

Синтез многоцелевого цифрового закона управления маятником Фуруты

Н. В. Пак, М. В. Сотникова*

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Адрес: 199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9

* m.sotnikova@spbu.ru

Аннотация

В работе исследуется задача синтеза цифровой обратной связи, которая должна обеспечивать стабилизирующее управление маятником Фуруты для различных режимов функционирования. Выбор маятника Фуруты определяется тем, что он является нелинейной механической системой, имеющей неустойчивое положение равновесия, и широко используется в научной литературе в качестве тестового объекта для проверки различных алгоритмов управления. В качестве режимов функционирования маятника рассматриваются собственное движение, движение под воздействием ступенчатого возмущения и движение, вызванное возмущением колебательного характера. Для каждого из этих режимов предъявляются определенные требования к качеству функционирования системы управления в замкнутом контуре. Учитывая совокупность этих требований, поставленную задачу синтеза закона управления затруднительно решать в рамках классических методов. В связи с этим в работе предлагается иной подход, основывающийся на применении обратной связи с многоцелевой структурой, включающей базовый закон управления, асимптотический наблюдатель и динамический корректор. При этом в процессе синтеза поиска подлежат отдельные настраиваемые элементы этой структуры. Такой подход позволяет декомпозировать общую задачу синтеза закона управления на последовательность локальных подзадач, каждая из которых относится к одному из режимов функционирования объекта. В то же время на практике современные алгоритмы управления реализуются цифровыми вычислительными средствами, что подразумевает дискретность обрабатываемых потоков информации по времени. Поэтому в работе ставится задача синтеза цифрового регулятора маятником Фуруты. В результате проведенных исследований формализованы и решены задачи поиска настраиваемых элементов многоцелевой структуры цифрового закона управления, разработаны соответствующие вычислительные алгоритмы. Проведено численное моделирование процессов управления. Результаты экспериментов показали работоспособность и эффективность предложенного многоцелевого подхода.

Ключевые слова: многоцелевая структура, оптимизация, цифровое управление, синтез обратной связи, маятник Фуруты, численное моделирование

Финансирование: исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований в рамках научного проекта № 20-07-00531 «Разработка теоретических основ, практических методов и цифровых технологий для решения задач многоцелевого интеллектуального управления подвижными объектами».

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Пак Н. В., Сотникова М. В. Синтез многоцелевого цифрового закона управления маятником Фуруты // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 2. С. 263-269. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.263-269>

© Пак Н. В., Сотникова М. В., 2022



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Synthesis of a Multi-Purpose Digital Control Law for the Furuta Pendulum

N. V. Pak, M. V. Sotnikova*

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

Address: 7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation

* m.sotnikova@spbu.ru

Abstract

This paper investigates the problem of designing digital feedback, which should provide stabilizing control of the Furuta pendulum for various operating regimes. The Furuta pendulum is chosen because it is a non-linear mechanical system with an unstable equilibrium position, and it is widely used in the scientific literature as a test object in experiments with various control algorithms. The regimes of operation of the pendulum are considered as follows: its own motion, motion under the influence of a constant disturbance, and motion caused by an oscillatory disturbance. For each of these regimes a set of the specific requirements on the quality of control system functioning in a closed loop are imposed. Taking into account the set of these requirements, it is very difficult to solve the problem of control law synthesis within the framework of classical methods. In this regard, this paper proposes another approach, which is based on the use of feedback with a specialized multi-purpose structure, that include the basic control law, an asymptotic observer, and a dynamic corrector. The adjustable elements of this structure are subject to search during the control synthesis process. Such approach allows us to decompose the general problem of control law design into a sequence of local sub-problems, which relates to one of the regimes of object operation. At the same time, in practice, modern control algorithms are implemented by digital computers, that implies the discreteness of the processed information flows. Therefore, the paper considers the problem of synthesizing a digital controller for Furuta's pendulum. As a result of the research, the problems of searching the adjustable elements of the multi-purpose structure of the digital control law are formalized and solved, and the corresponding computational algorithms are developed. Numerical modeling of control processes has been carried out. The results of the experiments showed the efficiency and effectiveness of the proposed multi-purpose approach.

Keywords: Multi-purpose structure, optimization, digital control, feedback synthesis, Furuta pendulum, numerical simulation

Funding: The study was financially supported by the Russian Foundation for Basic Research within the framework of the scientific project No. 20-07-00531 "Development of Theoretical Foundations, Practical Methods and Digital Technologies for Solving Problems of Multi-Purpose Intelligent Control of Mobile Objects".

The authors declare no conflict of interest.

For citation: Pak N.V., Sotnikova M.V. Synthesis of a Multi-Purpose Digital Control Law for the Furuta Pendulum. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022; 18(2):263-269. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.263-269>



Введение

В научных исследованиях последних лет значительная роль отводится методам анализа и синтеза законов управления нелинейными системами. При этом, несмотря на существование отдельных подходов к решению задач стабилизации конкретных движений систем с учётом требований к качеству функционирования, универсального метода решения таких задач для широкого класса систем не существует¹ [1]-[5]. Таким образом, возникает необходимость в адаптации уже известных методов к конкретным объектам управления и требованиям, предъявляемым к качеству процессов в замкнутых системах.

При исследовании движений нелинейных систем наибольший интерес вызывают неустойчивые без управления положения равновесия. Их стабилизация является обязательным требованием, которое предъявляется к искомому алгоритму управления. Необходимо также учитывать реальные условия функционирования замкнутой системы, а именно внешние возмущения, влияющие на динамику процессов управления и их качество по отношению к заданным функционалам.

Найденный закон управления на практике реализуется цифровыми вычислительными средствами, что подразумевает дискретность обрабатываемых потоков информации по времени. Отсюда возникает задача синтеза цифрового регулятора для нелинейного динамического объекта² [6]-[9].

В качестве объекта управления в работе рассматривается маятник Фуруты, требующий особого подхода к построению стабилизирующей обратной связи. Маятник Фуруты является тестовым нелинейным объектом для исследования различных методов анализа и синтеза законов управления и широко используется в научной и учебной литературе³ [10]-[18].

В данной работе предлагается применить многоцелевой подход [19]-[25] к построению цифрового регулятора для нелинейной модели маятника Фуруты. Существо этого подхода изложено, например, в работах⁴ [21, 22]. Различные приложения этого подхода к задачам управления морскими подвижными объектами, в том числе с использованием компьютерного зрения, рассмотрены в работах^{5,6} [19]-[25]. Базовая идея этого подхода состоит в том, чтобы, используя специализированную многоцелевую структуру закона управления, включающую настраиваемые элементы, обеспечить требуемое качество функционирования замкнутой системы в различных режимах,

в том числе под воздействием постоянных внешних возмущений и возмущений колебательного характера.

В данной работе исследование направлено на решение задачи синтеза цифрового многоцелевого стабилизирующего закона управления для маятника Фуруты. Рассматривается формализованная постановка задачи, решается задача поиска настраиваемых элементов многоцелевой структуры. Рассматривается пример численного моделирования, иллюстрирующий полученные результаты.

Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель маятника Фуруты, которая представляется системой обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [6], [11]-[14]:

$$M_0(q)\ddot{q} + M_1(q, \dot{q})\dot{q} + M_2(q) = Tu, \quad (1)$$

где $q = (\alpha, \beta)^T$ – вектор обобщённых координат, α – угол поворота основания и β – угол отклонения маятника от верхнего вертикального положения, u – управляющий сигнал, являющийся напряжением, подаваемым на привод электромотора. Матрицы M_0, M_1, M_2, T определяются по формулам

$$M_0 = \begin{pmatrix} J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta & -m_1 L_0 l_1 \cos \beta \\ -m_1 L_0 l_1 \cos \beta & J_0 + m_1 l_1^2 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} C_0 + \frac{K_t K_b}{R_a} + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\beta} \sin^2 2\beta & m_1 L_0 l_1 \dot{\beta} \sin \beta + \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin^2 2\beta \\ -\frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\alpha} \sin^2 2\beta & C_1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -m_1 g l_1 \sin \beta \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} \frac{K_t K_b}{R_a} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

В приведенных выражениях используются следующие обозначения: J_0 и J_1 – моменты инерции платформы и маятника, C_0 и C_1 – коэффициенты сухого трения, L_0 – длина основания, l_1 – длина маятника, m_1 – масса маятника, K_t, K_b, K_u, R_a – коэффициенты электромотора.

¹ Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб.: Лань, 2013. 448 с.; Веремей Е. И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2016. 408 с.; Maciejowski J. M. Predictive Control with Constraints. London: Prentice Hall, 2000. 256 p.; Khalil H. K. Nonlinear Systems. Third edition. Pearson, 2001. 768 p.

² Александров А. Ю., Жабко А. П. Устойчивость движений дискретных динамических систем. СПб.: Науч.-исслед. ин-т химии С.-Петерб. ун-та, 2003. 112 с.; Веремей Е. И., Сотникова М. В. Управление с прогнозирующими моделями. Воронеж: Научная книга, 2016. 214 с. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=26133362> (дата обращения: 18.04.2022).

³ Сотникова М. В. MPC-управление движением перевернутого маятника на вращающейся платформе // Системы управления и информационные технологии. 2014. № 1(55). С. 38-42. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21245288> (дата обращения: 18.04.2022); Arnolds B. M. Identification and control of the Rotary Inverted Pendulum. Technical Traineeship Report, University of Eindhoven, 2003. DCT report No: 2003.100. 60 p.; Chye T. K., Sang T. C. Rotary Inverted Pendulum. Technical Report, School of Electrical and Electronic Engineering Nanyang Technological University, 1999.; Пак Н. В. Управление маятником Фуруты с использованием обратной связи с многоцелевой структурой [Электронный ресурс] // Архив открытого доступа Санкт-Петербургского государственного университета. URL: <http://hdl.handle.net/11701/25985> (дата обращения: 18.04.2022); Пак Н. В. Многоцелевая цифровая стабилизация маятника Фуруты [Электронный ресурс] // Архив открытого доступа Санкт-Петербургского государственного университета. URL: <http://hdl.handle.net/11701/32255> (дата обращения: 18.04.2022).

⁴ Веремей Е. И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация. СПб: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 2016. 408 с.

⁵ Там же.

⁶ Сотникова М. В., Веремей Е. И. Разработка многоцелевых законов управления с использованием компьютерного зрения // Системы управления и информационные технологии. 2020. № 1(79). С. 14-19. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=42425708> (дата обращения: 18.04.2022).



Введём вспомогательные векторы $q_1 = q$ и $q_2 = \dot{q}$ и приведём систему (1) к нормальной форме, учитывая, что $\det(M_0) \neq 0$. В результате получим

$$\dot{q}_1 = q_2, \quad \dot{q}_2 = M_0^{-1}(q_1)(-M_1(q_1, q_2)q_2 - M_2(q_1) + Tu). \quad (3)$$

Итак, динамика маятника Фуруты представляется нелинейной системой дифференциальных уравнений (3) с вектором состояния $(q_1 \ q_2)^T = (\alpha \ \beta \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta})^T \in E^4$. Из двух вертикальных положений равновесия системы особый интерес представляет верхнее положение, являющееся неустойчивым:

$$\alpha_0 = \text{const}, \dot{\alpha}_0 = 0, \beta_0 = 0, \dot{\beta}_0 = 0. \quad (4)$$

Введём вектор состояния $x = (\alpha \ \beta \ \dot{\alpha} \ \dot{\beta})^T = (\omega_\alpha \ \omega_\beta \ \dot{\omega}_\alpha \ \dot{\omega}_\beta)^T$, где компоненты $\omega_\alpha, \omega_\beta$ представляют угловые скорости вращения платформы и маятника соответственно. Теперь воспользуемся методом линеаризации обратной связью [5] и перейдём к линейной модели маятника в пространстве состояний:

$$\dot{x} = Ax + b\tau, \quad y = Cx, \quad (5)$$

с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -g & c_1 & 0 \\ 0 & L_0 & m_1 L_0 l_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} J_0 + m_1 l_1^2 \\ m_1 L_0 l_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь в качестве управления выступает переменная τ . При этом для исходной нелинейной модели (3) управление u , поступающее непосредственно в систему, вычисляется по формуле:

$$u = \frac{1}{t_1 M_{012}} [-\det(M_0)\tau - M_{011}m_2 + C_{11}M_{012}\dot{\alpha} - C_{22}M_{011}\dot{\beta} + A_{12}M_{011}\dot{\alpha}^2 + B_{12}M_{012}\dot{\beta}^2 + (A_{12} + B_{11})M_{012}\dot{\alpha}\dot{\beta}], \quad (6)$$

где

$$M_{011} = J_0 + m_1 L_0^2 + m_1 l_1^2 \sin^2 \beta, \quad M_{012} = -m_1 L_0 l_1 \cos \beta,$$

$$A_{12} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \sin 2\beta, \quad B_{11} = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \sin 2\beta, \quad B_{12} = m_1 L_0 l_1 \sin \beta,$$

$$C_{11} = C_0 + \frac{K_t K_b}{R_a}, \quad C_{22} = C_1,$$

$$m_2 = \frac{K_t K_u}{R_a}, \quad t_1 = -m_1 g l_1 \sin \beta.$$

Выполним дискретизацию линейной модели (5). Воспользовавшись методом удержания нулевого порядка [7, 8], получаем следующую линейную систему разностных уравнений

$$A_d x[k] + b_d \tau, \quad y[k] = C_d x[k] \quad x[k+1] = \quad (7)$$

с матрицами

$$A_d = e^{A\Delta t}, \quad b_d = \left(\int_0^{\Delta t} e^{A(\Delta t-t)} dt \right) b, \quad C_d = C,$$

где Δt – шаг дискретизации.

Необходимо построить цифровое управление нелинейной системой (3) с использованием обратной связи с многоцелевой структурой [2, 19, 21, 22]. При этом целью управления ставится стабилизация верхнего неустойчивого положения маятника Фуруты. Искомый закон управления должен обеспечивать выполнение следующих требований для каждого из двух рассматриваемых режимов функционирования объекта.

1. При собственном движении, которое определяется ненулевым начальным отклонением от вертикали, маятник должен управлением возвращаться в нулевое положение равновесия. При этом необходимо учитывать требования к качеству переходных процессов: длительность, перерегулирование, колебательность [1]. Для указанного режима движения должна учитываться неполнота измеряемой датчиками информации о состоянии объекта. Здесь измеряются скорость вращения платформы и угол отклонения маятника от вертикали.
2. При движении под воздействием колебательных возмущений обратная связь должна удерживать систему в окрестности нулевого положения равновесия и подавлять колебания угла отклонения маятника от вертикальной оси. Этим обеспечивается наилучшая динамика объекта и предотвращается износ деталей системы.

При синтезе закона управления должны быть учтены следующие особенности:

1. Дискретизация по времени обрабатываемой информации. Она определяется дискретным характером измерений датчиками поступающего сигнала. Отсюда появляется необходимость синтеза цифрового управляющего сигнала.
2. Достижение описанных требований не должно приводить к использованию значительно больших энергетических ресурсов, чем при реализации управления, не учитывающего внешние возмущения.

Применяемый многоцелевой подход позволяет декомпозировать общую задачу синтеза на несколько локальных подзадач [2], решаемых последовательно. Каждая из них относится к конкретным режимам движения объекта. Решениями данных задач будут являться модели настраиваемых элементов, которые позволяют существенно повысить качество процессов управления.

Синтез многоцелевого цифрового алгоритма управления

Обратная связь с многоцелевой структурой, описанная в работах [2], [19]-[22], задаётся следующей системой разностных уравнений

$$z[n+1] = A_d z[n] + b_d \tau[n] + H_d (y[n] - C_d z[n]), \quad (8)$$

$$\tau[n] = K_d z[n] + \xi[n], \quad (9)$$

$$\xi[n] = F_d(\bar{z})(y[n] - C_d z[n]). \quad (10)$$

Первым элементом структуры является асимптотический наблюдатель (8), который предназначен для восстановления информации о векторе состояния системы по результатам измерений. Вторым элементом структуры служит для формирования управляющего сигнала (9), подаваемого на вход линейного объекта (7). Третий элемент – динамический фильтр (10), который должен обеспечивать желаемые динамические свойства замкнутой системы при функционировании в условиях воздействия внешних возмущений.



Здесь $z \in E^3$ и $\xi \in E^1$ – вектор состояния наблюдателя и выход фильтра соответственно, n – номер такта дискретного времени, \bar{z} – комплексная переменная Лорана [1], [7]-[8].

Основная задача синтеза многоцелевой структуры для рассматриваемого объекта состоит в нахождении постоянных матриц K_d, H_d формирователя управления и наблюдателя соответственно и передаточной матрицы $F_d(z)$ фильтра.

Декомпозируя поставленную общую задачу на три локальных, решаемых последовательно, получаем задачи, которые заключаются в следующем.

1. Первая задача – это выбор матрицы K_d для базового регулятора по состоянию

$$\tau_d[k] = K_d x[k]. \quad (11)$$

Матрицу K_d необходимо выбирать таким образом, чтобы нулевое положение равновесия замкнутой линейной системы (7), (11) было асимптотически устойчивым. При этом должны быть выполнены требования к качеству динамики переходного процесса, который определяется ненулевыми начальными условиями $x_0 = (0 \ \beta_0 \ 0)^T$.

2. Вторая задача состоит в выборе матрицы H_d наблюдателя (8). Начальные условия для наблюдателя (8) задаются нулевыми, а для объекта – аналогичными первой задаче. Матрица H_d выбирается так, чтобы гарантировать асимптотическую устойчивость нулевого положения равновесия замкнутой системы (7)–(9) при выключенном динамическом корректоре. Кроме того, должны выполняться все перечисленные выше требования, предъявляемые к качеству динамики переходного процесса для режима собственного движения объекта.

3. Третья задача заключается в выборе передаточной матрицы $F_d(\bar{z})$ фильтра. В данном случае при настройке все начальные условия задаются нулевыми, при этом вводится внешнее аддитивное возмущающее воздействие колебательного характера. Матрица $F_d(\bar{z})$ выбирается таким образом, чтобы компенсировать колебания маятника, которые характеризуются углом отклонения стержня от вертикали. Компенсация колебаний осуществляется с целью минимизации отклонений стержня от положения равновесия. Колебания управляющего сигнала τ_d и искомого управления u должны быть ограниченными в силу конечности ресурсов управления.

Результатом решения этих локальных задач является формирование дискретной обратной связи в виде (8) – (10), которая и подлежит непосредственной реализации для маятника Фуруты.

Рассмотрим решение трёх локальных подзадач по формированию отдельных элементов многоцелевой структуры управления для маятника Фуруты.

Первой из них является определение матрицы K_d дискретного формирователя (11). Будем рассматривать два возможных подхода к формированию обратной связи: модальный и линейно-квадратичный (LQR) регуляторы. Модальный регулятор для дискретной системы гарантирует выполнение тождества

$$\Delta_d(z) := \det(Ez - A_d - b_d K_d) \equiv (\bar{z} - \rho_1) \dots (\bar{z} - \rho_n), \quad |\rho_i| < 1, \quad i = \overline{1, n},$$

то есть доставляет полиному Δ_d замкнутой системы разностных уравнений желаемые значения собственных чисел внутри единичного круга.

Стабилизирующий LQR-регулятор обеспечивает минимум квадратичного функционала

$$J(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} (x[n]^T Q x[n] + \tau[n]^T R \tau[n] + 2x[n]^T N \tau[n]),$$

где $Q \geq 0, R > 0$ и $N \geq 0$ – заданные симметрические матрицы. Матрица коэффициентов K_d оптимального LQR-регулятора вычисляется по формуле

$$K_d = (b_d^T S b_d + R)^{-1} (b_d^T S A + N^T).$$

Здесь S – решение соответствующего уравнения Риккати в дискретном случае.

Выбор одного из предложенных регуляторов для построения базовой обратной связи (11) многоцелевого управления осуществляется на основании анализа динамики замкнутой цифровой системы.

Вторая задача – построение асимптотического наблюдателя. Здесь рассматривается обратная связь (8) – (10) при условии выключенного фильтра, то есть формируется регулятор

$$z[n+1] = A_d z[n] + b_d \tau[n] + H_d (y[n] - C_d z[n]),$$

$$\tau[n] = K_d z[n].$$

Матрица H_d наблюдателя выбирается из условия асимптотической устойчивости замкнутой системы (7), (11). Нетрудно показать, что это условие обеспечивается, если матрица $A_d - H_d C_d$ является шуровской. В данном случае матрица H_d находится с помощью модального подхода из условия

$$\det(E\bar{z} - A_d + H_d C_d) \equiv (\bar{z} - \rho_1) \cdot (\bar{z} - \rho_2) \cdot (\bar{z} - \rho_3), \quad |\rho_i| < 1, \quad i = \overline{1, 3},$$

где ρ_i – заданные комплексные числа внутри единичного круга.

Для решения третьей задачи необходимо найти передаточную матрицу динамического фильтра с математической моделью (10). Искомая передаточная матрица строится в общем виде

$$F_d(\bar{z}) \equiv D_d(\bar{z}) / \Phi_d(\bar{z}),$$

где D_d – полиномиальная матрица, а Φ_d – устойчивый полином. Необходимое и достаточное условие устойчивости замкнутой системы (7), (8) – (10) принимает вид: $|\bar{z}_i| < 1, \quad i = \overline{1, 3}$ для корней полинома Φ_d .

С учетом уравнений дискретной системы (7) матрица F_d имеет следующую структуру

$$F_d(\bar{z}) = \left[\frac{b_2 \bar{z}^2 + b_1 \bar{z}}{\bar{z}^3 + a_2 \bar{z}^2 + a_1 \bar{z} + a_0} \quad \frac{b_3 \bar{z}^2 + b_4 \bar{z}}{\bar{z}^3 + a_2 \bar{z}^2 + a_1 \bar{z} + a_0} \right],$$

где $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$ – подлежащие поиску параметры. При этом к дискретной передаточной матрице F_d предъявляются следующие требования:

1) требование астатизма замкнутой системы по отношению к постоянным возмущениям:

$$F_d(1) = 0; \quad (12)$$

2) частотное условие фильтрации возмущений

$$H_{d\beta}(F, e^{j\omega_0}) = 0, \quad (13)$$

где ω_0 – заданная частота, а $H_{d\beta}(F, \bar{z})$ – передаточная функция замкнутой линейной системы разностных уравнений

$$x[n+1] = A_d x[n] + b_d \tau[n] + l d[n],$$

$$y[n] = C_d x[n],$$

$$z[n+1] = A_d z[n] + b_d \tau[n] + H_d (y[n] - C_d z[n]),$$

$$\xi[n] = F_d(\bar{z})(y[n] - C_d z[n]), \quad \tau[n] = K_d z[n] + \xi[n],$$

от входа d к выходу β . Здесь d – внешнее возмущение. Решая систему уравнений (12), (13) относительно неизвестных параметров $a_0, a_1, a_2, b_1, b_2, b_3, b_4$ находим искомую передаточную функцию фильтра.



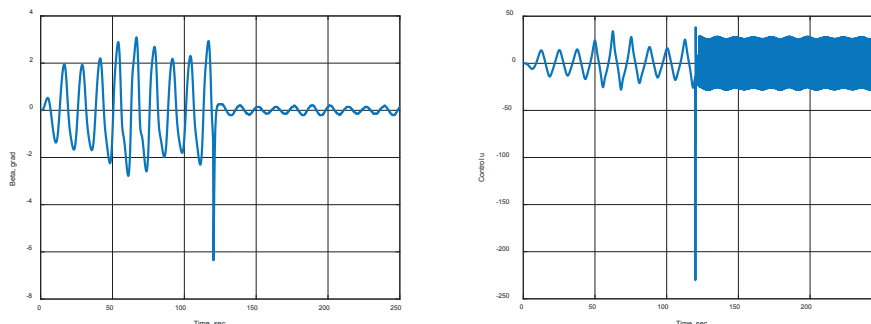
Пример

Примем параметры физического устройства, представленные в работе [6]. Построив многоцелевую структуру закона управления для маятника Фуруты и сделав практические вычисления, проведём эксперименты, моделируя движение объекта и анализируя результаты. Рассмотрим движение

маятника под воздействием внешних возмущений, при этом начальное отклонение маятника от вертикали считается нулевым. Внешнее возмущение зададим суммой трёх гармоник с разными частотами

$$d(t) = \sum_{i=1}^3 A_i \sin \omega_{0_i} t,$$

где $\omega_{0_1} = 0.4, \omega_{0_2} = 0.5, \omega_{0_3} = 0.6, A_1 = 0.008, A_2 = 0.05, A_3 = 0.005$.



Р и с. 1. Сравнение процессов по углу β и управлению u при сложных колебаниях для дискретного управления
F i g. 1. Comparison of processes by angle β and control u with complex oscillations for discrete control

Анализируя динамику процессов замкнутой системы с построенной цифровой многоцелевой структурой управления при включенном и выключенном цифровом фильтре, видим, что для данного режима движения маятника фильтр подавляет колебания по углу от до , а по управлению амплитуда колебаний остаётся примерно на том же уровне. В итоге можно сделать вывод, что в данном режиме функционирования построенный цифровой регулятор подавляет колебания маятника до небольших величин, хотя и увеличивает при этом затрачиваемые ресурсы на управление.

Заключение

В данной работе осуществлён синтез обратной связи для маятника Фуруты на множестве законов управления с многоцелевой структурой. При выборе ее элементов определяющую роль играли два режима движения системы: собственное движение и движение под действием возмущений колебательно-го характера. Выведены условия устойчивости, астатизма и фильтрации, которым должны удовлетворять настраиваемые элементы многоцелевой структуры. Полученные результаты проиллюстрированы практическим примером.

References

- [1] Allgöwer F, Zheng A. Nonlinear Model Predictive Control. *Progress in Systems and Control Theory*. Birkhäuser Basel; 2000. 472 p. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8407-5>
- [2] Kouvaritakis B, Cannon M. Model Predictive Control: Classical, Robust and Stochastic. Springer Cham; 2016. 384 p. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-24853-0>
- [3] Camacho E.F, Bordons C. Model Predictive Control. *Advanced Textbooks in Control and Signal Processing*. 2nd ed. London: Springer-Verlag; 2007. 405 p. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/978-0-85729-398-5>
- [4] Raković S.V, Levine W.S. (eds.) Handbook of Model Predictive Control. *Control Engineering*. Birkhäuser, Cham; 2019. 692 p. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-77489-3>
- [5] Sotnikova M. Ship Dynamics Control using Predictive Models. *IFAC Proceedings Volumes*. 2012; 45(27):250-255. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.3182/20120919-3-IT-2046.00043>
- [6] Sotnikova M.V, Veremey E.I. Dynamic Positioning Based on Nonlinear MPC. *IFAC Proceedings Volumes*. 2013; 46(33):37-42. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.3182/20130918-4-JP-3022.00058>
- [7] Donzellini G., Oneto L., Ponta D., Anguita D. Introduction to Digital Systems Design. Springer, Cham; 2019. 536 p. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-319-92804-3>
- [8] Landau I.D., Zito G. Digital Control Systems: Design, Identification and Implementation. *Communications and Control Engineering*. Springer-Verlag, London; 2006. 484 p. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1007/978-1-84628-056-6>
- [9] Aleksandrov A., Chen Y., Platonov A., Zhang L. Stability analysis and uniform ultimate boundedness control synthesis for a class of nonlinear switched difference systems. *Journal of Difference Equations and Applications*. 2012; 18(9):1545-1561. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1080/10236198.2011.581665>
- [10] Corriou J.P. Distillation Column Control. In: Corriou J.P. (ed.) *Process Control*. Springer, Cham; 2018. p. 793-819. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-61143-3_20



- [11] Veremey E.I. Synthesis of Multi-objective Control Laws for Ship Motion. *Gyroscope and Navigation*. 2010; 1(2):119-125. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1134/S2075108710020069>
- [12] Furuta K., Iwase M. Swing-up time analysis of pendulum. *Bulletin of the Polish Academy of Sciences: Technical Sciences*. 2004; 52(3):153-163. Available at: <https://journals.pan.pl/publication/128172/edition/111820/bulletin-of-the-polish-academy-of-sciences-technical-sciences-2004-vol-52-no-3-swing-up-time-analysis-of-pendulum-furuta-k-iwase-m?language=en> (accessed 18.04.2022). (In Eng.)
- [13] Åströma K.J., Furuta K. Swinging up a Pendulum by Energy Control. *Automatica*. 2000; 36(2):287-295. (In Eng.) doi: [https://doi.org/10.1016/S0005-1098\(99\)00140-5](https://doi.org/10.1016/S0005-1098(99)00140-5)
- [14] Diehl M., et al. Real-Time Optimization for Large Scale Processes: Nonlinear Model Predictive Control of a High Purity Distillation Column. In: Grötschel M., Krumke S.O., Rambau J. (eds.) *Online Optimization of Large Scale Systems*. Springer, Berlin, Heidelberg; 2001. p. 363-383. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-662-04331-8_20
- [15] Dones I., Manenti F., Preisig H.A., Buzzi-Ferraris G. Nonlinear Model Predictive Control: A Self-Adaptive Approach. *Industrial & Engineering Chemistry Research*. 2010; 49(10):4782-4791. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1021/ie901693w>
- [16] Elaiw A.M., Xia X., Shehata A.M. Application of model predictive control to optimal dynamic dispatch of generation with emission limitations. *Electric Power Systems Research*. 2012; 84(1):31-44. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2011.09.024>
- [17] Fradkov A.L., Tomchina O.P., Nagibina O.L. Swinging control of rotating pendulum. *Proc. of 3rd IEEE Mediterranean Control Conf.* Limassol; 1995. p. 347-351. (In Eng.)
- [18] Chang L., Piao S., Leng X., He Z., Zhu Z. Inverted pendulum model for turn-planning for biped robot. *Physical Communication*. 2020; 42:101168. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.phycom.2020.101168>
- [19] Veremey E.I. Separate Filtering Correction of Observer-Based Marine Positioning Control Laws. *International Journal of Control*. 2017; 90(8):1561-1575. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1080/00207179.2016.1214749>
- [20] Sotnikova M.V. Multi-purpose Control of a Moving Object Using Computer Vision Algorithms. In: Sukhomlin V., Zubareva E. (eds.) *Convergent Cognitive Information Technologies. Convergent 2018. Communications in Computer and Information Science*. Vol. 1140. Springer, Cham; 2020. p. 231-241. (In Eng.) doi: https://doi.org/10.1007/978-3-030-37436-5_21
- [21] Veremey E.I. Optimization of filtering correctors for autopilot control laws with special structures. *Optimal Control Applications and Methods*. 2016; 37(2):323-339. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1002/oca.2170>
- [22] Veremey E.I., Pogozhev S.V., Sotnikova M.V. Marine Autopilots' Multipurpose Control Laws Synthesis for Actuators Time Delay. *Journal of Marine Science and Engineering*. 2020; 8(7):477. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.3390/jmse8070477>
- [23] Sotnikova M. Plasma stabilization based on model predictive control. *International Journal of Modern Physics A*. 2009; 24(5):999-1008. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1142/S0217751X09044450>
- [24] Sotnikova M.V., Tomilova A.S. Algorithms for the Robust Properties Analysis of a Multi-Purpose Control Laws of Moving Objects. *Sovremennye informacionnye tehnologii i IT-obrazovanie = Modern Information Technologies and IT-Education*. 2018; 14(2):374-381. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201802.374-381>
- [25] Sotnikova M. Control System Design for Visual Positioning of a Ship Based on NMPC and Multi-objective Structure. *IFAC-PapersOnLine*. 2018; 51(32):445-450. (In Eng.) doi: <https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2018.11.425>

Поступила 18.04.2022; одобрена после рецензирования 21.05.2022; принята к публикации 07.06.2022.
Submitted 18.04.2022; approved after reviewing 21.05.2022; accepted for publication 07.06.2022.

Об авторах:

Пак Нелли Вадимовна, аспирант кафедры компьютерных технологий и систем, факультет прикладной математики – процессов управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0409-2697>, st049271@student.spbu.ru

Сотникова Маргарита Викторовна, заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем, факультет прикладной математики – процессов управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9), доктор физико-математических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0726-7448>, m.sotnikova@spbu.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the authors:

Nelli V. Pak, Postgraduate Student of the Chair of Computer Applications and Systems, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University (7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0409-2697>, st049271@student.spbu.ru

Margarita V. Sotnikova, Head of the Chair of Computer Applications and Systems, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University (7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation), Dr.Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0726-7448>, m.sotnikova@spbu.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

