

## Численный анализ на неравномерной сетке задачи о кратчайшей очереди для масштабируемой во времени системы массового обслуживания с малым параметром

А. М. Буатта, С. А. Васильев\*, С. К. Канзитдинов, Г. О. Царева

ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

\* vasilyev-sa@rudn.ru

### Аннотация

В этой работе мы используем численные методы с использованием неравномерной сетки Шишкина для анализа длин очередей масштабируемой во времени системы массового обслуживания  $M/M/n$  при  $n \rightarrow \infty$ , для которой имеется пуассоновский входящий поток заявок с интенсивностью  $n\lambda$  и временем обслуживания  $\tau = \mu^{-1}$ , где  $\mu$  - параметр интенсивности обслуживания. Система массового обслуживания реализует дисциплину обслуживания таким образом, что для каждой входящей заявки обеспечивается случайный выбор  $m$  любых приборов и среди них выбирается  $s$  ( $1 \leq s \leq m$ ) приборов, которые имеют самую короткую очередь. Динамика такой системы массового обслуживания может быть описана с помощью функции кратчайшей очереди  $u_k^{s,m}(t)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots; s, m = 1, 2, \dots; 1 \leq s \leq m$ ), которая может быть найдена путем решения системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка, которая может быть получена с использованием подхода, который подразумевает использование цепей Маркова. Для этой системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка, которую можно отнести к системе дифференциальных уравнений тихоновского типа, формулируется сингулярно возмущенная задача Коши с малым параметром. Для системы дифференциальных уравнений этой задачи Коши используется процедура усечения, которая позволяет получить сингулярно возмущенную усеченную задачу Коши для системы дифференциальных уравнений конечного порядка тихоновского типа. Для численного анализа решений усеченной задачи Коши применяется неоднородная сеточная схема Шишкина высокого порядка. Эта схема демонстрирует хорошую сходимость решений сингулярно возмущенной усеченной задачи Коши, когда малый параметр стремится к нулю. Результаты численного анализа решений усеченной задачи Коши показывают, что масштабируемая во времени система массового обслуживания может справиться с интенсивным входящим потоком заявок.

**Ключевые слова:** численные методы в теории массового обслуживания, неоднородная сеточная схема, системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка, малый параметр, счетные цепи Маркова, масштабируемые во времени системы массового обслуживания

**Финансирование:** публикация выполнена при поддержке Программы стратегического академического лидерства РУДН (получатель С. А. Васильев, разработка математической модели, реализация численной схемы, проведение численного анализа).

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Численный анализ на неравномерной сетке задачи о кратчайшей очереди для масштабируемой во времени системы массового обслуживания с малым параметром / А. М. Буатта [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 3. С. 496-506. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.496-506>

© Буатта А. М., Васильев С. А., Канзитдинов С. К., Царева Г. О., 2022



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Numerical Analysis of the Shortest Queue Problem for a Time-Scalable Queuing System with a Small Parameter on a Non-Uniform Grid Scheme

M. A. Bouatta, S. A. Vasilyev\*, S. K. Kanzitdinov, G. O. Tsareva

Peoples' Friendship University of Russia, Moscow, Russian Federation

Address: 6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation

\* vasilyev-sa@rudn.ru

### Abstract

In this paper, we use numerical methods using an uneven Shishkin grid to analyze the queue lengths of a time-scalable queuing system  $M/M/n$  ( $n \rightarrow \infty$ ) for which there is a Poisson incoming flow of requests with an intensity  $n\lambda$  and service time  $\tau = \mu^{-1}$ , where  $\mu$  is the service intensity parameter. The queuing system implements the service discipline in such a way that a random selection of any  $m$  servers is provided for each incoming request and among them  $s$  ( $1 \leq s \leq m$ ) servers that have the shortest queue are selected. The dynamics of such a queuing system can be described using the shortest queue function  $u_k^{s,m}(t)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots; s, m = 1, 2, \dots; 1 \leq s \leq m$ ), which can be found by solving a system of differential equations of infinite order, which can be obtained using an approach that involves the use of Markov chains. For this system of differential equations of infinite order, which can be attributed to a system of differential equations of the Tikhonov type, a singularly perturbed Cauchy problem with a small parameter is formulated. For the system of differential equations of this Cauchy problem, a truncation procedure is used, which allows us to obtain a singularly perturbed truncated Cauchy problem for a system of differential equations of finite order of Tikhonov type. For the numerical analysis of solutions to the truncated Cauchy problem, a non-uniform high-order Shishkin grid scheme is used. This scheme demonstrates good convergence of solutions to the singularly perturbed truncated Cauchy problem when the small parameter tends to zero. The results of numerical analysis of solutions to the truncated Cauchy problem show that a time-scalable queuing system can cope with an intensive incoming flow of applications.

**Keywords:** numerical methods in queuing theory, non-uniform grid scheme, systems of differential equations of infinite order, small parameter, counting Markov chains, time-scalable queuing systems

**Funding:** The publication was supported by the RUDN University Strategic Academic Leadership Program (Grant recipient S. A. Vasiliev, development of a mathematical model, implementation of a numerical scheme, numerical analysis).

**Conflict of interests:** The authors declare no conflict of interest.

**For citation:** Bouatta M.A., Vasilyev S.A., Kanzitdinov S.K., Tsareva G.O. Numerical Analysis of the Shortest Queue Problem for a Time-Scalable Queuing System with a Small Parameter on a Non-Uniform Grid Scheme. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022;18(3):496-506. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.496-506>



## Введение

Исследование масштабируемых во времени систем массового обслуживания (Time-Scalable Queuing System, TSQS) с большим количеством обслуживающих приборов чрезвычайно важно, так как развитие сетей 5G/6G и Интернета вещей (IoT) ставит проблему анализа точности работы таких систем, которая может быть решена с использованием не только аналитических методов [1-5], но и с использованием числовых методов [6-12].

В этой связи большой интерес представляют исследования TSQS со сложными дисциплинами обслуживания [13-15], которые приводят к анализу поведения решений задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений бесконечного порядка.

Также необходимо отметить, что проблема масштабирования во времени TSQS представляет особый интерес [4], [15], [16] так как имеется возможность рассмотреть и исследовать свойства преобразований решений дифференциальных уравнений, которые описывают динамику таких систем, как преобразование подобия, которое образует группу.

Применение методов масштабирования во времени часто ассоциируются с использованием малого параметра при анализе решений для моделей TSQS [17-21]. В связи с этим в последнее время большое внимание привлекают методы численного анализа решений дифференциальных уравнений сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений, которые используют модифицированные методы на неоднородных сетках [22-25].

В этой работе мы используем подход Добрушина<sup>1</sup> для исследования TSQS и привлекаем численные методы с использованием неравномерной сетки Шишкина для анализа длин очередей масштабируемой во времени системы массового обслуживания  $M/M/n$  при  $n \rightarrow \infty$ , для которой имеется пуассоновский входящий поток заявок с интенсивностью  $n\lambda$  и временем обслуживания  $\tau = \mu^{-1}$ , где  $\mu$  - параметр интенсивности обслуживания. Система массового обслуживания реализует дисциплину обслуживания таким образом, что для каждой входящей заявки обеспечивается случайный выбор  $m$  любых приборов и среди них выбирается  $s$  ( $1 \leq s \leq m$ ) приборов, которые имеют самую короткую очередь. Динамика такой системы массового обслуживания может быть описана с помощью функции кратчайшей очереди  $u_k^{s,m}(t)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots; s, m = 1, 2, \dots; 1 \leq s \leq m$ ), которая может быть найдена путем решения системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка, которая может быть получена с использованием подхода, который подразумевает использование цепей Маркова. Для этой системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка, которую можно отнести к системе дифференциальных уравнений тихоновского типа, формулируется сингулярно возмущенная задача Коши с малым параметром. Для системы дифференциальных уравнений этой задачи Коши используется процедура усечения, которая позволяет получить сингулярно возмущенную усеченную задачу Коши для системы дифференциальных

уравнений конечного порядка тихоновского типа. Для численного анализа решений усеченной задачи Коши применяется неоднородная сеточная схема Шишкина высокого порядка. Эта схема демонстрирует хорошую сходимость решений сингулярно возмущенной усеченной задачи Коши, когда малый параметр стремится к нулю  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Результаты численного анализа решений усеченной задачи Коши показывают, что масштабируемая во времени система массового обслуживания может справляться с интенсивным входящим потоком заявок.

## Масштабируемые во времени системы массового обслуживания

Мы рассматриваем масштабируемую во времени систему массового обслуживания  $S_n$  (Time-Scalable Queuing System, TSQS)  $M/M/n$  при  $n \rightarrow \infty$  с дисциплиной FCFS, при условии, что существует пуассоновский входящий поток заявок с интенсивностью  $n\lambda$  и каждый прибор обслуживает заявки с экспоненциально распределенным средним временем обслуживания  $\tau = 1/\mu$ , где параметр  $\mu$  - параметр интенсивности обслуживания.

Предположим, что имеется возможность немедленно случайным образом выбрать  $m$  приборов для каждой поступившей заявки в момент ее поступления и немедленно выбрать один прибор из выбранных  $m$  приборов, которые имеют самую короткую длину очереди  $S$  в момент выбора, после чего поступившую заявку имеется возможность немедленно отправить для обслуживания на выбранный прибор. Если окажется, что существует более одного прибора с наименьшим размером очереди, то случайным образом выбирается один из них.

Пусть имеется последовательность функций  $\vec{u}^{s,m} = \{u_k^{s,m}(t)\}_{k=0}^{\infty}$ , где функции  $u_k^{s,m}(t)$  - доля приборов, длина очереди обслуживания на которых не менее  $k$  и выполняются следующие соотношения  $1 \geq u_0^{s,m}(t) \geq u_1^{s,m}(t) \geq \dots \geq u_k^{s,m}(t) \geq \dots$ ,  $u_k^{s,m}(t) = \zeta_k^{s,m}/n$ ,  $0 \leq \zeta_k^{s,m} \leq n$  ( $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$ ),  $s, m \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$ ), и имеет место сходимость сумм  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k^{s,m}(t) < \infty$  для любых  $t \geq 0$ .

Как было показано, элементы последовательности  $u(t) = \{u_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$  становятся детерминированным в пределе  $n \rightarrow \infty$  и динамика TSQS описывается решениями системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка, которая имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_0^{s,m}(t) = 1, \\ u_k^{s,m}(t) = \mu(u_{k+1}^{s,m}(t) - u_k^{s,m}(t)) + \lambda(h_{s,m}(u_{k-1}^{s,m}(t)) - h_{s,m}(u_k^{s,m}(t))), k \geq 1, t \geq 0, \\ u_k^{s,m}(0) = g_k \geq 0, k \geq 1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\vec{g} = \{g_k\}_{k=0}^{\infty}$  ( $g_k \in \mathbb{R}$ ) ( $g_0 = 1, g_k \geq g_{k+1}$ ) - невозрастающая неотрицательная последовательность вещественных чисел и функция  $h_{s,m}(u_k^{s,m}(t))$  ( $1 \leq s \leq m, s, m \in \mathbb{N}$ ) имеет вид:

$$h_{s,m}(u_k^{s,m}(t)) = \sum_{l=0}^{s-1} C_m^l (1 - u_k^{s,m}(t))^l (u_k^{s,m}(t))^{m-l} =$$

<sup>1</sup> Vvedenskaya N. D., Suhov Yu. M. Dobrushin's Mean-Field Approximation for a Queue With Dynamic Routing // Markov Processes and Related Fields. 1997. Vol. 3, issue 4. P. 493-526. URL: <http://math-mpfrf.org/journal/articles/id796> (дата обращения: 30.08.2022).



$$\sum_{l=0}^{s-1} C_m^l \sum_{p=0}^l (-1)^{l-p} C_l^p [(u_{k-1}^{s,m}(t))^{m-p} - (u_k^{s,m}(t))^{m-p}].$$

Решения этой системы имеет единственную фиксированную точку  $\vec{a} = \{a_k\}_{k=0}^{\infty}$  для  $\theta_{s,m} \lambda / \mu < 1$  ( $\theta_{s,m} = \sup_{u \in [0,1]} h_{s,m}(u)$ ) и числа  $a_k$  имеют асимптотическую оценку

$$a_k \propto c_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c_1} (m-s+1)^k, \quad m > s; a_k \propto c_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{c_1 k}, \quad m = s,$$

где  $k \gg 1$  и  $c_0, c_1$  - константы,  $c_0, c_1$  - величины, зависящие от  $s, m$ .

### Модель масштабируемой во времени систем массового обслуживания с малым параметром

При изучении систем, масштабируемых во времени, т.е. таких систем, которые обладают свойствами инвариантности при преобразованиях параметра времени, всегда имеется возможность проанализировать свойства инвариантности решений дифференциальных уравнений или систем дифференциальных уравнений, с помощью которых описывается динамика таких систем, при преобразовании параметра времени, который входит в эти уравнения.

В данной работе исследуются масштабируемые во времени решения задачи Коши для системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка (1) с малым параметром в таком виде:

$$\begin{cases} \mathcal{E}^{b_k} \dot{u}_k^{s,m}(t) = \mu(u_{k+1}^{s,m}(t) - u_k^{s,m}(t)) + \lambda(h_{s,m}(u_{k-1}^{s,m}(t)) - h_{s,m}(u_k^{s,m}(t))), & k \geq 1, t \geq 0, \\ u_0^{s,m}(t) = 1, u_k^{s,m}(0) = g_k \geq 0, k \geq 1, g_k \geq g_{k+1}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\mathcal{E} > 0$  - малый параметр,  $\vec{b} = \{b_k\}_{k=1}^{\infty}, (b_k \geq 0)$  - числовая последовательность вещественных чисел. Вводя в рассмотрение малый параметр  $\mathcal{E}$  имеется возможность описать процессы быстрых изменений в динамике TSQS с помощью преобразований времени в следующем виде  $\bar{t}_k = \mathcal{E}^{-b_k} t$ .

Вводя векторные обозначения, имеется возможность переписать задачу Коши (2) таким образом:

$$\begin{cases} \dot{\vec{u}}^{s,m} = \vec{F}(\vec{u}^{s,m}, \mu, \lambda, \vec{b}, t), \\ \vec{u}_0^{s,m} = \vec{g}, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\vec{u}^{s,m} = (u_0^{s,m}(t), \mathcal{E}^{b_1} u_1^{s,m}(t), \dots, \mathcal{E}^{b_n} u_n^{s,m}(t), \dots), u_0^{s,m}(t) = 1,$

$$\vec{F} = (F_0, F_1, F_2, \dots, F_n, \dots), F_0 = 0,$$

$$F_k = [\mu(u_{k+1}^{s,m}(t) - u_k^{s,m}(t)) + \lambda(h_{s,m}(u_{k-1}^{s,m}(t)) - h_{s,m}(u_k^{s,m}(t)))]], k \geq 1,$$

$$\vec{u}_0^{s,m} = (u_0^{s,m}(0), u_1^{s,m}(0), \dots, u_n^{s,m}(0), \dots),$$

$$\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots), \vec{g} = (g_0, g_1, \dots, g_n, \dots), g_0 = 1, g_k \geq g_{k+1}, k \geq 1.$$

Эта задача Коши (3) может быть преобразована в задачу Тихонова, если предположить наличие следующих условий для ко-

эффициентов  $b_k = 0, k = 1, 2, \dots, l, b_k > 0, k = l+1, l+2, \dots$  ( $l \geq 2$ ), тогда

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}}^{s,m,l} = \vec{F}_v^{l,n}(\vec{v}^{s,m,l}, \vec{w}^{s,m,l}, \mu, \lambda, \vec{b}^l, t), \\ \dot{\vec{w}}^{s,m,l} = \vec{F}_w^{l,n}(\vec{v}^{s,m,l}, \vec{w}^{s,m,l}, \mu, \lambda, \vec{b}^l, t), \\ \vec{v}_0^{s,m,l} = \vec{g}_v^l, \vec{w}_0^{s,m,l} = \vec{g}_w^l, \end{cases} \quad (4)$$

где  $\vec{v}^{s,m,l} = (u_0^{s,m}(t), u_1^{s,m}(t), \dots, u_l^{s,m}(t)), v_0^{s,m,l}(t) = 1,$

$$\vec{F}_v^{l,n} = (F_0, F_1, F_2, \dots, F_l), F_0 = 0,$$

$$\vec{w}^{s,m,l} = (\mathcal{E}^{b_{l+1}} u_{l+1}^{s,m}(t), \mathcal{E}^{b_{l+2}} u_{l+2}^{s,m}(t), \dots), \vec{F}_w^{l,n} = (F_{l+1}, F_{l+2}, \dots),$$

$$\vec{v}_0^{s,m,l} = (u_0^{s,m}(0), u_1^{s,m}(0), \dots, u_l^{s,m}(0)), u_0^{s,m}(0) = 1,$$

$$\vec{w}_0^{s,m,l} = (u_{l+1}^{s,m}(0), u_{l+2}^{s,m}(0), \dots),$$

$$\vec{b}^l = (b_1, b_2, \dots, b_n, \dots) = (0, 0, \dots, 0, b_l, b_{l+1}, \dots, b_n, \dots), l \geq 2,$$

$$\vec{g}_v^l = (g_0, g_1, \dots, g_l), \vec{g}_w^l = (g_l, g_{l+1}, \dots), g_0 = 1, g_k \geq g_{k+1}, k \geq 1.$$

### Усеченная система дифференциальных уравнений и численного анализа

Применим стандартную процедуру усечения системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка и запишем задачу Тихонова (4) в усеченном виде для системы дифференциальных уравнений конечного порядка  $n+1$  и  $n+1$  начальным условием ( $1 \leq l \leq n, n = 1, 2, \dots$ ) в виде:

$$\begin{cases} \dot{\vec{v}}^{s,m,l,n} = \vec{F}_v^{l,n}(\vec{v}^{s,m,l,n}, \vec{w}^{s,m,l,n}, \mu, \lambda, \vec{b}^{l,n}, t), \\ \dot{\vec{w}}^{s,m,l,n} = \vec{F}_w^{l,n}(\vec{v}^{s,m,l,n}, \vec{w}^{s,m,l,n}, \mu, \lambda, \vec{b}^{l,n}, t), \\ \vec{v}_0^{s,m,l,n} = \vec{g}_v^{l,n}, \vec{w}_0^{s,m,l,n} = \vec{g}_w^{l,n}, \end{cases} \quad (5)$$

где  $\vec{v}^{s,m,l,n} = (u_0^{s,m}(t), u_1^{s,m}(t), \dots, u_l^{s,m}(t)), u_0^{s,m}(t) = 1,$

$$\vec{F}_v^{l,n} = (F_0, F_1, F_2, \dots, F_l), F_0 = 0,$$

$$\vec{w}^{s,m,l,n} = (\mathcal{E}^{b_{l+1}} u_{l+1}^{s,m}(t), \mathcal{E}^{b_{l+2}} u_{l+2}^{s,m}(t), \dots, \mathcal{E}^{b_n} u_n^{s,m}(t)),$$

$$\vec{F}_w^{l,n} = (F_{l+1}, F_{l+2}, \dots, F_n),$$

$$\vec{v}_0^{s,m,l,n} = (u_0^{s,m}(0), u_1^{s,m}(0), \dots, u_l^{s,m}(0)), u_0^{s,m}(0) = 1,$$

$$\vec{w}_0^{s,m,l,n} = (u_{l+1}^{s,m}(0), u_{l+2}^{s,m}(0), \dots, u_n^{s,m}(0)),$$

$$\vec{b}^{l,n} = (b_1, b_2, \dots, b_n) = (0, 0, \dots, 0, b_l, b_{l+1}, \dots, b_n),$$

$$1 \leq l \leq n, n = 1, 2, \dots,$$

$$\vec{g}_v^{l,n} = (g_0, g_1, \dots, g_l), \vec{g}_w^{l,n} = (g_l, g_{l+1}, \dots, g_n),$$

$$g_0 = 1, g_k \geq g_{k+1}, 1 \leq k \leq n-1.$$

Для проведения численного анализа задачи Тихонова (5) в данной работе была применена кусочно-равномерная сетка  $\bar{\Omega}_{it} (0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T_{\max})$ , когда имеется единственный левый пограничный слой

$$\bar{\Omega}_{it} = (t_i | t_i = i\tau_i; i = 0, 1, 2, \dots, K;$$

$$t_i = t_K + (i-K)\bar{\tau}_i; i = K+1, \dots, N),$$



$$\tau_1 = \delta / K, \bar{\tau}_1 = (T_{\max} - \delta) / (N - K), \delta = \bar{C} \varepsilon \ln(\varepsilon^{-1}),$$

где параметр  $\bar{C}$  определяется аналитически с помощью асимптотических оценок решений задачи Тихонова (5). Таким образом, на кусочно-равномерной сетке  $\bar{\Omega}_{1L}$  используются  $K$  малых шагов  $\tau_1$ ,  $N - K$  больших шагов  $\bar{\tau}_1$  на отрезке  $[0, T_{\max}]$ .

Также была применена кусочно-равномерная сетка  $\bar{\Omega}_{2l}$  ( $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T_{\max}$ ) для случая, когда имелись одновременно левый и внутренний пограничные слои

$$\bar{\Omega}_{2l} = (t_i | t_i = i\tau_1; i = 0, 1, 2, \dots, K; t_i = t_K + i\bar{\tau}_2; i = 1, \dots, M;$$

$$t_i = t_{K+M} + i\tau_2; i = 1, \dots, 2L; t_i = t_{K+M+2L} + i\bar{\tau}_2;$$

$$i = 1, \dots, N - K - M - 2L),$$

$$\tau_1 = \delta_1 / K, \tau_2 = \delta_2 / 2K, \delta_i = \bar{C}_i \varepsilon \ln(\varepsilon^{-1}),$$

$$i = 1, 2, \bar{\tau}_2 = (T_{\max} - \delta_1 - \delta_2) / (N - 3K),$$

где параметры  $\bar{C}_1, \bar{C}_2$  определяются аналитически с помощью асимптотических оценок решений задачи Тихонова (5),  $T_0 = t_{K+M+2L} + L\bar{\tau}_2$  - точка, в которой имеется внутренний пограничный слой. Таким образом, на кусочно-равномерной сетке  $\bar{\Omega}_{2l}$  имеет  $K$  малых шагов  $\tau_1$ ,  $2L$  малых шагов  $\tau_2$ ,  $N - K - 2L$  больших шагов  $\bar{\tau}_2$  на отрезке  $[0, T_{\max}]$ .

В данной работе было применено конечно-разностное приближение для системы (5) в следующем виде:

$$\begin{cases} u_{k,i+1}^{s,m} = u_{k,i}^{s,m} + h_i [\mu (u_{k+1,i}^{s,m} - u_{k,i}^{s,m}) + \lambda (h_{s,m} (u_{k-1,i}^{s,m}) - h_{s,m} (u_{k,i}^{s,m}))], k = 1, \dots, l, \\ u_{k,i+1}^{s,m} = u_{k,i}^{s,m} + h_i \varepsilon^{-b_k} [\mu (u_{k+1,i}^{s,m} - u_{k,i}^{s,m}) + \lambda (h_{s,m} (u_{k-1,i}^{s,m}) - h_{s,m} (u_{k,i}^{s,m}))], k = l + 1, \dots, n, \\ u_{0,i}^{s,m} = 1, u_{n+1,i}^{s,m} = 0, i = 0, \bar{N}, 0 \leq t_i \leq T_{\max}, \\ u_{k,0}^{s,m} = g_k \geq 0, k = 1, \bar{n}, g_k \geq g_{k+1}, k = 1, \bar{n} - 1, \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{где } h_i = t_i - t_{i-1}, u_{k,i}^{s,m} = u_{k,i}^{s,m}(t_i).$$

Далее будут использованы векторные обозначения для (6) таким образом:

$$\begin{cases} \bar{u}_{i+1}^{s,m,l,n} = \bar{F}_{c,\mu,\lambda}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n}, t_i), i = 0, \bar{N}, \\ \bar{u}_0^{s,m,l,n} = \bar{g}_c, \end{cases} \quad (7)$$

$$\bar{u}_i^{s,m,l,n} = (u_{1,i}^{s,m,l,n}, u_{2,i}^{s,m,l,n}, \dots, u_{n,i}^{s,m,l,n}),$$

$$\bar{F}_{c,\mu,\lambda}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n}, t_i) = (F_{c1}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n}, \mu, \lambda, \bar{b}_c^{l,n}, t_i), \dots, F_{cn}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n}, \mu, \lambda, \bar{b}_c^{l,n}, t_i)),$$

$$F_{ck}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n}, \mu, \lambda, \bar{b}_c^{l,n}, t_i) = u_{k,i}^{s,m,l,n} + h_i [\mu (u_{k+1,i}^{s,m,l,n} - u_{k,i}^{s,m,l,n}) +$$

$$+ \lambda (h_{s,m} (u_{k-1,i}^{s,m,l,n}) - h_{s,m} (u_{k,i}^{s,m,l,n}))], k = \bar{1}, \bar{l},$$

$$F_{ck}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n}, \mu, \lambda, \bar{b}_c^{l,n}, t_i) = u_{k,i}^{s,m,l,n} + h_i \varepsilon^{-b_k} [\mu (u_{k+1,i}^{s,m,l,n} - u_{k,i}^{s,m,l,n}) +$$

$$+ \lambda (h_{s,m} (u_{k-1,i}^{s,m,l,n}) - h_{s,m} (u_{k,i}^{s,m,l,n}))], k = \overline{l+1}, \bar{n},$$

$$\bar{u}_0^{s,m,l,n} = (u_{1,0}^{s,m,l,n}, u_{2,0}^{s,m,l,n}, \dots, u_{n,0}^{s,m,l,n}), \bar{g}_c = (g_{c1}, g_{c2}, \dots, g_{cn}).$$

Для численного решения задачи (7) был применен метод Кутта-Мерсона и использованы следующие формулы:

$$\bar{q}_i^1 = \bar{F}_{c,\mu,\lambda}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n}, t_i), \bar{q}_i^2 = \bar{F}_{c,\mu,\lambda}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n} + \frac{h_i}{3} \bar{q}_i^1, t_i + h_i / 3),$$

$$\bar{q}_i^3 = \bar{F}_{c,\mu,\lambda}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n} + \frac{h_i}{6} [\bar{q}_i^1 + \bar{q}_i^2], t_i + h_i / 3),$$

$$\bar{q}_i^4 = \bar{F}_{c,\mu,\lambda}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n} + \frac{h_i}{8} [\bar{q}_i^1 + 3\bar{q}_i^2], t_i + h_i / 2),$$

$$\bar{q}_i^5 = \bar{F}_{c,\mu,\lambda}^{l,n}(\bar{u}_i^{s,m,l,n} + \frac{h_i}{2} [\bar{q}_i^1 - 3\bar{q}_i^2] + 2h_i \bar{q}_i^4, t_i + h_i),$$

$$\bar{u}_{i+1}^{s,m,l,n} = \bar{u}_i^{s,m,l,n} + \frac{h_i}{6} (\bar{q}_i^1 + 4\bar{q}_i^4 + \bar{q}_i^5),$$

$$\bar{u}_{i+1,r}^{s,m,l,n} = \bar{u}_i^{s,m,l,n} + 0.5h_i (\bar{q}_i^1 - 3\bar{q}_i^3 + 4\bar{q}_i^4),$$

где  $\bar{q}_i \in R^n$  ( $i = 0, \bar{N}$ ;  $j = \bar{1}, \bar{5}$ ) - вектор.

Значения  $R_k = 0.2 \max_{i=1, \bar{N}} |u_{k,i}^{s,m,l,n} - u_{k,i+1,r}^{s,m,l,n}|$  определяются в каждой точке вычислений  $i = \bar{1}, \bar{N}$ . Если значение  $R_k$  больше допустимой погрешности  $\delta_{k,c}$  ( $R_k > \delta_{k,c}$ ), то соответствующий шаг делается в два раза короче и затем снова пересчитываются векторы  $\bar{q}_i$ .

Численный анализ решений

$u_k^{s,m,l,n}(t)$  ( $m = 2, 3, 4; 1 \leq s \leq m; l = 9, n = 25; k = 1, 5, 10, 15, 20, 25$ ), где в дальнейшем для удобства решения будет иметь вид  $u_k^{s,m}(t)$ , представлен на графиках 1-9. Для численного анализа были использованы следующие параметры: интенсивность поступления заявок в систему  $\lambda = 4$  в случае низкой интенсивности и  $\lambda = 6$  в случае высокой интенсивности, интенсивность обслуживания  $\mu = 5$ , размерность системы дифференциальных уравнений равна  $n = 25$ , число дифференциальных уравнений без малых параметров равно  $l = 9$  ( $1 \leq k \leq 9$ ), число дифференциальных уравнений с малыми параметрами равно  $n - l = 16$  ( $10 \leq k \leq 25$ ), степени малого параметра равны  $b_k = 0, 1 \leq k \leq 9$  и  $b_k = 1/k, 10 \leq k \leq 25$ , количество шагов сетки равно  $N = 10^4$ , допустимая погрешность  $\delta_{k,c} = 10^{-5}$ .

Значения начальных условий представлены в виде набора чисел  $g_0 = 1, g_k = (28 - 9k) / 30, k = 1, 25$ . Значения параметров  $s, m, \varepsilon$  представлены в подписях под рисунками 1-9.

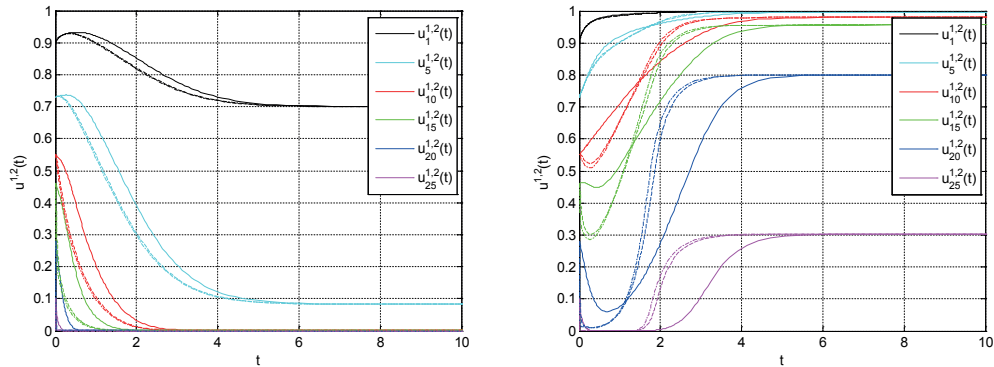
На рис. 1 показаны результаты численного анализа поведения решения  $u_k^{1,2}(t)$ , где показано, что TSQS имеет нестабильный режим обслуживания в условиях перегрузки, что в этом случае присутствуют левые и внутренние пограничные слои.

На рис. 2 показаны результаты численного анализа поведения решения  $u_k^{2,2}(t)$ , где показано, что TSQS имеет стабильный режим обслуживания в условиях перегрузки. Таким образом, при увеличении параметра  $s$  система обеспечивает более стабильное обслуживание и имеют место только левые пограничные слои.

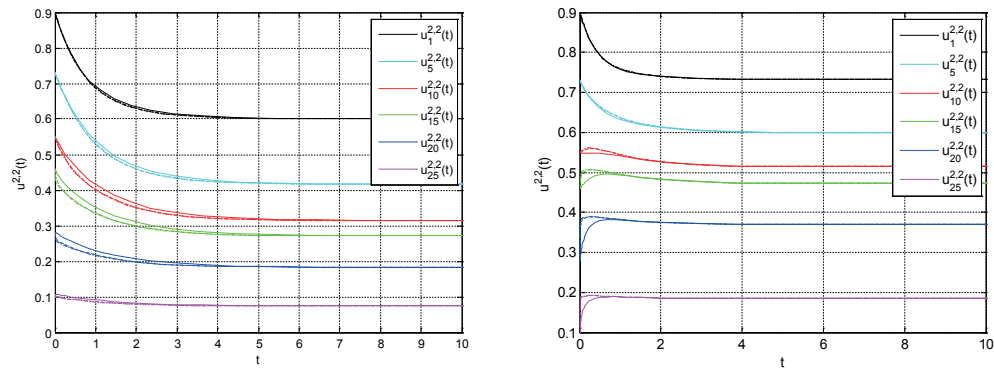
На рис. 3 показаны результаты численного анализа поведения решения  $u_k^{1,3}(t)$ , где показано, что TSQS имеет нестабильный режим обслуживания в условиях перегрузки и имеют место левый и внутренний пограничные слои. Поведение решений становятся более резким в зоне пограничных слоев, когда малый параметр стремится к нулю  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

На рис. 4, 5 показаны результаты численного анализа поведения решений  $u_k^{2,3}(t), u_k^{3,3}(t)$ , где показано, что TSQS имеет стабильный режим обслуживания в условиях перегрузки. Таким образом, при увеличении параметра  $s$  система обеспечивает более стабильное обслуживание и имеют место только левые пограничные слои.

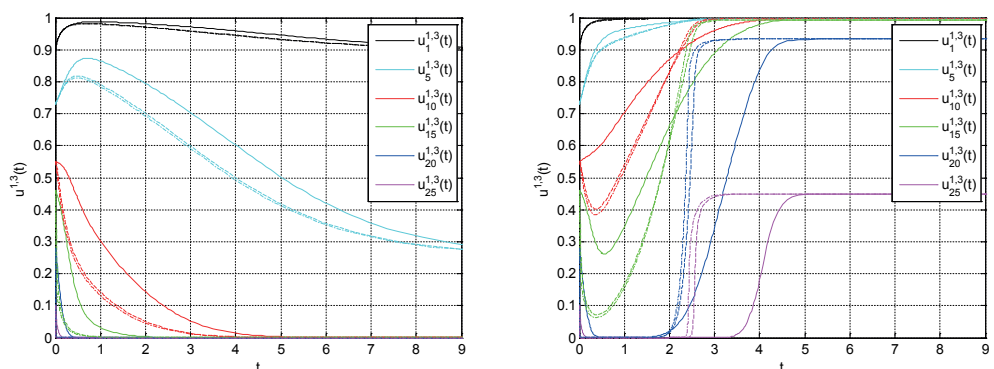




Р и с. 1. График поведения функции  $u_k^{1,2}(t)$  при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  (непрерывная линия),  $\varepsilon = 0.01$  (пунктирная линия),  $\varepsilon = 0.001$  (штрихпунктирная линия),  $\mu = 5$ ,  $\lambda = 4$  (левый график),  $\lambda = 6$  (правый график)  
F i g. 1. The evolution of the function  $u_k^{1,2}(t)$ ,  $\lambda = 4$  for the left graph,  $\lambda = 6$  for the right graph,  $\mu = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  solid line,  $\varepsilon = 0.01$  dotted line,  $\varepsilon = 0.001$  dot-dash line

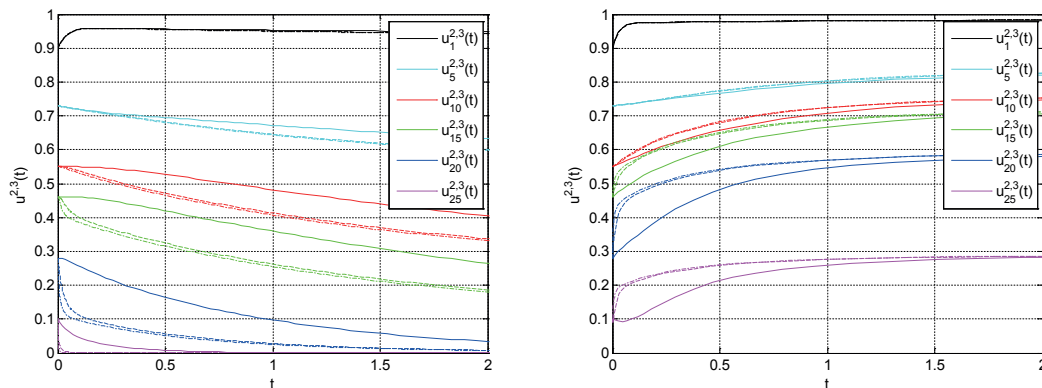


Р и с. 2. График поведения функции  $u_k^{2,2}(t)$  при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  (непрерывная линия),  $\varepsilon = 0.01$  (пунктирная линия),  $\varepsilon = 0.001$  (штрихпунктирная линия),  $\mu = 5$ ,  $\lambda = 4$  (левый график),  $\lambda = 6$  (правый график)  
F i g. 2. The evolution of the function  $u_k^{2,2}(t)$ ,  $\lambda = 4$  for the left graph,  $\lambda = 6$  for the right graph,  $\mu = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  solid line,  $\varepsilon = 0.01$  dotted line,  $\varepsilon = 0.001$  dot-dash line



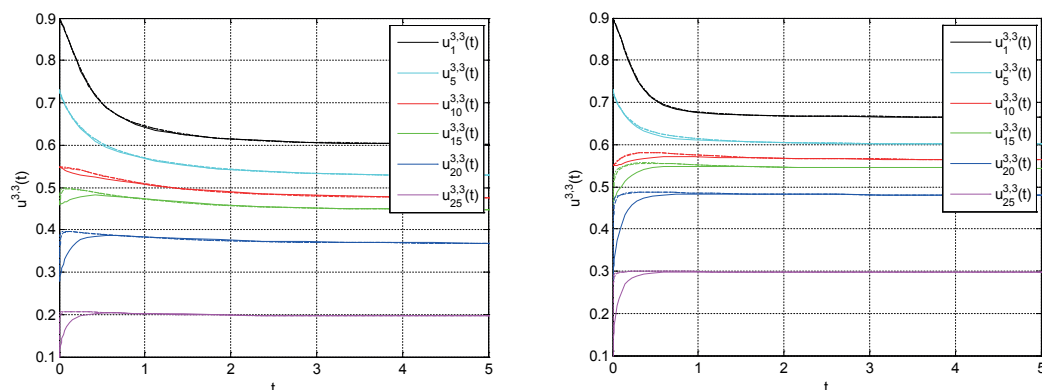
Р и с. 3. График поведения функции  $u_k^{1,3}(t)$  при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  (непрерывная линия),  $\varepsilon = 0.01$  (пунктирная линия),  $\varepsilon = 0.001$  (штрихпунктирная линия),  $\mu = 5$ ,  $\lambda = 4$  (левый график),  $\lambda = 6$  (правый график)  
F i g. 3. The evolution of the function  $u_k^{1,3}(t)$ ,  $\lambda = 4$  for the left graph,  $\lambda = 6$  for the right graph,  $\mu = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  solid line,  $\varepsilon = 0.01$  dotted line,  $\varepsilon = 0.001$  dot-dash line





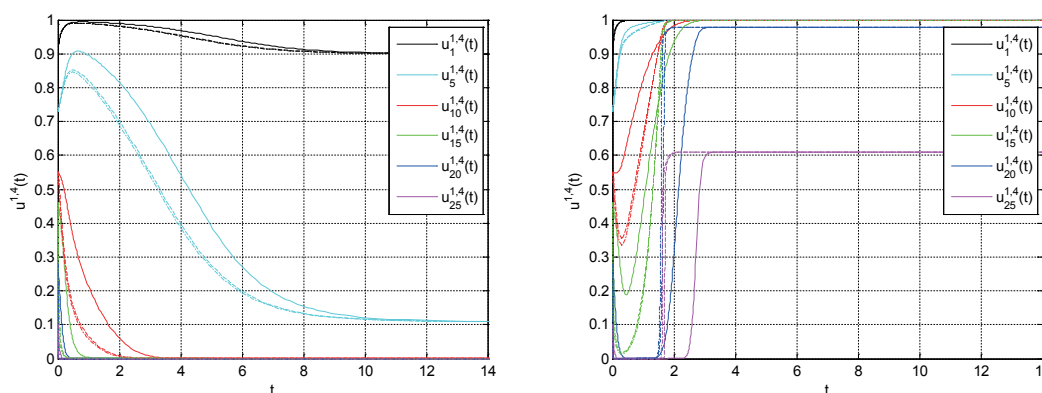
Р и с. 4. График поведения функции  $u_k^{2,3}(t)$  при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  (непрерывная линия),  $\varepsilon = 0.01$  (пунктирная линия),  $\varepsilon = 0.001$  (штрихпунктирная линия),  $\mu = 5$ ,  $\lambda = 4$  (левый график),  $\lambda = 6$  (правый график)

Fig. 4. The evolution of the function  $u_k^{2,3}(t)$ ,  $\lambda = 4$  for the left graph,  $\lambda = 6$  for the right graph,  $\mu = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  solid line,  $\varepsilon = 0.01$  dotted line,  $\varepsilon = 0.001$  dot-dash line



Р и с. 5. График поведения функции  $u_k^{3,3}(t)$  при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  (непрерывная линия),  $\varepsilon = 0.01$  (пунктирная линия),  $\varepsilon = 0.001$  (штрихпунктирная линия),  $\mu = 5$ ,  $\lambda = 4$  (левый график),  $\lambda = 6$  (правый график)

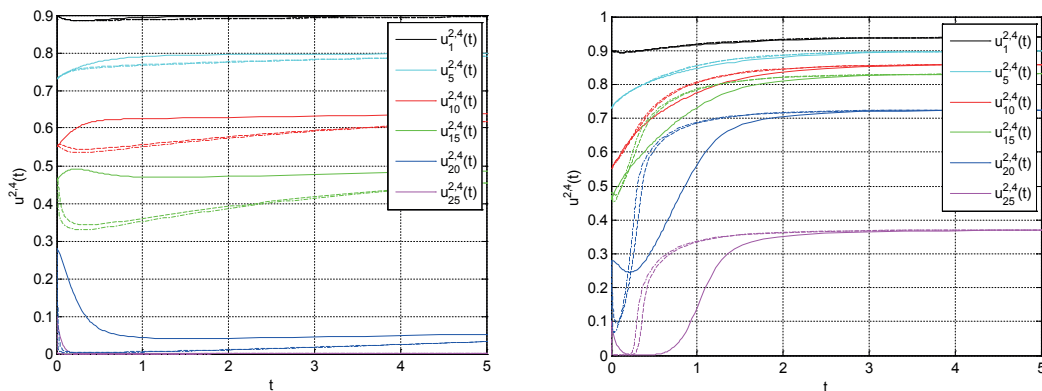
Fig. 5. The evolution of the function  $u_k^{3,3}(t)$ ,  $\lambda = 4$  for the left graph,  $\lambda = 6$  for the right graph,  $\mu = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  solid line,  $\varepsilon = 0.01$  dotted line,  $\varepsilon = 0.001$  dot-dash line



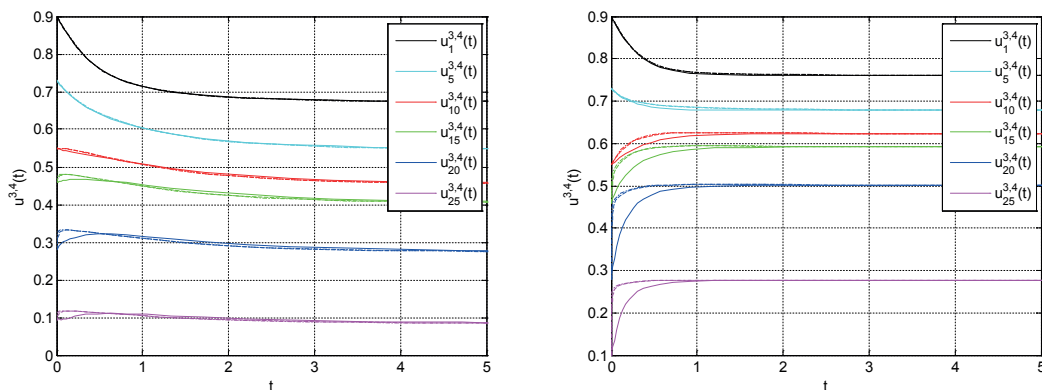
Р и с. 6. График поведения функции  $u_k^{1,4}(t)$  при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  (непрерывная линия),  $\varepsilon = 0.01$  (пунктирная линия),  $\varepsilon = 0.001$  (штрихпунктирная линия),  $\mu = 5$ ,  $\lambda = 4$  (левый график),  $\lambda = 6$  (правый график)

Fig. 6. The evolution of the function  $u_k^{1,4}(t)$ ,  $\lambda = 4$  for the left graph,  $\lambda = 6$  for the right graph,  $\mu = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  solid line,  $\varepsilon = 0.01$  dotted line,  $\varepsilon = 0.001$  dot-dash line

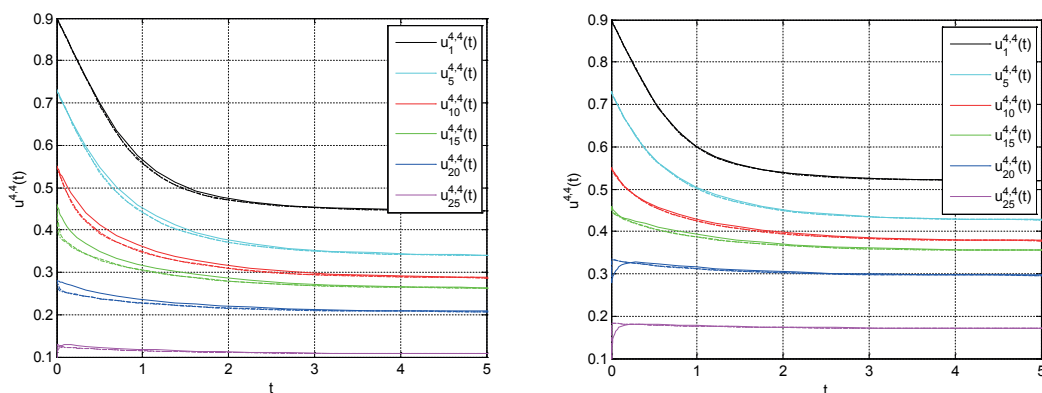




Р и с. 7. График поведения функции  $u_k^{2,4}(t)$  при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  (непрерывная линия),  $\varepsilon = 0.01$  (пунктирная линия),  $\varepsilon = 0.001$  (штрихпунктирная линия),  $\mu = 5$ ,  $\lambda = 4$  (левый график),  $\lambda = 6$  (правый график)  
F i g. 7. The evolution of the function  $u_k^{2,4}(t)$ ,  $\lambda = 4$  for the left graph,  $\lambda = 6$  for the right graph,  $\mu = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  solid line,  $\varepsilon = 0.01$  dotted line,  $\varepsilon = 0.001$  dot-dash line



Р и с. 8. График поведения функции  $u_k^{3,4}(t)$  при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  (непрерывная линия),  $\varepsilon = 0.01$  (пунктирная линия),  $\varepsilon = 0.001$  (штрихпунктирная линия),  $\mu = 5$ ,  $\lambda = 4$  (левый график),  $\lambda = 6$  (правый график)  
F i g. 8. The evolution of the function  $u_k^{3,4}(t)$ ,  $\lambda = 4$  for the left graph,  $\lambda = 6$  for the right graph,  $\mu = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  solid line,  $\varepsilon = 0.01$  dotted line,  $\varepsilon = 0.001$  dot-dash line



Р и с. 9. График поведения функции  $u_k^{4,4}(t)$  при значениях малого параметра  $\varepsilon = 0.1$  (непрерывная линия),  $\varepsilon = 0.01$  (пунктирная линия),  $\varepsilon = 0.001$  (штрихпунктирная линия),  $\mu = 5$ ,  $\lambda = 4$  (левый график),  $\lambda = 6$  (правый график)  
F i g. 9. The evolution of the function  $u_k^{4,4}(t)$ ,  $\lambda = 4$  for the left graph,  $\lambda = 6$  for the right graph,  $\mu = 5$ ,  $\varepsilon = 0.1$  solid line,  $\varepsilon = 0.01$  dotted line,  $\varepsilon = 0.001$  dot-dash line





На рис. 6 показаны результаты численного анализа поведения решения  $u_k^{1,4}(t)$ , где показано, что TSQS имеет нестабильный режим обслуживания в условиях перегрузки и имеют место левый и внутренний пограничные слои. Поведение решений становятся более резким в зоне пограничных слоев, когда малый параметр стремится к нулю  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

На рис. 7-9 показаны результаты численного анализа поведения решений  $u_k^{2,4}(t)$ ,  $u_k^{3,4}(t)$ ,  $u_k^{4,4}(t)$ , где показано, что TSQS имеет стабильный режим обслуживания в условиях перегрузки. Таким образом, при увеличении параметра  $S$  система обеспечивает более стабильное обслуживание и имеют место только левые пограничные слои.

## Заключение

Внедрение технологий 5G/6G требует особого внимания разработчиков новых продуктов в области беспроводной связи, так как эти технологии смогут обеспечить более высокие скорости передачи данных, более короткую задержку, а также большую энергоэффективность по сравнению с используемыми в настоящее время технологиями 4G. Разработчики неизбежно столкнутся с рядом технических проблем при проектировании архитектуры 5G/6G, которая должна справляться с более сложной многопользовательской средой и использованием каналов на более высоких частотах. Современные исследования теоретических моделей TSQS позволяют понять проблемы, которые требуют решения для реализации технологий 5G/6G.

В этой работе для анализа динамики состояния TSQS были привлечены численные методы с использованием неравномерной сетки Шишкина и исследован вопрос поведения длин очередей в процессе обслуживания масштабируемой во времени системы массового обслуживания  $M/M/n$  при  $n \rightarrow \infty$ , для которой имеется пуассоновский входящий поток заявок с интенсивностью  $n\lambda$  и временем обслуживания  $\tau = \mu^{-1}$ , где  $\mu$  - параметр интенсивности обслуживания. Для моделирования

был рассмотрен случай, когда TSQS реализует дисциплину обслуживания таким образом, что для каждой входящей заявки обеспечивается случайный выбор  $m$  любых приборов и среди них выбирается  $s$  ( $1 \leq s \leq m$ ) приборов, которые имеют самую короткую очередь. Динамика такой системы массового обслуживания может быть описана с помощью функции кратчайшей очереди  $u_k^{s,m}(t)$  ( $k = 0, 1, 2, \dots; s, m = 1, 2, \dots; 1 \leq s \leq m$ ), которая может быть найдена путем решения системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка, которая может быть получена с использованием подхода, который подразумевает использование цепей Маркова. Для этой системы дифференциальных уравнений бесконечного порядка, которую можно отнести к системе дифференциальных уравнений тихоновского типа, была сформулирована сингулярно возмущенная задача Коши с малым параметром. Для системы дифференциальных уравнений этой задачи Коши использована процедура усечения, которая позволила получить сингулярно возмущенную усеченную задачу Коши для системы дифференциальных уравнений конечного порядка тихоновского типа. Для численного анализа решений усеченной задачи Коши применялась неоднородная сеточная схема Шишкина высокого порядка. Эта схема продемонстрировала хорошую сходимость решений сингулярно возмущенной усеченной задачи Коши, когда малый параметр стремится к нулю  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Результаты численного анализа решений усеченной задачи Коши показали, что масштабируемая во времени система массового обслуживания может справляться с интенсивным входящим потоком заявок.

Таким образом, было показано, что TSQS имеет более эффективное обслуживание входного потока запросов, если мы увеличим параметр  $s$  ( $1 \leq s \leq m$ ). Мы полагаем, что можно сформулировать оптимальную задачу управления для таких TSQS и успешно ее решить. Умение решать такие задачи очень важно, потому что это позволит сэкономить технические и финансовые ресурсы при внедрении сетей 5G/6G.

## References

- [1] Dudin A., Dudina O., Dudin S., Gaidamaka Y. Self-Service System with Rating Dependent Arrivals. *Mathematics*. 2022;10(3):297. doi: <https://doi.org/10.3390/math10030297>
- [2] Barbhuiya F.P., Gupta U.C. Analytical and computational aspects of the infinite buffer single server N policy queue with batch renewal input. *Computers & Operations Research*. 2020;118:104916. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.104916>
- [3] Chen H., Wang Z. Optimal control for parallel queues with a single batch server. *Operations Research Letters*. 2022;50(4):377-383. <https://doi.org/10.1016/j.cor.2020.104916>
- [4] van Kreveld L.R., Boxma O.J., Dorsman J.L., Mandjes M.R.H. Scaling limits for closed product-form queueing networks. *Performance Evaluation*. 2021;151:102220. doi: <https://doi.org/10.1016/j.peva.2021.102220>
- [5] Heemskerk M., Mandjes M., Mathijsen B. Staffing for many-server systems facing non-standard arrival processes. *European Journal of Operational Research*. 2022;296(3):900-913. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2021.07.046>
- [6] Baddour A., Malykh M., Sevastianov L. On Periodic Approximate Solutions of Dynamical Systems with Quadratic Right-Hand Side. *Journal of Mathematical Sciences*. 2022;261:698-708. doi: <https://doi.org/10.1007/s10958-022-05781-4>
- [7] Divakov D.V., Tiutiunnik A.A. Symbolic Investigation of Eigenvectors for General Solution of a System of ODEs with a Symbolic Coefficient Matrix. *Programming and Computer Software*. 2021;47:6-16. doi: <https://doi.org/10.1134/S0361768821010035>
- [8] Gevorkyan M.N., Demidova A.V., Velieva T.R., Korol'kova A.V., Kulyabov D.S. Analytical-Numerical Implementation of Polyvector Algebra in Julia. *Programming and Computer Software*. 2022;48:49-58. doi: <https://doi.org/10.1134/S0361768822010054>
- [9] Kondratyeva A., Ivanova D., Begishev V., Markova E., Mokrov E., Gaidamaka Yu., Samouylov K. Characterization of Dynamic Blockage Probability in Industrial Millimeter Wave 5G Deployments. *Future Internet*. 2022;14(7):193. doi: <https://doi.org/10.3390/fi14070193>



- [10] Whitt W. On the many-server fluid limit for a service system with routing based on delayed information. *Operations Research Letters*. 2021;49(3):316-319. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2021.03.001>
- [11] Kim B., Kim J., Bueker O. Non-preemptive priority M/M/m queue with servers' vacations. 2021;160:107390. <https://doi.org/10.1016/j.jcie.2021.107390>
- [12] Sevastianov L.A., Lovetskiy K.P., Kulyabov D.S. An Effective Stable Numerical Method for Integrating Highly Oscillating Functions with a Linear Phase. *Computational Science – ICCS 2020*. 2020;12138:29-43. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-50417-5\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-50417-5_3)
- [13] Dimitriou I. Analysis of the symmetric join the shortest orbit queue. *Operations Research Letters*. 2021;49(1):23-29. <https://doi.org/10.1016/j.orl.2020.10.011>
- [14] Xin Liu, Kang Gong, Lei Ying. Steady-state analysis of load balancing with Coxian-2 distributed service times. *Naval Research Logistics*. 2022;69(1):57-75. doi: <https://doi.org/10.1002/nav.21986>
- [15] Zhou X., Shroff N., Wierman A. Asymptotically optimal load balancing in large-scale heterogeneous systems with multiple dispatchers. *Performance Evaluation*. 2021;145:102146. doi: <https://doi.org/10.1016/j.peva.2020.102146>
- [16] Zhou X., Wu F., Tan J., Srinivasan K., Shroff N. Degree of Queue Imbalance: Overcoming the Limitation of Heavy-traffic Delay Optimality in Load Balancing Systems. *ACM SIGMETRICS Performance Evaluation Review*. 2018;46(1):115. doi: <https://doi.org/10.1145/3292040.3219665>
- [17] Bushkova T., Moiseeva S., Moiseev A., Sztrik J., Lisovskaya E., Pankratova E. Using Infinite-server Resource Queue with Splitting of Requests for Modeling Two-channel Data Transmission. *Methodology and Computing in Applied Probability*. 2022;24:1753-1772. doi: <https://doi.org/10.1007/s11009-021-09890-6>
- [18] Bushkova T., Galileyskaya A., Lisovskaya E., Pankratova E., Moiseeva S. Multi-service resource queue with the multy-component Poisson arrivals. *Global and Stochastic Analysis*. 2021;8(3):97-109. Available at: [https://www.mukpublications.com/resources/10\\_CSA\\_Moiseeva\\_Bushkova\\_and\\_OK.pdf](https://www.mukpublications.com/resources/10_CSA_Moiseeva_Bushkova_and_OK.pdf) (accessed 30.08.2022).
- [19] Danilyuk E., Moiseeva S., Nazarov A. Asymptotic Diffusion Analysis of an Retrial Queueing System M/M/1 with Impatient Calls. In: Vishnevskiy V.M., Samouylov K.E., Kozyrev D.V. (eds.). Distributed Computer and Communication Networks. DCCN 2021. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1552. Cham: Springer; 2022. p. 233-246. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-97110-6\\_18](https://doi.org/10.1007/978-3-030-97110-6_18)
- [20] Hamsadhvani V., Kannu A.P., Lakshmi K.S., Narmadha C. Queueing Delay Performance of Schedulers in Centralized Sensing Cognitive Radio Networks. *International Review on Modelling and Simulations*. 2020;13:286-296. doi: <https://doi.org/10.15866/iremos.v13i4.19197>
- [21] Nazarov A., Dudin A., Moiseev A. Pseudo Steady-State Period in Non-Stationary Infinite-Server Queue with State Dependent Arrival Intensity. *Mathematics*. 2022;10(15):2661. doi: <https://doi.org/10.3390/math10152661>
- [22] Polkhovskaya A., Moiseeva S., Danilyuk E. Asymptotic Analysis of Retrial Queueing System M/M/1 with Non-persistent Customers and Collisions. In: Dudin A., Nazarov A., Moiseev A. (eds.). Information Technologies and Mathematical Modelling. Queueing Theory and Applications. ITMM 2021. Communications in Computer and Information Science. Vol. 1605. Cham: Springer; 2022. p. 343-355. doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-031-09331-9\\_27](https://doi.org/10.1007/978-3-031-09331-9_27)
- [23] Kaushik A., Choudhary M. A higher-order uniformly convergent defect correction method for singularly perturbed convection-diffusion problems on an adaptive mesh. *Alexandria Engineering Journal*. 2022;61(12):9911-9920. doi: <https://doi.org/10.1016/j.aej.2022.03.005>
- [24] Roul P. A fourth-order non-uniform mesh optimal B-spline collocation method for solving a strongly nonlinear singular boundary value problem describing electrohydrodynamic flow of a fluid. *Applied Numerical Mathematics*. 2020;153:558-574. doi: <https://doi.org/10.1016/j.apnum.2020.03.018>
- [25] Zhang J., Liu X. Uniform convergence of a weak Galerkin finite element method on Shishkin mesh for singularly perturbed convection-diffusion problems in 2D. *Applied Mathematics and Computation*. 2022;432:127346. doi: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2022.127346>

Поступила 30.08.2022; одобрена после рецензирования 20.09.2022; принята к публикации 28.09.2022.

Submitted 30.08.2022; approved after reviewing 20.09.2022; accepted for publication 28.09.2022.

#### Об авторах:

**Буатта Мохамед Адел**, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5477-8710>, adelbouatta.rudn@mail.ru

**Васильев Сергей Анатольевич**, доцент кафедры прикладной информатики и теории вероятностей, факультета физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1562-0256>, vasilyev-sa@rudn.ru

**Канзитдинов Шахмурад Канзитдинович**, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3972-7739>, shahkazitdinov@mail.ru



**Царева Галина Олеговна**, аспирант кафедры прикладной информатики и теории вероятностей факультета физико-математических и естественных наук, ФГАОУ ВО «Российский университет дружбы народов» (117198, Российская Федерация, г. Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8188-5212>**, [gotsareva@gmail.com](mailto:gotsareva@gmail.com)

*Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

#### About the authors:

**Mohamed Adel Bouatta**, Postgraduate Student of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5477-8710>**, [adelbouatta.rudn@mail.ru](mailto:adelbouatta.rudn@mail.ru)

**Sergey A. Vasilyev**, Associate Professor of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation), Cand.Sci. (Phys.-Math.), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1562-0256>**, [vasilyev-sa@rudn.ru](mailto:vasilyev-sa@rudn.ru)

**Shakhmurad K. Kanzitdinov**, Postgraduate Student, of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3972-7739>**, [shahkanzitdinov@mail.ru](mailto:shahkanzitdinov@mail.ru)

**Galina O. Tsareva**, Postgraduate Student, of the Department of Applied Probability and Informatics, Faculty of Science, Peoples' Friendship University of Russia (6 Miklukho-Maklaya St., Moscow 117198, Russian Federation), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8188-5212>**, [gotsareva@gmail.com](mailto:gotsareva@gmail.com)

*All authors have read and approved the final manuscript.*

