

УДК 517.977.5

DOI: 10.25559/SITITO.18.202202.279-286

Научная статья

## Синтез оптимального управления в задаче регулирования степени загрязнения озера

И. Ву

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Адрес: 199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9  
wuyilun310@gmail.com

### Аннотация

В работе исследуется задача оптимального управления степенью загрязнения озера отходами промышленного предприятия. Рассматривается математическая модель, представляющая процесс загрязнения озера с учетом изменения скорости его самоочистки как функции времени. При этом указанная функция принимается кусочно-постоянной, а переключения между ее двумя возможными значениями происходят периодически, что отражает сезонные колебания скорости самоочистки озера. Формулируется задача оптимального управления по отношению к заданному функционалу качества, характеризующему прибыль предприятия. Для решения поставленной задачи применяется принцип максимума Понтрягина. Получены аналитические выражения для оптимальных траекторий переменной состояния и сопряженной переменной, проведен качественный анализ полученных решений. Введено понятие природо-устойчивого решения и показано, что такое решение дает оптимальный возможный компромисс между прибылью предприятия и штрафами за загрязнение озера. Выполнено сравнение полученного оптимального решения с так называемым «близоруким» решением, то есть решением, жадно преследующим мгновенную прибыль. Показано, что «близорукое» решение может увеличить краткосрочную прибыль за счет ухудшения состояния окружающей среды, но в долгосрочной перспективе оно не только приносит худший результат по сравнению с природо-устойчивым решением, но и наносит непоправимый вред окружающей среде, который можно нейтрализовать только ценой полной остановки производства на длительный период времени. В результате проведенного исследования предлагается новое смешанное решение, которое сочетает в себе преимущества обеих стратегий и является более эффективным для практического применения. Полученные в работе результаты иллюстрируются примерами численного моделирования при различных значениях параметров системы.

**Ключевые слова:** управление степенью загрязнения, переключения, оптимальное управление, предельный цикл, принцип максимума Понтрягина, численное моделирование

*Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

**Для цитирования:** Ву И. Синтез оптимального управления в задаче регулирования степени загрязнения озера // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 2. С. 279-286. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.279-286>

© Ву И., 2022



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Synthesis of Optimal Control in the Problem of Regulating the Degree of Lake Pollution

Y. Wu

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation  
Address: 7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation  
wuyilun310@gmail.com

### Abstract

This paper studies the problem of optimal control of the degree of lake pollution by the pollutants of an industrial plant. A mathematical model is considered that represents the process of lake pollution, taking into account the change in its self-cleaning rate as a function of time. This function is assumed to be piecewise constant and switches between its two possible values periodically, that reflects seasonal fluctuations in the rate of self-cleaning of the lake. An optimal control problem is formulated with respect to a given quality functional characterizing the profit of the plant. To solve this problem, the Pontryagin's maximum principle is applied. Analytical expressions for the optimal trajectories of the state variable and the adjoint variable are obtained, a qualitative analysis of the obtained solutions is carried out. The concept of environmentally sustainable solution is introduced, and it is shown that such a solution gives the best possible trade-off between the profit of the plant and penalties for lake pollution. The obtained optimal solution is compared with the so-called "myopic" solution, that is, a solution greedily pursuing instantaneous profit. It is shown that the "myopic" solution can increase short-term profits due to environmental degradation, but in the long term it not only brings worse results compared to the environmentally sustainable solution, but also causes irreparable harm to the environment, which can only be neutralized at the cost of complete shutdown of production for an extended period of time. As a result of the work, a new mixed solution is proposed that combines the advantages of both strategies and is more effective for practical use. The results obtained in this paper are illustrated by examples of numerical simulation for various values of the system parameters.

**Keywords:** pollution control, switches, optimal control, limit cycle, Pontryagin's maximum principle, numerical simulation

*The author declares no conflict of interest.*

**For citation:** Wu Y. Synthesis of Optimal Control in the Problem of Regulating the Degree of Lake Pollution. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022; 18(2):279-286. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.279-286>



## Введение

Среди многих математических моделей, описывающих сложный характер процессов, возникающих в экологических системах, важную роль играет модель управления выбросами загрязняющих веществ<sup>1</sup> [1]-[9]. В современных условиях с учетом необходимости снижения негативного воздействия на окружающую среду промышленному предприятию (заводу) необходимо регулировать производственные стратегии, в том числе скорость выброса загрязняющих веществ, для сбережения природных ресурсов и получения оптимальной прибыли. Актуальность темы исследования определяется ее направленностью на обеспечение компромисса между получением прибыли предприятия и уменьшением загрязнения окружающей среды в классе гибридных динамических систем с (потенциально) бесконечными переключателями режимов<sup>2</sup> [10, 11].

В работах [12], [14] был явно найден гибридный предельный цикл (ГПЦ) как решение гибридной задачи оптимального управления. В [13] изучены циклические линейно-гибридные системы и доказано существование ГПЦ, но не исследуется его оптимальность. В публикациях [20]-[23] выполнены исследования для определения оптимальной производственной стратегии и механизмов экологического регулирования для снижения вредных выбросов.

В данной работе рассматривается дискретная гибридная задача оптимального управления потоками загрязнения промышленного предприятия с переключениями во времени [15]-[17]. При этом принимается базовое предположение о том, что регенеративная способность окружающей среды изменяется во времени [18, 19]. Предложена новая концепция природо-устойчивого [24] (environmentally sustainable) решения, то есть решения с учетом сохранения ресурсов окружающей среды и разумного ограничения производственной прибыли. Синтез закона управления выполняется на основе принципа максимума Понтрягина. Важность этого результата заключается в том, что он позволяет выделить класс решений, обеспечивающих компромисс между получением прибыли и уменьшением загрязнения окружающей среды.

Для сравнения формируется «близорукое» решение, в котором производственная стратегия состоит в том, чтобы максимально наращивать мгновенную прибыль, не допуская ее отрицательных значений. В рамках этой стратегии краткосрочная прибыль увеличивается за счет ухудшения состояния окружающей среды, но в долгосрочной перспективе это приводит как к критически загрязненной окружающей среде, так и к отрицательному потоку прибыли. Объединив преимущества обеих стратегий, в работе построена новая смешанная стратегия.

Полученные результаты иллюстрируются примерами численного моделирования при различных значениях параметров

системы в среде MATLAB. Сравнивая различные решения, показывается, что смешанное решение является единственным решением, которое максимизирует прибыль и является экологически устойчивым. Рассмотренная задача имеет огромную практическую важность, особенно в применении к объектам, в которых скорость протекания природных процессов сильно изменяется во времени.

## Постановка задачи и оптимальное управление

Рассмотрим модель управления выбросами загрязняющих веществ [25]. Для простоты зададим только один источник загрязнения (завод), в процессе работы которого происходит сброс загрязняющих веществ в близлежащие озера. Динамика потока загрязнения определяется линейным дифференциальным уравнением:

$$\dot{z} = \xi v - \delta z, \quad z(0) = z_0, \quad (1)$$

где  $z$  – уровень загрязнения в стационарном природном водоеме (например, озере),  $v$  – скорость выброса потока загрязнения,  $\xi \in (0,1)$  – доля выбрасываемого загрязняющего вещества, которое накапливается в водоеме,  $\delta > 0$  – скорость самоочищения, то есть у водоема (озера) есть способность самого себя очищать. Таким образом, уравнение (1) показывает, что уровень загрязнения в озере увеличивается из-за выброса загрязняющих веществ и в то же время уменьшается за счет способности озера к самоочищению.

Введем функцию прибыли завода:

$$P(v) = av(b - v/2), \quad (2)$$

где  $b$  – максимальная допустимая скорость выбросов. В то время как выражение  $v(b - v/2)$  описывает скорость производства, коэффициент  $a \geq 0$  используется для преобразования потока производства в поток прибыли. При этом расходы завода равны  $qz(t)$ , где  $q$  – положительная константа, соответствующая штрафам, которые должен нести завод, например эконалог, очистка озера, установка фильтров и т.д.

Выполним нормировку уравнения (1) путем введения новых переменных состояния и управления:

$$u(t) = \frac{1}{b}v(t), \quad x(t) = \frac{a}{ab^2}z(t). \quad (3)$$

С учетом (3) уравнение (1) примет вид

$$\dot{x} = \beta u - \delta x, \quad x(0) = x_0, \quad (4)$$

где  $\beta = \frac{\xi a}{ab} > 0$  – отношение штрафной составляющей  $\xi q$  к производственной составляющей  $ab$ . Заметим, что состояние  $x(t)$  неотрицательно, а управление  $u(t) \in [0,1]$  для всех  $t \geq 0$ .

<sup>1</sup> Геворкян С. А., Шахназарян Б. А. Экономическая оценка окружающей природной среды, биосферы и экологической безопасности // Материалы XIII международного симпозиума проблемы экоиформатики: Доклады Московского научно-технического общества радиотехники, электроники и связи имени А.С. Попова, Москва, 04-06 декабря 2018 года / Под ред. Ф. А. Мкртчяна Ф.А. М.: Московское НТО радиотехники, электроники и связи им. А.С. Попова, 2018. С. 266-270. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=36988167> (дата обращения: 23.05.2022).

<sup>2</sup> Хрящев С. М. Оценивание времени управления непрерывными динамическими полисистемами с переключениями управлений в дискретные моменты времени // Устойчивость и процессы управления: Материалы III между. конф. Санкт-Петербург, 05-09 октября 2015 года. Санкт-Петербург: Изд. дом Федоровой Г.В., 2015. С. 101-102. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=24553950> (дата обращения: 23.05.2022).



Введем функционал выигрыша, который определяется как дисконтированная чистая прибыль  $L(v, z) = P(v) - qz = ab^2 \left( u \left( 1 - \frac{1}{2}u \right) - x \right)$  на бесконечном горизонте по времени. С учетом введенных обозначений получим:

$$J(u) = \int_0^{\infty} e^{-rt} \left[ u(t) \left( 1 - \frac{1}{2}u(t) \right) - x(t) \right] dt, \quad (5)$$

где  $r > 0$  – ставка дисконтирования,  $e^{-rt}$  – предотвращение расхождения целевого функционала с течением времени, В экологических системах скорость самоочистки является не постоянной, а изменяется, например при смене сезона года. На основе этого в данной работе вводится ключевое предположение, которое состоит в том, что скорость самоочистки  $\delta$  задается как функция времени. Для этого интервал времени  $H = [0, \infty)$  разбивается на бесконечное число равных интервалов длины  $T$ , причем каждый из этих интервалов делится на две части:  $[k, k + \alpha)T$  и  $[k + \alpha, k + 1)T$ , где  $\alpha \in (0, 1)$  и  $k \in \mathbb{N}_0$ . Первый временной подинтервал соответствует нахождению системы в первом режиме  $\delta = \delta_1 \geq 0$ , а второй временной подинтервал – нахождению системы во втором режиме  $\delta = \delta_2 \geq 0$ . Это предположение математически выражается следующим образом:

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_1 \geq 0, & t \in [kT, kT + \alpha T), \\ \delta_2 \geq 0, & t \in [kT + \alpha T, (k + 1)T). \end{cases} \quad (6)$$

Используя принцип максимума Понтрягина, на основе (4) и (5) запишем функцию Гамильтона для каждого подинтервала (6), где коэффициент  $\delta$  принимает постоянное значение:

$$H(x, \lambda, t) = u(t) \left( 1 - \frac{1}{2}u(t) \right) - x(t) + \lambda(t)(\beta u(t) - \delta x(t)). \quad (7)$$

Здесь  $\lambda(t)$  – сопряженная переменная. С учетом (7) запишем уравнения канонической системы:

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = \beta u - \delta x,$$

$$\dot{\lambda} = r\lambda - \frac{\partial H}{\partial x} = (r + \delta)\lambda + 1. \quad (8)$$

Тогда, в результате решения задачи синтеза оптимального управления на основе принципа максимума Понтрягина для функции переключений (6) получим оптимальное управление следующего вида:

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \lambda(t) < -1/\beta \\ 1 + \beta\lambda, & \lambda(t) \in [-1/\beta, 0], \\ 1, & \lambda(t) > 0. \end{cases} \quad (9)$$

Целью управления является достижение компромисса между максимизацией прибыли и одновременной уплатой штрафов (эконалогов) за ухудшение состояния окружающей среды. При этом важно определить оптимальную стратегию, чтобы управление было экологически устойчивым.

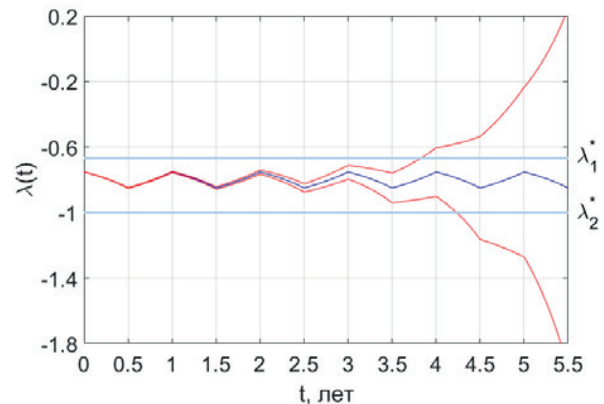
**Определение.** *Оптимальное управление  $u^*(t)$  называется природо-устойчивым, если оно не принимает граничные значения, кроме как в изолированные периоды времени, то есть  $\lambda(t) \in [-1/\beta, 0], \forall t \geq 0$ .*

Мотивация введения такого понятия заключается в следующем. Два граничных значения интерпретируются так. Когда убытки компании из-за эконалога превышают прибыль от производства, компания должна остановить производство, чтобы естественным образом снизить уровень загрязнения в озере и уменьшить эконалог. Когда уровень загрязнения достаточно низок, компания может производить с

максимальной скоростью, не неся при этом высокого экологического налога. Для природо-устойчивой стратегии эти две ситуации могут произойти только в отдельные периоды времени. И каждая из этих двух ситуаций не может длиться долго, потому что они неприемлемы с точки зрения прибыли компании или защиты окружающей среды.

**Лемма.** При  $\lambda(0) = \lambda(T)$  решение  $\lambda(t)$  уравнения (8) является гибридным предельным циклом, причем  $\lambda(t) \in \left[ \min\left(-\frac{1}{\delta_1 + r}, -\frac{1}{\delta_2 + r}\right), \max\left(-\frac{1}{\delta_1 + r}, -\frac{1}{\delta_2 + r}\right) \right]$ .

На рис. 1 показана динамика сопряженной переменной  $\lambda(t)$  при различных начальных условиях. При этом значения параметров в уравнениях (5), (6) и (8) равны:  $\delta_1 = 1.47$ ,  $\delta_2 = 0.97$ ,  $T = 1$ ,  $r = 0.03$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Синяя кривая на рисунке показывает периодическое решение, соответствующее начальному условию  $\lambda(0) = \lambda(T)$ . При этом величина сопряженной переменной изменяется в пределах интервала  $[\lambda_2^*, \lambda_1^*]$ , где  $\lambda_i^* = -\frac{1}{\delta_i + r}$ ,  $i = 1, 2$  – положения равновесия для каждого режима. На рисунке положения равновесия показаны горизонтальными линиями. Красные линии обозначают решения, для которых начальные значения  $\lambda(0) \neq \lambda(T)$ . Все такие решения стремятся к бесконечности с ростом времени, то есть предельный цикл является неустойчивым.

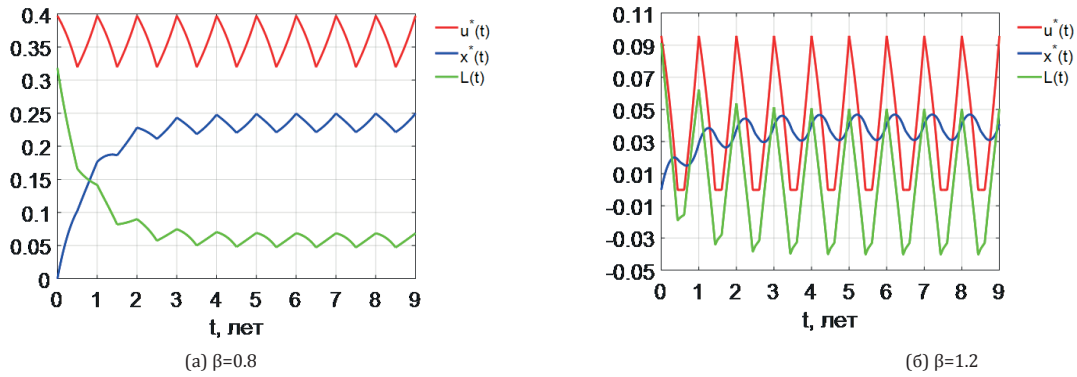


Р и с.1. Динамика сопряженной переменной при различных начальных условиях

Fig.1. Dynamics of the Adjoint Variable under Different Initial Conditions

На рис. 2 показаны уровень загрязнения  $x(t)$ , оптимальное управление  $u^*(t)$  и прибыль  $L(t)$ , соответствующие предельному циклу по переменной  $\lambda(t)$  при различных значениях параметра  $\beta$ . На рис. 2а показаны графики, соответствующие значению  $\beta = 0.8$ . Из рисунка видно, что управление и мгновенная прибыль всегда положительны, поэтому производство не останавливается, а накопленная прибыль увеличивается. При этом уровень загрязнения после первоначального роста стремится к устойчивому циклу. На рис. 2б показаны результаты для значения  $\beta = 1.2$ . На рисунке важно отметить периоды остановки производства ( $u(t) = 0$ ). В эти периоды мгновенная прибыль является отрицательной. Однако отметим, что в этом случае уровень загрязнения окружающей среды в установившемся режиме ниже, чем для случая  $\beta = 0.8$ , из-за того, что здесь имеет место более строгое экологическое регулирование.





Р и с. 2. Результаты решения задачи оптимального управления  
 Fig. 2. Results of Solving the Optimal Control Problem

### «Близорукое» решение и смешное решение

С целью продемонстрировать долгосрочное преимущество природо-устойчивого решения, выполним сравнение с иной стратегией, которую будем называть «близорукой». Эта стратегия основана на природо-устойчивой стратегии, однако в этом случае будем считать, что предприятие фокусируется только на мгновенной прибыли и не приемлет отрицательной мгновенной прибыли, то есть в каждый фиксированный момент времени должно выполняться условие  $L(t) \geq 0$ . Тогда, с учетом приведенного ранее выражения для чистой прибыли, получаем следующее условие, которому должно удовлетворять управление

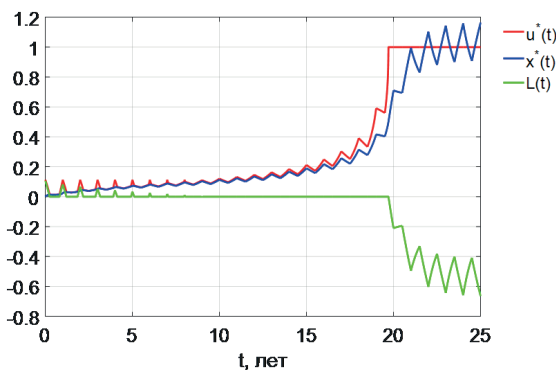
$$u(t) \in [1 - \sqrt{1 - 2x}, 1]. \tag{10}$$

Заметим, что если  $x > 1/2$ , то прибыль предприятия становится отрицательной и оно стремится как можно быстрее это компенсировать, наращивая

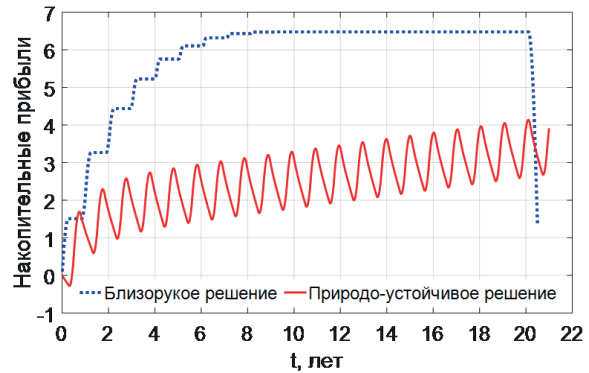
производительность. С учетом выражений (9) и ограничения (10), модифицируя природо-устойчивое управление, получаем следующую «близорукую» стратегию управления:

$$\tilde{u}^*(t) := \begin{cases} 1 - \sqrt{1 - 2x}, & -\beta\lambda(t) \geq \sqrt{1 - 2x} \text{ и } x \leq \frac{1}{2}, \\ 1, & \lambda(t) > 0 \text{ или } x > \frac{1}{2}, \\ 1 + \beta\lambda(t), & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{11}$$

Решение, соответствующее управлению (11), показано на рис. За для значения  $\beta = 1$ . Из рисунка видно, что при  $x > 1/2$  производственная прибыль  $u(1 - u/2)$  не может компенсировать эконалог  $(-x)$  и предприятие должно работать с максимальной производительностью ( $u = 1$ ), чтобы свести к минимуму потери из-за ухудшения состояния окружающей среды. При этом мгновенная прибыль в определенный момент становится отрицательной и количество загрязнений в озере резко увеличивается, что приводит к серьезному загрязнению окружающей среды и экономическим потерям.



(а) «Близорукое» решение



(б) Сравнение функций накопительной прибыли двух стратегии ( $\beta=1$ )

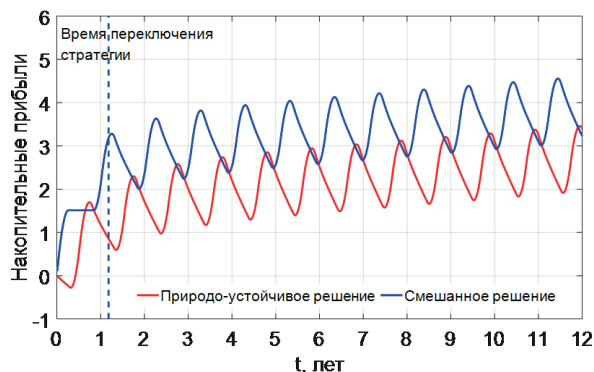
Р и с. 3. «Близорукое» решение (а) и сравнение функций накопительной прибыли двух стратегии (б)  
 Fig. 3. "Short-Sighted" Solution (a) and Comparison of the Functions of the Cumulative Profit of Two Strategies (b)



Покажем накопительную прибыль по обеим рассмотренным стратегиям (9) и (11), чтобы продемонстрировать долгосрочный эффект от выбора «близорукой» стратегии. Соответствующие кривые показаны на рис. 3б. Из рисунка видно, что на начальном этапе накопительная прибыль «близорукого» решения доминирует над природо-устойчивым, но ценой ухудшения состояния окружающей среды. Однако в определенный момент это приводит к критическому уровню загрязнения, при котором производство должно быть выведено на максимальный уровень, чтобы компенсировать высокий эконалог. В результате это приводит к еще большему загрязнению окружающей среды и резкому уменьшению накопительной прибыли. Таким образом, в долгосрочной перспективе природо-устойчивое решение обеспечивает более высокую отдачу за счет консервативного использования ресурсов окружающей среды, но в краткосрочной перспективе рост накопительной прибыли для нее будет более медленным. В отличие от нее «близорукая» стратегия гарантирует резкое увеличение накопительной прибыли в краткосрочной перспективе.

Учитывая отмеченные преимущества и недостатки обеих стратегий, построим улучшенную смешанную стратегию. В этой новой стратегии сначала применяется «близорукая» стратегия на коротком интервале времени с целью получить как можно более быстрый рост прибыли. Затем в определенный момент времени происходит переключение стратегии управления на природо-устойчивое решение. В качестве момента переключения предлагается выбирать тот момент, когда достигает своего максимального значения для периодического решения, в данном случае это лет. Возможно, существует и другой лучший способ выбора момента переключения и исследованию этого вопроса будет уделено отдельное внимание в будущей работе. Введенная смешанная стратегия подобна спринтеру, который сначала быстро бежит на старте, а затем рационально распределяет свою физическую силу, чтобы сохранить лидерство на протяжении всей дистанции.

На рис. 4 синей линией показана накопительная прибыль для смешанного решения, которая значительно превосходит накопительную прибыль для природо-устойчивого решения в большинстве периодов времени. Построенное смешанное решение без сомнения является более эффективным для практического применения и требует проведения дальнейших исследований, чтобы более детально изучить вопрос о настройке параметров этого метода.



Р и с. 4. Накопительные прибыли смешанного решения и природо-устойчивого решения

Fig. 4. Cumulative Benefits of a Mixed Solution and a Sustainable Solution

## Заключение

В данной работе рассмотрена задача оптимального управления потоком выброса загрязняющих веществ промышленным предприятием. На основе предположения о сезонных колебаниях регенеративной способности окружающей среды и используя принцип максимума Понтрягина, получено единственное оптимальное решение в виде гибридного предельного цикла. С целью показать преимущества этой стратегии также была рассмотрена «близорукая» стратегия управления. В результате сравнения природо-устойчивого и «близорукого» решения было показано, что в краткосрочной перспективе близорукое решение обеспечивает лучшую прибыль, но за счет ухудшения состояния окружающей среды. Однако в долгосрочной перспективе природо-устойчивое решение обеспечивает более высокую прибыль за счет более консервативного использования ресурсов окружающей среды. Объединяя преимущества обоих решений, сформировано смешанное решение, в котором накопительная прибыль растет быстрее в краткосрочной перспективе и значительно доминирует над природо-устойчивым решением в большинстве периодов времени в долгосрочной перспективе. В результате проведенных исследований приходим к выводу, что смешанное решение является единственным решением, которое максимизирует прибыль и является экологически приемлемым в течение длительного периода планирования.

## References

- [1] De Zeeuw A., Zemel A. Regime shifts and uncertainty in pollution control. *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2012; 36(7):939-950. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2012.01.006>
- [2] Griggs D., Stafford-Smith M., Gaffney O., Rockström J., Ohman M.C., Shyamsundar P., et al. Sustainable development goals for people and planet. *Nature*. 2013; 495(7441):305-307. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1038/495305a>
- [3] Masui T. Policy evaluations under environmental constraints using a computable general equilibrium model. *European Journal of Operational Research*. 2005; 166(3):843-855. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2004.07.002>
- [4] Bull K.R. The critical loads/levels approach to gaseous pollutant emission control. *Environmental Pollution*. 1991; 69(2-3):105-123. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1016/0269-7491\(91\)90137-L](https://doi.org/10.1016/0269-7491(91)90137-L)
- [5] Chervinski A. Ecological Evaluation of Economic Evaluation of Environmental Quality. *Procedia Economics and Finance*. 2014; 8:150-156. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1016/S2212-5671\(14\)00075-6](https://doi.org/10.1016/S2212-5671(14)00075-6)



- [6] Lu X., Zhang S., Xing J., et al. Progress of Air Pollution Control in China and Its Challenges and Opportunities in the Ecological Civilization Era. *Engineering*. 2020; 6(12):1423-1431. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.eng.2020.03.014>
- [7] Hakanson L. An ecological risk index for aquatic pollution control. A sedimentological approach. *Water Research*. 1980; 14(8):975-1001. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1016/0043-1354\(80\)90143-8](https://doi.org/10.1016/0043-1354(80)90143-8)
- [8] Wu M., Tang X., Li Q., et al. Review of Ecological Engineering Solutions for Rural Non-Point Source Water Pollution Control in Hubei Province, China. *Water, Air, & Soil Pollution*. 2013; 224(5):1-18. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/s11270-013-1561-x>
- [9] Ni Z., Wu X., Li L., et al. Pollution control and *in situ* bioremediation for lake aquaculture using an ecological dam. *Journal of Cleaner Production*. 2018; 172:2256-2265. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2017.11.185>
- [10] Caines P.E., Egerstedt M., Malhame R., Schoellig A. A Hybrid Bellman Equation for Bimodal Systems. In: Bemporad A., Bicchi A., Buttazzo G. (eds.) *Hybrid Systems: Computation and Control. HSCC 2007. Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 4416. Springer, Berlin, Heidelberg; 2007. p. 656-659. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-540-71493-4\\_54](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71493-4_54)
- [11] Barseghyan V.R. On the Condition of Complete Controllability of Stage-by-Stage Changing Linear Dynamic Systems with Varying Dimension of the Control Vector. *2020 15th International Conference on Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (STAB)*. IEEE Computer Society, Moscow, Russia; 2020. p. 1-4. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/STAB49150.2020.9140703>
- [12] Gromov D., Bondarev A., Gromova E. On periodic solution to control problem with time-driven switching. *Optimization Letters*. 2022; 16(7):2019-2031. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/s11590-021-01749-6>
- [13] Savkin A.V., Matveev A.S. Qualitative analysis of differential automata: existence and stability of limit cycles. *1999 Information, Decision and Control. Data and Information Fusion Symposium, Signal Processing and Communications Symposium and Decision and Control Symposium. Proceedings (Cat. No.99EX251)*. IEEE Computer Society, Adelaide, SA, Australia; 1999. p. 265-270. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1109/IDC.1999.754168>
- [14] Bondarev A., Gromov D. On the Structure and Regularity of Optimal Solutions in a Differential Game with Regime Switching and Spillovers. In: Haunschmied J.L., Kovacevic R.M., Semmler W., Veliov V.M. (eds.) *Dynamic Economic Problems with Regime Switches. Dynamic Modeling and Econometrics in Economics and Finance*. Vol. 25. Springer, Cham; 2021. p. 187-207. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-54576-5\\_8](https://doi.org/10.1007/978-3-030-54576-5_8)
- [15] Reddy P.V., Schumacher J.M., Engwerda J. Analysis of Optimal Control Problems for Hybrid Systems with One State Variable. *SIAM Journal on Control and Optimization*. 2020; 58(6):3262-3292. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1137/19M1272779>
- [16] Nkuiya B., Costello C. Pollution control under a possible future shift in environmental preferences. *Journal of Economic Behavior & Organization*. 2016; 132(B):193-205. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.jebo.2016.05.021>
- [17] Wu Y., Ye P. Investigation of optimal pollution control problem with regime shifts. *Control Processes and Stability*. 2022; 9(1):492-497. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48867653> (accessed 23.05.2022). (In Eng.)
- [18] Klamerus-Iwan A., Błońska E., Lasota J., Waligórski P., Kalandyk A. Seasonal variability of leaf water capacity and wettability under the influence of pollution in different city zones. *Atmospheric Pollution Research*. 2018; 9(3):455-463. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.apr.2017.11.006>
- [19] Wang H., Shi H., Li Y., Yu Y., Zhang J. Seasonal variations in leaf capturing of particulate matter, surface wettability and micromorphology in urban tree species. *Frontiers of Environmental Science & Engineering*. 2013; 7(4):579-588. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/s11783-013-0524-1>
- [20] Shortle J.S., Horan R.D. The Economics of Nonpoint Pollution Control. *Journal of Economic Surveys*. 2001; 15(3):255-289. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1111/1467-6419.00140>
- [21] Jouvét P.-A., Michel P., Rotillon G. Optimal growth with pollution: how to use pollution permits? *Journal of Economic Dynamics and Control*. 2005; 29(9):1597-1609. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.jedc.2004.09.004>
- [22] Arguedas C., Cabo F., Martín-Herrán G. Optimal Pollution Standards and Non-compliance in a Dynamic Framework. *Environmental and Resource Economics*. 2017; 68(3):537-567. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/s10640-016-0031-5>
- [23] Arguedas C., Cabo F., Martín-Herrán G. Enforcing regulatory standards in stock pollution problems. *Journal of Environmental Economics and Management*. 2020. 100:102297. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.jeem.2019.102297>
- [24] De Medeiros J.F., Ribeiro J.L.D., Cortimiglia M.N. Success factors for environmentally sustainable product innovation: a systematic literature review. *Journal of Cleaner Production*. 2014; 65:76-86. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.jclepro.2013.08.035>
- [25] Dockner E., Jørgensen S., Van Long N., Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.; 2000. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511805127>

Поступила 23.05.2022; одобрена после рецензирования 29.06.2022; принята к публикации 12.07.2022.  
Submitted 23.05.2022; approved after reviewing 29.06.2022; accepted for publication 12.07.2022.



**Об авторе:**

**Ву Ийлунь**, аспирант кафедры компьютерных технологий и систем, факультет прикладной математики – процессов управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5169-4864>, wuyilun310@gmail.com

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

**About the author:**

**Yilun Wu**, Postgraduate Student of the Chair of Computer Applications and Systems, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University (7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation), **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5169-4864>, wuyilun310@gmail.com

*The author has read and approved the final manuscript.*

