachomov^b

^a Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation

Address: 4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation

* kristvr@rambler.ru

^b Russian Federation Armed Forces Army Air Defence Military Academy named after Marshal of the Soviet Union A. M. Vasilevsky, Smolensk, Russian Federation

Address: 2 Kotovsky St., Smolensk 214027, Russian Federation

Abstract

The study of the functioning of complex technical systems is one of the central tasks of mathematical and computer modeling. Currently, many approaches for solving this problem have been developed. One of such approaches is simulation modeling. It is applicable, in particular, if the object of the study is a discrete system with a stochastic nature of functioning. In this paper, we consider the construction of such a model on the example of the functioning of a complex technical system, taking into account the impact of the results of the functioning of systems with opposite goals, as well as the technical and functional characteristics of the participants in the process, which makes them attractive for analyzing the behavior of a factor affecting the effectiveness of functioning and performance of tasks for their intended purpose. Obviously, the nature of this process allows us to consider it as a queuing process. This predetermines the hypothesis of Poisson incoming flows of applications and recovery flows circulating within the system. The process of computer modeling of such systems seems to be very difficult to implement on a computer, since the number of states is large. With the advent of modern computer mathematics systems, in particular, the Wolfram Mathematica system, the possibilities of studying such models are significantly increasing. At the same time, Wolfram Mathematica allows you to study systems in two ways: to make Kolmogorov equations for the probabilities of the states of the system explicitly and obtain their analytical or numerical solutions, or to build a matrix of transition rates and use the system command designed to analyze Markov processes with continuous time. The application of the proposed approach allows us to build a model of the process of functioning of a complex technical system, taking into account the main factors affecting the outcome of the confrontation, adopted in a probabilistic form, which allows us to solve various optimization problems with its help.

Keywords: simulation mathematical model, complex technical system, Wolfram Mathematica system

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Kristalinskii V.R., Luticas P.L., Pachomov E.I. About the Study of a Simulation Mathematical Model of a Complex Technical System in Modern Systems of Computer Mathematics. *Sovremennye informacionnye tehnologii i ITobrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022; 18(2):391-403. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.391-403>



Введение

При моделировании современных сложных технических систем (СТС) широко используются имитационные математические модели, построенные на основе теории массового обслуживания и марковских процессов. Использование таких моделей для исследования систем различного назначения рассматривается в работах¹ [11]-[17], [22]-[25]. Стремление к использованию для анализа СТС хорошо разработанного аппарата теории массового обслуживания предопределяет гипотезу о пуассоновских входящих потоках заявок и потоках восстановления, циркулирующих внутри анализируемой системы, которая будет называться «Марковской», где все будущие вероятностные характеристики зависят от состояния, в котором она находится в настоящий момент времени. Сущность разрабатываемой программы состоит в определении облика математической модели функционирования СТС с использованием графа состояний, с помощью которого были определены математические выражения для комплекса показателей и параметров, характеризующих способность к функционированию элементов СТС. Это позволяет исследовать влияние различных факторов на эффективность и живучесть СТС.

Математические модели функционирования СТС являются исключительно сложными. Вопросам их построения и исследования посвящены работы [5]-[9], [18]-[20]. Это объясняется большим числом факторов, влияющих на СТС в ходе современного противоборства и сложностью самих систем. Поэтому до появления систем компьютерной математики имитационные математические модели функционирования СТС на основе марковских процессов считались слишком громоздкими для их компьютерной реализации. Система Wolfram Mathematica позволяет решить данную задачу весьма эффективно, причем ее использование не требует специальных знаний в области программирования. В работе [1] авторами был реализован один из подходов к использованию системы Wolfram Mathematica для решения рассматриваемой задачи. В ней указано, что система дает лишь численное ее решение, однако, как выяснилось в ходе дальнейших исследований, при определенных условиях возможно получить и аналитическое решение уравнений Колмогорова для рассмотренной в [1] модели. В настоящей работе предполагается рассмотреть все возможные подходы к исследованию имитационной математической модели СТС в процессе ее функционирования с использованием системы Wolfram Mathematica.

Целью исследования является разработка математической и компьютерной модели функционирования СТС в ходе ее функционирования и выполнения задач по предназначению, получение математических выражений для основных факторов, влияющих на живучесть элементов СТС, а также исследование возможностей системы Wolfram Mathematica по моделированию марковского процесса с непрерывным временем, включающего большое число состояний.

Новизна работы заключается в том, что впервые представлена и исследована модель функционирования СТС в виде марковского процесса с непрерывным временем, включающего 120 состояний. Представленная математическая модель описывает процесс функционирования двух СТС с противоположными целями функционирования в форме дифференциальной игры.

Постановка задачи и построение математической модели

СТС моделировалась в составе двух элементов 1 порядка и одного элемента 2 порядка. При решении задачи определялись вероятности состояний СТС, характеризующие его уязвимость к воздействию элементов противоборствующей СТС, таким образом СТС моделируется как двухканальная система массового обслуживания (СМО) потоков заявок двух типов без ожидания, основанная на теории «Марковских» цепей. Модель построена как двухпоточная СМО без ожидания в виде «Марковской» цепи, что позволило описать основные процессы функционирования СТС с помощью системы состоящей из ста двадцати дифференциальных уравнений. Теоретической основой построения модели является разработанный авторами метод динамики средних на основе теории «Марковских» цепей. В качестве характеристик СМО будем использовать характеристики элементов противоборствующих СТС, принятые в вероятностной форме. Модель будет использоваться для того, чтобы оценить, как эффективность применения СТС влияет на ее живучесть в процессе противоборства с другой СТС. Под живучестью в общетехническом смысле принято понимать «свойство системы сохранять и восстанавливать способность к выполнению основных функций в заданном объеме и в течение заданной наработки при изменении структуры системы и (или) алгоритмов и условий ее функционирования вследствие непредусмотренных регламентом нормальной работы неблагоприятных воздействий»² [2]. Для систем военного назначения под живучестью понимается «свойство войск (сил), оружия, военной техники, тыловых объектов, систем управления сохранять или восстанавливать в установленные сроки боевую способность в условиях воздействия противника»³ [3]. Обоснование важности исследований, направленных на повышение живучести военно-технических систем, приводится, в частности, в [10].

В ходе разработки модели авторами приняты следующие допущения:

1. Все потоки событий, происходящие в системе – пуассоновские.
2. Вероятность одновременного наступления событий пренебрежимо мала.
3. В потоках событий отсутствует период последействия.
4. Изменение вероятностей состояний непрерывно по времени.

¹ Трушина В. П. Программные средства моделирования циклических марковских процессов // Эволюция научной мысли: Сб. статей Межд. НПК / Под ред. А. А. Сукиасяна. Уфа: Аэтерна, 2015. С. 3-5. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23208833> (дата обращения: 19.05.2022).

² Черкесов Г. Н. Методы и модели оценки живучести сложных систем. М.: Знание, 1987. 32 с.

³ Сборник основных военных терминов и понятий / редкол.: Н. Н. Турбан [и др.]. Минск: ГШ ВС РБ, 2009. 210 с.



5. Вероятности обнаружения, принятия решения на функциональное воздействие непрерывны по времени и постоянны.
6. Факторы защиты и имитации обладают свойством аддитивности.
7. Восстановление функциональности элементов СТС начинается после окончания противоборства.

Модель позволяет исследовать 120 различных состояний СТС (см. табл.1). Выходные параметры представляют собой вероятности нахождения СТС в каждом из ста двадцати исследуемых состояний и представляют собой комплекс показателей, характеризующих сохранение потенциала функционирования

СТС в процессе противоборства. Выходные параметры определяются как непрерывные функции времени и могут определяться в любой временной точке расчетного периода. Входные параметры характеризуют возможности, эффективность элементов рассматриваемых СТС, а выходными параметрами являются показатели их живучести.

Соблюдение допущения 8, заключающегося в том, что во время функционирования СТС ремонтных работ не производится, означает, что $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$. Описание состояний системы представлено в таблице 1. Более подробно описаны состояния системы, в которых функционируют все ее элементы, остальные состояния аналогичны.

Таблица 1. Состояния моделируемой системы и их обозначения
Table 1. States of the simulated system and their designations

№ п/п	Наименование состояния	Условные обозначения	
		Состояние	Вероятность состояния
I	Функционируют все элементы системы (два элемента 1 порядка и один элемент 2 порядка)	S0 A,B (m, n, k)	$\sum_{i=0}^{14} W_i$
1.	То же при отсутствии воздействия по противоборствующим СТС	P0 A, B (m, n, k)	W0
2.	То же при воздействии по одной противоборствующей СТС 1-го типа	P1 A-1, B (m, n, k)	W1
3.	То же при воздействии по одной противоборствующей СТС 2-го типа	P2 A, B-1 (m, n, k)	W2
4.	То же при воздействии по двум противоборствующим СТС 1-го типа	P3 A-2, B (m, n, k)	W ₃
5.	То же при воздействии по одной противоборствующей СТС 1-го типа и одной СТС 2-го типа	P4 A-1, B-1 (m, n, k)	W ₄
6.	То же при воздействии по двум противоборствующим СТС 2-го типа	P5 A, B-2 (m, n, k)	W ₅
7.	То же при воздействии по трем противоборствующим СТС 1-го типа	P6 A-3, B (m, n, k)	W ₆
8.	То же при воздействии по двум противоборствующим СТС 1-го типа и одной СТС 2-го типа	P7 A-2, B-1 (m, n, k)	W ₇
9.	То же при воздействии по одной противоборствующей СТС 1-го типа и двум СТС 2-го типа	P8 A-1, B-2 (m, n, k)	W ₈
10.	То же при воздействии по трем противоборствующим СТС 2-го типа	P9 A, B-3 (m, n, k)	W ₉
11.	То же при воздействии по четырем противоборствующим СТС 1-го типа	P10 A-4, B (m, n, k)	W ₁₀
12.	То же при воздействии по трем противоборствующим СТС 1-го типа и одной СТС 2-го типа	P11 A-3, B-1 (m, n, k)	W ₁₁
13.	То же при воздействии по двум противоборствующим СТС 1-го типа и двум СТС 2-го типа	P12 A-2, B-2 (m, n, k)	W ₁₂
14.	То же при воздействии по одной противоборствующей СТС 1-го типа и трем СТС 2-го типа	P13 A-1, B-3 (m, n, k)	W ₁₃
15.	То же при воздействии по четырем противоборствующим СТС 2-го типа	P14 A, B-4 (m, n, k)	W ₁₄
II	Функционируют два элемента 1 порядка (без элемента 2 порядка)	S1 A, B (m, n, 0)	$\sum_{i=15}^{29} W_i$



№ п/п	Наименование состояния	Условные обозначения	
		Состояние	Вероятность состояния
...			
III	Функционируют первый элемент 1 порядка и элемент 2 порядка (без второго элемента 1 порядка)	S2 A, B (m, 0, k)	$\sum_{i=30}^{44} W_i$
...			
IV	Функционируют первый элемент 1 порядка (без второго элемента 1 порядка и элемента 2 порядка)	S3 A, B (m, 0, 0)	$\sum_{i=45}^{59} W_i$
...			
V	Функционируют второй элемент 1 порядка и элемент 2 порядка (без первого элемента 1 порядка)	S4 A, B (0, n, k)	$\sum_{i=60}^{74} W_i$
...			
VI	Функционируют второй элемент 1 порядка (без первого элемента 1 порядка и элемента 2 порядка)	S5 A, B (0, n, 0)	$\sum_{i=75}^{89} W_i$
...			
VII	Функционируют элемент 2 порядка (без первого и второго элемента 1 порядка)	S6 A, B (0, 0, k)	$\sum_{i=90}^{104} W_i$
...			
VIII	Система полностью не функционирует	S7 A, B (0, 0, 0)	$\sum_{i=105}^{119} W_i$
...			

Для удобства пользования показатели эффективности противостояния СТС сведены в таблицы. Комплекс параметров, характеризующих эффективность противодействующих СТС представлен в таблице 2. Комплекс показателей функцио-

нальных возможностей рассматриваемой СТС представлен в таблице 3. Параметры и показатели, характеризующие эффективность функционирования противодействующих СТС, являются входными параметрами подающимися на вход модели.

Т а б л и ц а 2. Показатели эффективности противодействующих СТС
Table 2. Efficiency indicators of counteracting Complex Technical Systems

№ п/п	Наименование показателя	Условное обозначение
1.	Поток функциональных воздействий противодействующими СТС 1-го и 2-го типов по 1.1 элементу СТС 1-го порядка.	λ_1
2.	Поток функциональных воздействий противодействующими СТС 1-го и 2-го типов по 1.2 элементу СТС 1-го порядка.	λ_2
3.	Поток функциональных воздействий противодействующими СТС 1-го и 2-го типов по элементу СТС 2-го порядка.	λ_3
4.	Вероятность функционального поражения элементов СТС.	Q_0
5.	Время цикла одиночного функционального воздействия противодействующих СТС.	$t_{н\text{СТС}}$



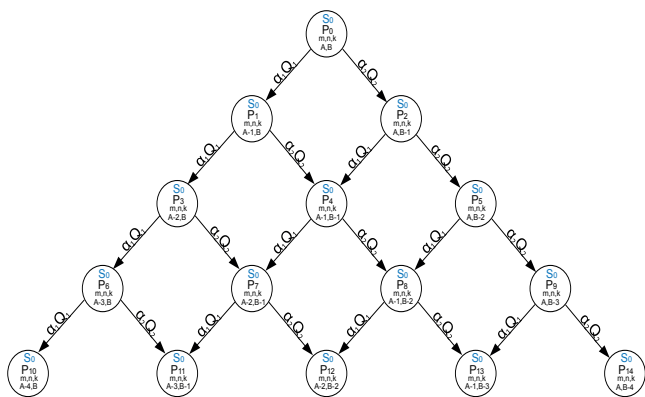
Таблица 3. Показатели функциональных возможностей СТС
Table 3. Complex Technical Systems Functionality Indicators

№ п/п	Наименование показателя	Условное обозначение
1.	Поток функциональных воздействий по противоборствующим СТС 1-го типа	α_1
2.	Поток функциональных воздействий по противоборствующим СТС 2-го типа	α_2
3.	Вероятность функционального поражения противоборствующих СТС 1-го типа	Q_1
4.	Вероятность функционального поражения противоборствующих СТС 2-го типа	Q_2
5.	Время цикла одиночного функционального воздействия СТС	$t_{СТС}$
6.	Поток восстановления работоспособности 1.1 элементов СТС 1-го порядка	γ_1
7.	Поток восстановления работоспособности 1.2 элементов СТС 1-го порядка	γ_2
8.	Поток восстановления работоспособности элементов СТС 2-го порядка.	γ_3

Варианты и количество противоборствующих СТС 1-го и 2-го типов приведены в таблице 4.

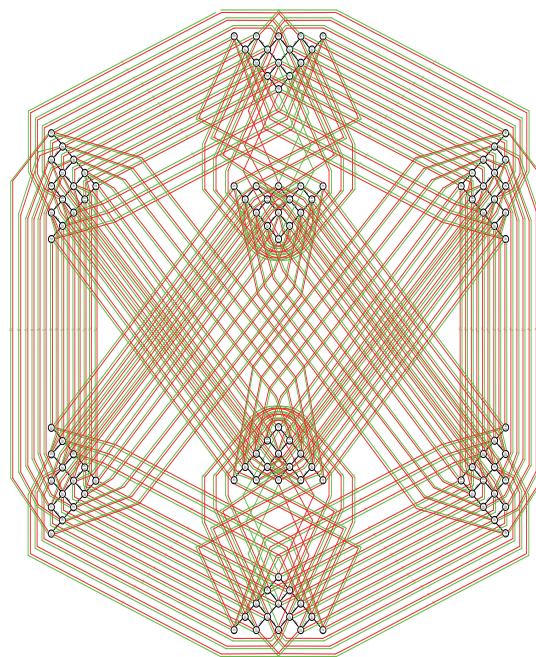
Таблица 4. Варианты и количество противоборствующих СТС 1-го и 2-го типов
Table 4. Variants and number of opposing Complex Technical Systems of the first and second types

Варианты противодействия	Количество элементов противоборствующих СТС в процессе функционирования (1-го типа и 2-го типа)															
	0	1	0	1	2	0	2	1	2	3	0	3	1	0	0	
А	0	1	0	1	2	0	2	1	2	3	0	3	1	0	0	
В	0	0	1	1	0	2	1	2	2	0	3	1	3	4	4	



Р и с. 1. Граф состояний СТС в начальном состоянии функционирования системы

Fig. 1. Graph of the states of Complex Technical System in the initial state of the system functioning



Р и с. 2. Граф состояний СТС в процессе ее функционирования
Fig. 2. Graph of the states of Complex Technical System in the course of its operation



Выходными параметрами модели являются вероятности состояний системы, которые могут определяться в любой временной точке расчетного периода. На основе этих параметров получаем комплексный показатель живучести СТС – вероятность нахождения комплекса в состоянии, в котором полностью сохранены его функциональные возможности и частные показатели – вероятности нахождения системы в состояниях, в которых функционирует хотя бы один ее элемент.

Покажем для наглядности потоки протекающих событий в начальном состоянии системы функционирования элементов СТС, когда система полностью исправна. В процессе функционирования системы остальные состояния описываются по аналогии. Граф состояний функционирования СТС в ходе противоборства приведен на рисунке 1. Стрелками показаны переходы системы из одного состояния в другое под действием потоков событий. Наименования обозначений, показанных на графе состояний, приведены в таблицах 1, 2, 3, 4.

$$\begin{aligned} \frac{dP_0}{dt} &= P_{15} \cdot \gamma_3 + P_{30} \cdot \gamma_2 + P_{60} \cdot \gamma_1 - P_0 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) - P_0 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_0 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_1}{dt} &= P_{16} \cdot \gamma_3 + P_{31} \cdot \gamma_2 + P_{61} \cdot \gamma_1 - P_1 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_0 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_1 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_1 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_2}{dt} &= P_{17} \cdot \gamma_3 + P_{32} \cdot \gamma_2 + P_{62} \cdot \gamma_1 - P_2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_0 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 - P_2 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_2 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_3}{dt} &= P_{18} \cdot \gamma_3 + P_{33} \cdot \gamma_2 + P_{63} \cdot \gamma_1 - P_3 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_1 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_3 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_3 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_4}{dt} &= P_{19} \cdot \gamma_3 + P_{34} \cdot \gamma_2 + P_{64} \cdot \gamma_1 - P_4 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_1 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 + P_2 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_4 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_4 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_5}{dt} &= P_{20} \cdot \gamma_3 + P_{35} \cdot \gamma_2 + P_{65} \cdot \gamma_1 - P_5 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_2 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 - P_5 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_5 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_6}{dt} &= P_{21} \cdot \gamma_3 + P_{36} \cdot \gamma_2 + P_{66} \cdot \gamma_1 - P_6 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_3 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_6 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_6 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_7}{dt} &= P_{22} \cdot \gamma_3 + P_{37} \cdot \gamma_2 + P_{67} \cdot \gamma_1 - P_7 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_3 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 + P_4 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_7 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_7 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_8}{dt} &= P_{23} \cdot \gamma_3 + P_{38} \cdot \gamma_2 + P_{68} \cdot \gamma_1 - P_8 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_4 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 + P_5 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_8 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_8 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_9}{dt} &= P_{24} \cdot \gamma_3 + P_{39} \cdot \gamma_2 + P_{69} \cdot \gamma_1 - P_9 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_5 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 - P_9 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 - P_9 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \\ \frac{dP_{10}}{dt} &= P_{25} \cdot \gamma_3 + P_{40} \cdot \gamma_2 + P_{70} \cdot \gamma_1 - P_{10} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_6 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 \\ \frac{dP_{11}}{dt} &= P_{26} \cdot \gamma_3 + P_{41} \cdot \gamma_2 + P_{71} \cdot \gamma_1 - P_{11} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_6 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 + P_7 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 \\ \frac{dP_{12}}{dt} &= P_{27} \cdot \gamma_3 + P_{42} \cdot \gamma_2 + P_{72} \cdot \gamma_1 - P_{12} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_7 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 + P_8 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 \\ \frac{dP_{13}}{dt} &= P_{28} \cdot \gamma_3 + P_{43} \cdot \gamma_2 + P_{73} \cdot \gamma_1 - P_{13} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_8 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 + P_9 \cdot \alpha_1 \cdot Q_1 \\ \frac{dP_{14}}{dt} &= P_{29} \cdot \gamma_3 + P_{44} \cdot \gamma_2 + P_{74} \cdot \gamma_1 - P_{14} \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + P_9 \cdot \alpha_2 \cdot Q_2 \end{aligned}$$

В работе [1] описано исследование построенной выше математической модели на основе системы Колмогорова средствами Wolfram Mathematica. В ней было указано, что система Mathematica выдает для этой системы лишь численное решение. Однако в дальнейшем выяснилось, что возможно получить и аналитическое решение системы, однако лишь в случае, когда численные коэффициенты, входящие в систему, представлены в виде рациональных чисел. Для того чтобы ввести

Граф состояний полной системы изображен на рисунке 2. Очевидно, что исследование столь сложной системы связано со значительными трудностями. В то же время ее упрощение может привести к существенному снижению адекватности модели. Поэтому использование системы Mathematica в данном случае значительно повышает эффективность исследования.

Исследование модели с помощью системы уравнений Колмогорова

Как известно, исследование марковского процесса с дискретными состояниями и непрерывным временем может осуществляться с помощью системы уравнений Колмогорова. В нашем случае система уравнений Колмогорова включает в себя 120 уравнений, описывающая динамику противоборства. Приведем уравнения для начальных состояний системы:

в систему коэффициент, полученный в результате расчетов, в виде рационального числа, используется команда Rationalize, например

`α1=Rationalize[1/(tц/Q1)]`

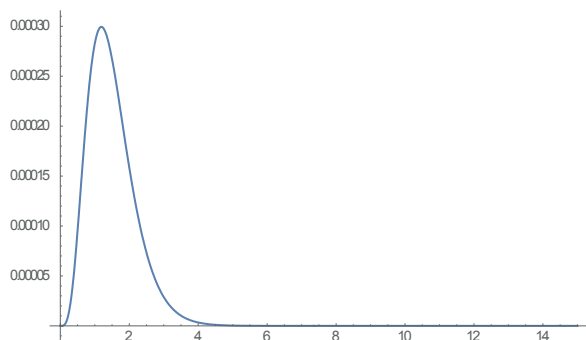
После ввода всех исходных данных решаем систему дифференциальных уравнений с помощью команды DSolve. Wolfram Mathematica выдает все решения системы уравнений в аналитическом виде, например, полученное системой выражение



для вероятности одиннадцатого состояния системы имеет вид

$$P_{10}(t) = (6975757441E^{-23t/65} - 4394000 + 4394000E^{(111t/130)} - 3751800t - 1601730t^2 - 455877t^3) / 82350634340000000$$

График этой функции, построенный системой, имеет вид



Р и с. 3. График функции для одиннадцатого состояния системы, построенный системой Mathematica при выводе функции аналитически
 Fig. 3. The function graph for the eleventh state of the system, constructed by Mathematica System when inferring the function analytically

Время, затрачиваемое на решение системы дифференциальных уравнений в символьном виде, составляет около 10 секунд. При численном решении системы способом, указанным в [1], на ее решение затрачивается около 0,02 секунд. При этом относительная погрешность полученного численного решения для одиннадцатого состояния системы составляет 0,00002%.

Решение задачи с помощью встроенных средств системы Mathematica

Система Mathematica позволяет исследовать марковские процессы с дискретными состояниями и непрерывным временем с помощью встроенных средств. В качестве исходных данных при этом используется вектор начального распределения вероятностей системы и матрица скорости перехода (transition rate matrix), элементы которой описывают мгновенную скорость, с которой цепь Маркова переходит между состояниями. Эти элементы есть не что иное, как коэффициенты соответствующих уравнений Колмогорова. Их можно получить на основе анализа графа состояний системы. При этом диагональные элементы матрицы представляют собой взятую с обратным знаком сумму остальных элементов соответствующей строки.

В нашем примере матрица скорости перехода имеет размерность 120x120, вектор начального распределения вероятностей содержит 120 элементов, первый из которых равен 1, а остальные элементы равны нулю. Это следует из того, что перед началом соревнования все элементы СТС заведомо исправны, а также отсутствует внешнее воздействие на функционирование системы. При проведении расчетов элементы матрицы скорости перехода вводились по одному вручную, но в принципе для их ввода можно организовать специальные циклы. Числовые коэффициенты, на основе которых рассчитываются элементы матрицы, должны быть представлены в виде рациональных чисел.

После ввода исходных данных и матрицы коэффициентов вводим команду для анализа марковского процесса.

```
Res=ContinuousMarkovProcess[P0,P];
```

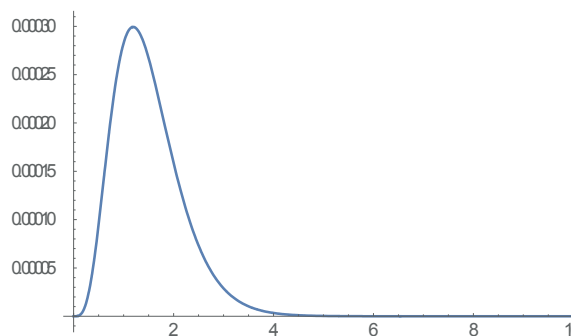
Затем можно получить для любого состояния функцию, характеризующую зависимости вероятности нахождения системы в этом состоянии от времени. При этом номера функций начинаются с единицы, а не с нуля. Например, для одиннадцатого состояния

```
U[t_]=PDF[Res[t],11];
```

При этом функция также получается в аналитическом виде.

Построим график этой функции

```
Plot[U[t],{t,0,10},PlotRange->Full]
```

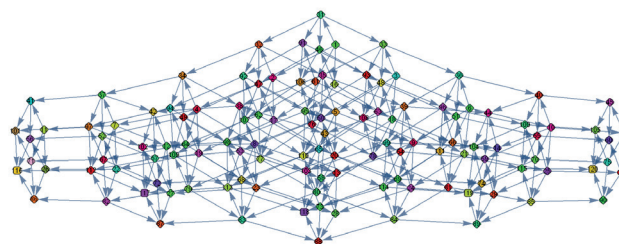


Р и с. 4. График функции для одиннадцатого состояния системы, построенный системой Mathematica при выводе функции с помощью встроенного алгоритма для исследования марковских процессов
 Fig. 4. The function graph for the eleventh state of the system, constructed by Mathematica System when inferring a function using the built-in algorithm for Markov process research

Нетрудно видеть, что графики на рисунках 3 и 4 совпадают. Таким образом, мы имеем три способа получения уравнений состояний системы, причем они приводят к совпадающим результатам.

При использовании встроенного метода Mathematica позволяет автоматически построить граф состояний моделируемой системы.

```
Graph[Res]
```



Р и с. 5. Граф состояний СТС в процессе ее функционирования, построенный системой Mathematica

Fig. 5. The state graph of the Complex Technical Systems in the process of its operation, built by the Mathematica System

Мы можем осуществить полный анализ свойств процесса
`MarkovProcessProperties[Res]`

На экране появляется таблица, описывающая свойства процесса



Basic Properties	
InitialProbabilities	
TransitionRateVector	
TransitionMatrix	
HoldingTimeMean	
HoldingTimeVariance	
Structural Properties	
CommunicatingClasses	{(116), (56), (86), (26), (101), (41), (71), (11), (117), (57), (87), (27), (102), (42), (72), (12), (122), (52), (82), (22), (97), (37), (67), (7), (118), (58), (88), (28), (103), (43), (73), (13), (133), (53), (83), (23), (98), (38), (68), (8), (109), (49), (79), (119), (94), (34), (64), (4), (119), (59), (89), (29), (104), (44), (74), (14), (114), (54), (84), (24), (139), (69), (9), (110), (50), (80), (20), (95), (35), (65), (15), (107), (47), (77), (17), (92), (32), (62), (12), (120), (60), (90), (30), (105), (45), (75), (15), (115), (55), (85), (25), (100), (40), (70), (10), (111), (51), (81), (21), (96), (36), (66), (16), (108), (48), (78), (18), (93), (33), (63), (13), (106), (46), (76), (16), (91), (31), (61), (11)}
RecurrentClasses	{(116), (117), (118), (119), (120)}
TransientClasses	{(56), (86), (26), (101), (41), (71), (11), (117), (57), (87), (27), (102), (42), (72), (12), (122), (52), (82), (22), (97), (37), (67), (7), (118), (58), (88), (28), (103), (43), (73), (13), (133), (53), (83), (23), (98), (38), (68), (8), (109), (49), (79), (119), (94), (34), (64), (4), (119), (59), (89), (29), (104), (44), (74), (14), (114), (54), (84), (24), (99), (39), (69), (9), (110), (50), (80), (20), (95), (35), (65), (15), (107), (47), (77), (17), (92), (32), (62), (12), (60), (90), (30), (105), (45), (75), (15), (115), (55), (85), (25), (100), (40), (70), (10), (111), (51), (81), (21), (96), (36), (66), (16), (108), (48), (78), (18), (93), (33), (63), (13), (106), (46), (76), (16), (91), (31), (61), (11)}
AbsorbingClasses	{(116), (117), (118), (119), (120)}
Irreducible	False
Reversible	False
Transient Properties	
TransientVisitMean	$\text{MatrixPlot}[\{\{0.0002993368, 0.0000000000, 0.0000000000, \dots, 0.0000000000\}, \{0.0000000000, 0.0000000000, 0.0000000000, \dots, 0.0000000000\}\}]$

Р и с. 6. Часть таблицы, описывающей свойства марковского процесса, построенной системой Mathematica

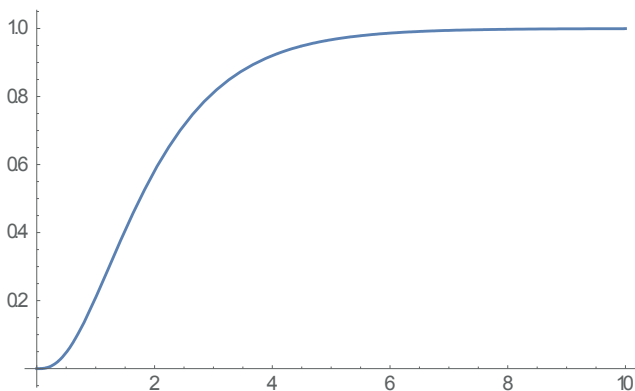
Fig. 6. Part of a table describing the properties of a Markov process built by Mathematica System

Из этой таблицы можно, например, получить, что среднее число раз, когда система находится в одиннадцатом состоянии, равно $435848551937692317/122965776831012500000 \approx 0,004$, а среднее число состояний, в которых находится система, равно 7.

После того, как уравнения для состояний системы так или иначе построены, мы можем заняться ее исследованием. Найдем, например, максимальную вероятность пребывания системы в одиннадцатом состоянии.
 $\text{NMaximize}[\{U[t], t >= 0\}, \{0.0002993368, t > 1.19124\}]$

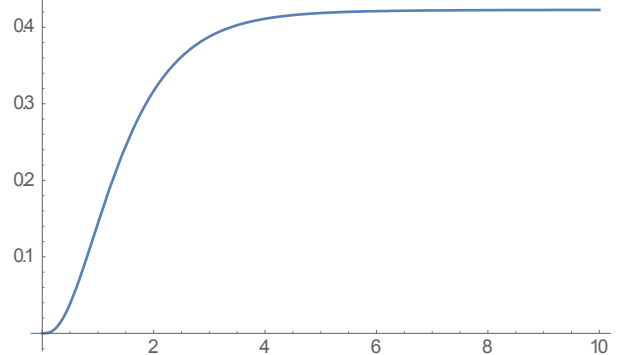
Это означает, что наиболее вероятно, что система окажется в данном состоянии через 1,2 минуты после начала противоборства.

Найдем функцию, описывающую зависимость от времени вероятности полной неисправной СТС, просуммировав функции со 106 по 120 (см. табл.1) и построим ее график.



Это означает, что примерно через 4 минуты после начала противоборства СТС, если не проводятся восстановительные работы, полностью выходит из строя с вероятностью, практически равной 1.

В случае, когда восстановительные работы проводятся (например, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0,3$), картина становится иной.



То есть вероятность полностью неисправного состояния системы через 4 минуты становится равной примерно 0,4. Расчеты в этом случае система Mathematica позволяет проводить только численным методом из-за значительного усложнения уравнений Колмогорова.

Закключение

Таким образом, построенная авторами модель позволяет производить оценку эффективности и живучести СТС в динамике противоборства, причем получать результаты в аналитическом виде. При этом система Wolfram Mathematica позволяет осуществлять компьютерную реализацию построенной модели с большим числом состояний и представлять результаты исследований в наглядном виде. В дальнейшем модель может быть расширена за счет увеличения числа типов и количества элементов СТС. Предлагаемая модель позволит анализировать эффективность и живучесть существующих и перспективных образцов СТС в процессе противоборства в различных условиях обстановки.



Список использованных источников

- [1] Кристаллинский В. Р., Лютикас П. Л. Имитационная математическая модель функционирования сложной технической системы // Системы компьютерной математики и их приложения. 2022. № 23. С. 12-22. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48621262> (дата обращения: 19.05.2022).
- [2] Черкесов Г. Н., Недосекин А. О. Описание подхода к оценке живучести сложных структур при многообразных воздействиях высокой точности // Надежность. 2016. № 2. С. 3-15. doi: <https://doi.org/10.21683/1729-2640-2016-16-2-3-15>
- [3] Bernardi S., Dranca L., Merseguer J. A model-driven approach to survivability requirement assessment for critical systems // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability. 2016. Vol. 230, issue 5. P. 485-501. doi: <https://doi.org/10.1177/1748006X15626017>
- [4] Азаренок И. П., Петьков А. А. Концептуальные подходы к построению системы противовоздушной обороны государства // Наука и военная безопасность. 2007. № 4. С. 13-18. URL: <http://militaryarticle.ru/nauka-i-voennaya-bezopasnost/2007/11995-konceptualnye-podhody-k-postroeniju-sistemy> (дата обращения: 19.05.2022).
- [5] Попов Б. Е., Кубрин Г. С., Шульдешов Л. С. Моделирование корабельного противовоздушного боя с применением метода линейного программирования // Неделя науки СПбПУ: Материалы научной конф. с межд. участием. Лучшие доклады. СПб: СПбПУ, 2018. С. 391-393. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32820525> (дата обращения: 19.05.2022).
- [6] Мустафаев Н. Г., Леонтьев Р. В., Идилиева Е. В. Состояние и перспективы имитационного моделирования испытаний автоматизированных систем управления противовоздушной обороны // Военная мысль. 2021. № 2. С. 98-106. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44821753> (дата обращения: 19.05.2022).
- [7] Степанов В. В. Моделирование контуров боевого управления силами и средствами борьбы с воздушным противником надводных кораблей с применением методов искусственного интеллекта // Актуальные проблемы защиты и безопасности. СПб: РАРАН, 2021. Т. 3. С. 33-39. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46476573> (дата обращения: 19.05.2022).
- [8] Щербатов Е. С., Дорожкин А. Д., Колыванов А. В. Потенциальные возможности прогнозирования хода и исхода боевых действий с применением различных видов математических моделей // Имитационное моделирование. Теория и практика; под ред. С. Н. Васильева, Р. М. Юсупова. М.: ИПУ РАН, 2015. С. 404-408. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25420661> (дата обращения: 19.05.2022).
- [9] Богданов О. А., Смирнов А. А., Ковалев Д. В. Имитационное моделирование противоборства в воздушно-космической сфере // Программные продукты и системы. 2016. № 1. С. 160-165. doi: <https://doi.org/10.15827/0236-235X.113.160-165>
- [10] Селиванов В. В., Ильин Ю. Д. Влияние живучести на боевую и военно-экономическую эффективность военно-технических систем // Военная мысль. 2021. № 9. С. 99-112. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47108863> (дата обращения: 19.05.2022).
- [11] Чув В. Ю., Дубоград И. В. Стохастизм и детерминизм при моделировании двухсторонних боевых действий // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия «Естественные науки». 2017. № 4(73). С. 16-28. doi: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-4-16-28>
- [12] Хугаева М. В., Цахоева А. Ф. Моделирование экономических систем на основе марковских случайных процессов // Бюллетень Владикавказского института управления. 2017. № 52. С. 159-164. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32824529> (дата обращения: 19.05.2022).
- [13] Лубенцова В. С., Ефремов А. В. Моделирование производственной программы автотранспортного предприятия с использованием марковских случайных процессов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2002. № 16. С. 155-160. doi: <https://doi.org/10.14498/vsgtu114>
- [14] Пермякова М. А., Пермякова О. В. Вероятностный подход к проектированию СЗИ с применением марковских процессов // Актуальные проблемы современной науки, техники и образования. 2017. Т. 1. С. 214-217. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29929896> (дата обращения: 19.05.2022).
- [15] Зеленцов Б. П. Соотношения между состояниями и событиями при моделировании надежности Марковскими процессами // Надежность. 2022. № 1. С. 38-43. doi: <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-1-38-43>
- [16] Петровский Э. А., Гагина М. В. Применение методов марковских процессов для моделирования надежности и риска оборудования нефтегазового комплекса // Надежность и качество. 2015. Т. 2. С. 312-313. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23907640> (дата обращения: 19.05.2022).
- [17] Щеглов К. А., Щеглов А. Ю. Корректность марковских моделей с дискретными состояниями и непрерывным временем // Известия высших учебных заведений. Приборостроение. 2019. Т. 62, № 1. С. 40-49. doi: <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2019-62-1-40-49>
- [18] Koruba Z., Krzysztofik I. An algorithm for selecting optimal controls to determine the estimators of the coefficients of a mathematical model for the dynamics of a self-propelled anti-aircraft missile system // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics. 2013. Vol. 227, issue 1. P. 12-16. doi: <https://doi.org/10.1177/1464419312455967>
- [19] Casar J., Farlik J. The Possibilities and Usage of Missile Path Mathematical Modelling for the Utilization in Future Autonomous Air Defense Systems Simulators // Modelling and Simulation for Autonomous Systems. MESAS 2019. Lecture Notes in Computer Science ; ed. by J. Mazal, A. Fagiolini, P. Vasik. Vol. 11995. Springer, Cham, 2020. P. 53-261. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-43890-6_20



- [20] Guo B.-B., An T.-Y., Sun Y.-T. Research on Simulation Design of Air Force Campaign Process Deduction System // The Frontiers of Society, Science and Technology. 2019. Vol. 1, issue 8. P. 51-56. doi: <https://doi.org/10.25236/FSST.2019.010809>
- [21] Cui Z., Kirkby J. L., Nguyen D. A general framework for time-changed Markov processes and applications // European Journal of Operational Research. 2019. Vol. 273, issue 2. P. 785-800. doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.08.033>
- [22] Cui Z., Kirkby J. L., Nguyen D. Continuous-Time Markov Chain and Regime Switching Approximations with Applications to Options Pricing // Modeling, Stochastic Control, Optimization, and Applications. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications; ed. by G. Yin, Q. Zhang. Vol. 164. Springer, Cham, 2019. P. 115-146. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-25498-8_6
- [23] Qi W., Zong G., Zheng W. X. Adaptive Event-Triggered SMC for Stochastic Switching Systems With Semi-Markov Process and Application to Boost Converter Circuit Model // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. 2020. Vol. 68, no. 2. P. 786-796. doi: <https://doi.org/10.1109/TCSI.2020.3036847>
- [24] Defourny B., Moazeni S. Implied Markov transition matrices under structural price models // Quantitative Finance. 2021. Vol. 21, issue 11. P. 1935-1954. doi: <https://doi.org/10.1080/14697688.2021.1921242>
- [25] Hartich D., Godec A. Interlacing relaxation and first-passage phenomena in reversible discrete and continuous space Markovian dynamics // Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment. 2019. Vol. 2019, issue 2. Article number: 024002. doi: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/aaf716>

Поступила 19.05.2022; одобрена после рецензирования 10.07.2022; принята к публикации 15.07.2022.

Об авторах:

Кристалинский Владимир Романович, доцент кафедры прикладной математики и информатики физико-математического факультета, ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет» (214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1205-990X>**, kristvr@rambler.ru
Лютикас Павел Леонидович, научный сотрудник, ФГКВУ ВО «Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации имени Маршала Советского Союза А. М. Василевского» Министерства обороны Российской Федерации (214027, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Котовского, д. 2), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9858-8396>**, plytikas@mail.ru

Пахомов Евгений Ильич, профессор кафедры естественнонаучных дисциплин, ФГКВУ ВО «Военная академия войсковой противовоздушной обороны Вооруженных Сил Российской Федерации имени Маршала Советского Союза А. М. Василевского» Министерства обороны Российской Федерации (214027, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Котовского, д. 2), доктор технических наук, профессор, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6968-2490>**, planeta-registr.com@rambler.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Kristalinskii V.R., Luticas P.L. *Imitacionnaya matematicheskaya model' funkcionirovaniya slozhnoj tekhnicheskoy sistemy* [Simulation mathematical model functioning of a complex technical system]. *Sistemy komp'yuternoj matematiki i ih prilozheniya* = Computer Mathematics Systems and Their Applications. 2022; (23):12-22. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48621262> (accessed 19.05.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [2] Cherkesov G.N., Nedosekin A.O. Description of approach to estimating survivability of complex structures under repeated impacts of high accuracy. *Nadëžnost' = Dependability*. 2016; (2):3-15. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2016-16-2-3-15>
- [3] Bernardi S., Dranca L., Merseguer J. A model-driven approach to survivability requirement assessment for critical systems. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part O: Journal of Risk and Reliability*. 2016; 230(5):485-501. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1177/1748006X15626017>
- [4] Azarenok I.P., Pet'kov A.A. *Konceptual'nye podhody k postroeniyu sistemy protivovozdushnoj oborony gosudarstva* [Conceptual approaches to the construction of the state air defense system]. *Nauka i voennaya bezopasnost' = Science and Military Security*. 2007; (4):13-18. Available at: <http://militaryarticle.ru/nauka-i-voennaya-bezopasnost/2007/11995-konceptualnye-podhody-k-postroeniju-sistemy> (accessed 19.05.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [5] Popov B.E., Kubrin G.S., Shul'deshov L.S. *Modelirovanie korabel'nogo protivovozdushnogo boya s primeneniem metoda linejnogo programmirovaniya* [Modeling of naval anti-aircraft combat using the linear programming method]. *Nedelya nauki SPbSTU = Week of Science*. SPbSTU, SPb; 2018. p. 391-393. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32820525> (accessed 19.05.2022). (In Russ.)
- [6] Mustafaev N.G., Leontyev R.V., Idilieva Ye.V. *Sostoyanie i perspektivy imitacionnogo modelirovaniya ispytaniy avtomatizirovannyh sistem upravleniya protivovozdushnoj oborony* [The condition and prospects of imitation modeling for the trials of automated control systems of air defense]. *Voennaya mysl' = Military Thought*. 2021; (2):98-106. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44821753> (accessed 19.05.2022). (In Russ., abstract in Eng.)



- [7] Stepanov V.V. *Modelirovanie konturov boevogo upravleniya silami i sredstvami bor'by s vozдушным protivnikom nadvodnykh korablej s primeneniem metodov iskusstvennogo intellekta* [Modeling the contours of the combat control of forces and means of combating the air enemy of surface ships using artificial intelligence methods]. *Aktual'nye problemy zashchity i bezopasnosti*. RARAN, SPb; 2021. 3:33-39. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46476573> (accessed 19.05.2022). (In Russ.)
- [8] Shcherbakov E.S., Dorozhkin A.D., Kolyvanov A.V. *Potencial'nye vozmozhnosti prognozirovaniya hoda i iskhoda boevykh dejstvij s primeneniem razlichnykh vidov matematicheskikh modelej* [Potential possibilities of predicting the course and outcome of hostilities using various types of mathematical models]. *Imitacionnoe modelirovanie. Teoriya i praktika*. ICS RAS, Moscow; 2015. p. 404-408. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=25420661> (accessed 19.05.2022). (In Russ.)
- [9] Bogdanov O.A., Smirnov A.A., Kovalev D.V. *Imitacionnoe modelirovanie protivoborstva v vozдушno-kosmicheskoy sfere* [Imitation modeling for aerospace confrontation]. *Programmnye produkty i sistemy* = Software & Systems. 2016; (1):160-165. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.15827/0236-235X.113.160-165>
- [10] Selivanov V.V., Ilyin Yu.D. The effect of survivability on the combat and military-economic efficiency of military technical systems. *Voennaya mysl'* = Military Thought. 2021; (9):99-112. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=47108863> (accessed 19.05.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [11] Chuev V.Yu., Dubogray I.V. Stochasticism and Determinism in Simulation Bilateral Warfare. *Vestn. Mosk. Gos. Tekh. Univ. im. N.E. Bauman, Estestv. Nauki* = Herald of the Bauman Moscow State Tech. Univ., Nat. Sci. 2017; (4):16-28. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.18698/1812-3368-2017-4-16-28>
- [12] Hugaeva M.V., Cahoeva A.F. *Modelirovanie ekonomicheskikh sistem na osnove markovskikh sluchajnykh processov* [Modeling economic systems based on Markov random processes]. *Byulleten' Vladikavkazskogo instituta upravleniya* = Bulletin of the Vladikavkaz Institute of Management. 2017; (52):159-164. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32824529> (accessed 19.05.2022). (In Russ.)
- [13] Lubentcova V.S., Efremov A.V. *Modelirovanie proizvodstvennoj programmy avtotransportnogo predpriyatiya s ispol'zovaniem markovskikh sluchajnykh processov* [Modeling the production program of a motor transport enterprise using Markov random processes]. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki* = Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences. 2002; (16):155-160. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.14498/vsgtu114>
- [14] Permyakova M.A., Permyakova O.V. *Veroyatnostnyj podhod k proektirovaniyu SZI s primeneniem markovskikh processov* [Probabilistic approach to the design of IPS using Markov processes]. *Aktual'nye problemy sovremennoj nauki, tekhniki i obrazovaniya*. 2017; 1:214-217. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=29929896> (accessed 19.05.2022). (In Russ.)
- [15] Zelentsov B.P. Correlations between states and events in the simulation of dependability using Markov processes. *Naděžnost'* = Dependability. 2022; 22(1):38-43. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.21683/1729-2646-2022-22-1-38-43>
- [16] Petrovsky E.A., Gagina M.V. *Primenenie metodov markovskikh processov dlya modelirovaniya nadezhnosti i riska oborudovaniya neftegazovogo kompleksa* [Application of Markov Process Methods for Reliability and Risk Modeling of Oil and Gas Complex Equipment]. *Nadezhnost' i kachestvo*. 2015; 2:312-313. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23907640> (accessed 19.05.2022). (In Russ.)
- [17] Shcheglov K.A., Shcheglov A.Yu. *Korrektnost' markovskikh modelej s diskretnymi sostoyaniyami i nepreryvnym vremenem* [Correctness of Markov models with discrete states and continuous time]. *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij. Priborostroenie* = Journal of Instrument Engineering. 2019; 62(1):40-49. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.17586/0021-3454-2019-62-1-40-49>
- [18] Koruba Z., Krzysztofik I. An algorithm for selecting optimal controls to determine the estimators of the coefficients of a mathematical model for the dynamics of a self-propelled anti-aircraft missile system. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part K: Journal of Multi-body Dynamics*. 2013; 227(1):12-16. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1177/1464419312455967>
- [19] Casar J., Farlik J. The Possibilities and Usage of Missile Path Mathematical Modelling for the Utilization in Future Autonomous Air Defense Systems Simulators. In: Mazal J., Fagiolini A., Vasik P. (eds.) *Modelling and Simulation for Autonomous Systems. MESAS 2019. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 11995. Springer, Cham; 2020. p. 253-261. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-43890-6_20
- [20] Guo B.-B., An T.-Y., Sun Y.-T. Research on Simulation Design of Air Force Campaign Process Deduction System. *The Frontiers of Society, Science and Technology*. 2019; 1(8):51-56. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.25236/FSST.2019.010809>
- [21] Cui Z., Kirkby J.L., Nguyen D. A general framework for time-changed Markov processes and applications. *European Journal of Operational Research*. 2019; 273(2):785-800. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2018.08.033>
- [22] Cui Z., Kirkby J.L., Nguyen D. Continuous-Time Markov Chain and Regime Switching Approximations with Applications to Options Pricing. In: Yin G., Zhang Q. (eds.) *Modeling, Stochastic Control, Optimization, and Applications. The IMA Volumes in Mathematics and its Applications*. Vol. 164. Springer, Cham; 2019. p. 115-146. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-25498-8_6
- [23] Qi W., Zong G., Zheng W. X. Adaptive Event-Triggered SMC for Stochastic Switching Systems With Semi-Markov Process and Application to Boost Converter Circuit Model. *IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers*. 2020; 68(2):786-796. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/TCSI.2020.3036847>
- [24] Defourny B., Moazeni S. Implied Markov transition matrices under structural price models. *Quantitative Finance*. 2021; 21(11):1935-1954. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1080/14697688.2021.1921242>



- [25] Hartich D., Godec A. Interlacing relaxation and first-passage phenomena in reversible discrete and continuous space Markovian dynamics. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*. 2019; 2019(2):024002. (In Eng.) doi: <https://dx.doi.org/10.1088/1742-5468/aaf716>

Submitted 19.05.2022; approved after reviewing 10.07.2022; accepted for publication 15.07.2022.

About the authors:

Vladimir R. Kristalinskii, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Faculty of Physics and Mathematics, Smolensk State University (4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation), Cand.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1205-990X>**, kristvr@rambler.ru

Pavel L. Luticas, Research Associate, Russian Federation Armed Forces Army Air Defence Military Academy named after Marshal of the Soviet Union A. M. Vasilevsky (2 Kotovsky St., Smolensk 214027, Russian Federation), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9858-8396>**, plytikas@mail.ru

Evgenyi I. Pachomov, Professor of the Chair of Natural Sciences, Russian Federation Armed Forces Army Air Defence Military Academy named after Marshal of the Soviet Union A. M. Vasilevsky (2 Kotovsky St., Smolensk 214027, Russian Federation), Dr.Sci. (Tech.), Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6968-2490>**, planeta-registr.com@rambler.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

