УДК 519.71
DOI: 10.25559/SITITO.18.202204.717-724

Оригинальная статья

Эффективный метод исследования экстремальных задач

В. В. Нефедов, В. В. Тихомиров*
ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова», г. Москва, Российская Федерация
Адрес: 119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1
* zedum@cs.msu.ru

Аннотация

Гомотопический метод (или метод продолжения по параметру) хронологически берет начало в середине XIX столетия и активно развивается по настоящее время. В данной работе рассматривается деформационный (гомотопический) метод исследования экстремальных задач. Примеры применения этого метода иллюстрируются для известных задач нелинейного анализа. Одна из наиболее общих и эффективных схем применения гомотопического метода к качественному исследованию операторных уравнений (с вполне непрерывным оператором) принадлежит Лере и Шаудеру. В этой схеме параметр включается линейно. В работе приводятся примеры приложений гомотопического метода к исследованию экстремальных задач вариационного исчисления. При этом используется следующая основная конструкция: если в процессе деформации вариационной задачи ее экстремаль остается изолированной и при каком-либо значении параметра деформации эта экстремаль реализует минимум, то она реализует минимум исследуемой вариационной задачи при всех значениях параметра.

Ключевые слова: гомотопический метод, задачи нелинейного программирования, вариационное исчисление, деформационный принцип, устойчивость градиентных систем

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Нефедов В. В., Тихомиров В. В. Эффективный метод исследования экстремальных задач // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 4. С. 717-724. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202204.717-724

Original article

An Effective Method for Studying Extremal Problems

V. V. Nefedov, V. V. Tikhomirov*
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation
Address: 1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation
* zedum@cs.msu.ru

Abstract
The homotopy method (or the parameter continuation method) first appeared in the middle of the 19th century and is being actively developed at the present time. In this paper, we consider a deformation (homotopy) method for studying extremal problems. Examples of this method are illustrated for well-known nonlinear analysis problems. One of the most general and efficient schemes for applying the homotopy method to the qualitative study of operator equations (with a completely continuous operator) was developed by Leray and Schauder. In this scheme, the parameter is included linearly. The article gives examples of applications of homotopy method to the study of extreme problems of variation calculus. The basic design is as follows: if during the deformation of the variational problem its extremal remains isolated and at any value of the deformation parameter this extremal achieves a minimum, then it implements the minimum of the variational problem under study for all values of the parameter.

Keywords: homotopy method, nonlinear programming problems, variations calculus, deformation principle, stability of gradient systems

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Nefedov V.V., Tikhomirov V.V. An Effective Method for Studying Extremal Problems. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2022;18(4):717-724. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202204.717-724

Основные методы

Общая схема гомотопического метода геометрически наглядна и проста: если имеется какое-либо уравнение (алгебраическое, дифференциальное, интегральное, интегро-дифференциальное, операторное и т.д.), и нужно получить информацию о его решениях (доказать существование решений, устойчивость, локализовать решения, построить приближения к решениям и т.д.), то эти уравнения включают в некоторое специальным образом построенное однопараметрическое семейство уравнений, гомотопирующее изучаемое уравнение к эталонному уравнению, решение которого известно, а затем это решение «протягивают по параметру к отыскиваемому решению исходного уравнения» [1-12]. Поясним эту схему на более формальном уровне и затем на примерах[1].

Пусть имеется уравнение $A(x) = 0$. (1)

Предположим, что нам удалось включить уравнение (1) в однопараметрическое семейство уравнений

$A(x;\lambda) = 0 \quad (0 \le \lambda \le 1)$, (2)

таким образом, что уравнение (2) имеет решение $x(\lambda)$, гладкозависящие от параметра λ. Пусть при $\lambda = 0$ уравнение

$A(x;0) = 0$

имеет решение x_0 изначение оператора $A(x;1) = A(x)$.

Подставляя решение $x\,(\lambda)$ в уравнение (2) и дифференцируя по λ тождество $A(x(\lambda);\lambda) \equiv 0$,

получаем (относительно λ) тождество

$$A'_x(x(\lambda);\lambda)\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} + A'_\lambda(x(\lambda);\lambda) \equiv 0.$$

Таким образом, решение $x(\lambda)$ является решением задачи Коши

$$\begin{cases} A'_x(x(\lambda);\lambda)\frac{dx(\lambda)}{d\lambda} + A'_\lambda(x(\lambda);\lambda) \equiv 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad (3)$$

Ясно, что если это решение можно продолжить (по λ на промежуток $[0,1]$), то точка $x(1)$ будет решением уравнения (1).

Вторая схема исследования уравнения (2) носит дискретный характер. Опишем ее. Разобьем промежуток [0,1] точками $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n = 1$. Пусть

$\delta = max\,(\lambda_{i+1} - \lambda_i)$ (для всех $i = \overline{1,n}$).

Если δ достаточно мало, то естественно предположить, что точка x_0 будет близка к решению $x\,(\lambda_1)$ уравнения

$A(x;\lambda_1) = 0.$

Принимая это решение x_1 в качестве начального приближения, какой-либо итерационной процедуры (например, метода Ньютона), находим с достаточной степенью точности приближение $x\,(\lambda_2)$, как решение уравнения

$A(x\,;\lambda_2) = 0$

с начальным условием x_1 и т. д.

Продолжая итерационный процесс, на последнем шаге найдем с нужной степенью точности решение $x\,(1)$ уравнения (1). Предложенные схемы нуждаются в обосновании. Так, например, для их реализации желательны теоремы существования решений уравнений (2) при всех λ.

Заметим, что наиболее распространенный способ построения однопараметрического семейства решений уравнений (2) имеет вид

$\lambda\,A(x) + (1-\lambda)B(x) = 0,$

(так называемая линейная параметризация), где эталонное уравнение

$B(x) = 0$

конструируется на основе априорной информации об уравнении (1).

Одна из наиболее общих и эффективных схем применения гомотопического метода к качественному исследованию операторных уравнений вида

$x - C(x) = 0$ (4)

с вполне непрерывным оператором C принадлежит Лере и Шаудеру.

В этой схеме параметр λ включается линейно, т.е. рассматривается семейство уравнений

$x - \lambda\,C(x) = 0 \quad (0 \le \lambda \le 1).$ (5)

Если при всех $\lambda \in [0,1]$ решение $x(\lambda)$ уравнения (5) удовлетворяет общей априорной оценке

$$\|x(\lambda)\| \le r \;\; (0 \le \lambda \le 1),$$

то уравнение (5) (и, в частности, изучаемое уравнение (4)) разрешимы.

Доказательство этого утверждения базируется на введенном Лере и Шаудером топологическом инварианте – степени отображения.

Настоящая работа освящает приложения гомотопического метода к исследованию вариационных (экстремальных) задач и носит обзорный характер.

Заметим, что если в процессе деформации вариационной задачи ее экстремаль является изолированной и при каком-либо значении параметра деформации эта экстремаль реализует минимум, то она реализует минимум исследуемой вариационной задачи при всех значениях параметра.

Важным аппаратом исследования и доказательства деформационных теорем является теория индекса Конли и условия его гомотопической инвариантности. Излагаются схемы применения этого метода в различных областях нелинейного анализа (задачи нелинейного программирования, многокритериальные задачи, задачи вариационного исчисления, задачи оптимального управления, теории бифуркаций и другие).

Примеры применения гомотопического метода исследования экстремальных задач

1. Задачи классического анализа

1.1. Доказательство неравенств (общие принципы)

Многие важные неравенства конечномерного нелинейного анализа имеют вид

$f_1\,(x) \ge 0, \quad (x \in R^N)$ (1.1)

где $f_1\,(0) = 0$ и f_1 дифференцируема при $x \ne 0$.

Гомотопический метод является эффективным приемом доказательства как ряда известных, так и новых неравенств вида (1.1).

[1] Numerical study of stochastic disturbances on the behavior of solutions of Lorentz system / A. N. Firsov, I. N. Inovenkov, V. V. Tikhomirov, V. V. Nefedov // 3rd International Symposium on Automation, Information and Computing (ISAIC 2022). Beijing Jiaotong University, 09-11 Dec 2022. Article number: ISAIC-MS-2439. URL: https://www.isaic-conf.com/eposters/ISAIC-MS-2439_Vladimir%20V.%20Nefedov.pdf (дата обращения: 24.08.2022).

Для применения этого метода часто бывает удобна его следующая трактовка.

Теорема 1.1. Пусть функция $f_0 : R^N \to R$ является растущей и

$$(1-\lambda)\nabla f_0(x) + \lambda \nabla f_1(x) \neq 0, (x \neq 0,\ 0 \leq \lambda < 1) \quad (1.2)$$

тогда справедливо неравенство (1.1).

2. Задачи нелинейного программирования

2.1. Экстремали классических задач нелинейного программирования

Пусть $g_i : R^N \to R$ $(i = \overline{1,m})$ – локально Липшицевы функции. Рассмотрим Лебеговы множества Q_i этих функций:

$$Q_i = \{x \in R^N : g_i(x) \leq 0\} \quad (i = 1, \dots, m) \quad (2.1)$$

и положим $Q = \bigcap_{i=1}^m Q_i$. (2.2)

Рассмотрим далее задачу минимизации локально липшицевой функции f на множестве Q. Эту задачу принято записывать в виде

$$\begin{cases} f(x) \to min, \\ g_i(x) \leq 0,\ (i = \overline{1,m}). \end{cases} \quad (2.3)$$

Задачу (2.3) называют *задачей нелинейного* или *математического программирования* [13-16].

Точку $x_* \in Q$ называют **экстремалью** задачи (2.3), если существуют неотрицательные числа $\mu, y_1, \dots, y_m$, не все равные нулю, для которых

$$0 \in \mu \partial f(x_*) + y_1 \partial g_1(x_*) + \dots + y_m \partial g_m(x_*) \quad (2.4)$$

и $y_i g_i(x_*) = 0$ $(i = \overline{1,m})$. (2.5)

Точка x_* называется точкой *локального минимума* в задаче (2.3), если $x_* \in Q$ и для некоторого $\rho > 0$

$$f(x) \geq f(x_*) \quad (x \in Q \cap B(\rho, x_*)). \quad (2.6)$$

Отметим, что функция

$$\mathcal{L}(x,\mu,y) = \mu f(x) + (y, G(x)), \text{где } G(x) = \{g_1(x), \dots, g_m(x)\} \quad (2.7)$$

называется *функцией Лагранжа.*

Следующее утверждение составляет содержание теоремы Джона-Куна-Таккера (необходимое условие).

Утверждение. Если x_* – точка локального минимума в задаче (2.3), то существуют не равные одновременно нулю множители Лагранжа $\mu \geq 0$, $y \in R_+^N$, для которых

$$\mathcal{L}_x(x,\mu,y) = 0 \quad (2.8)$$

и $y_i g_i(x_*) = 0$ $(i = \overline{1,m})$. (2.5)

2.2. Деформационная теорема

Пусть f_0, g_0 локально Липшицевы функционалы. Рассмотрим задачу нелинейного программирования

$$\begin{cases} f_0(x) \to min, \\ g_i^0(x) \leq 0, (i = \overline{1,m}) \end{cases} \quad (2.9)$$

Определение. Однопараметрическое семейство задач

$$\begin{cases} f(x;\lambda) \to min, \\ g(x;\lambda) \leq 0,\ (0 \leq \lambda \leq 1) \end{cases} (2.10)$$

назовем *невырожденной деформацией* задачи (2.9) в задачу

$$\begin{cases} f_1(x) \to min, \\ g_i^1(x) \leq 0,\ (i = \overline{1,m}) \end{cases} \quad (2.11)$$

если:

1) функции $f(\cdot;\cdot)$, $g(\cdot;\cdot)$ непрерывны на $R^N \times [0,1]$ и локально липшицевы по x при каждом $\lambda \in [0,1]$;

2) многозначные отображения

$\partial_x f(\cdot;\cdot)$: $R^N \times [0,1] \to R^N$,

$\partial_x g(\cdot;\cdot)$: $Q(\lambda) \times [0,1] \to R^N$,

$$Q(\lambda) = \{x \in R^N : g(x;\lambda) \leq 0,\ (0 \leq \lambda \leq 1)\}$$

полунепрерывны сверху.

3) при каждом $\lambda \in [0,1]$ ограничение в задаче (2.10) удовлетворяет следующим условиям регулярности:

(A) для каждого x, при котором $g(x;\lambda) = 0$ и каждого $v \in R^N$ обобщенная производная $g^0(x,v;\lambda)$ совпадает с классической производной по направлению v:

$$g^0(x,v;\lambda) = g'(x,v;\lambda) \text{и}$$
$$0 \notin \partial_x g(x;\lambda) \leq 0 (0 \leq \lambda \leq 1);$$

4) при каждом $\lambda \in [0,1]$ задача (2.10) имеет единственную экстремаль $x(\lambda)$, непрерывно зависящую от параметра $\lambda \in [0,1]$;

5) $f(\cdot;0) = f_0$, $g(\cdot;0) = g_0$, $f(\cdot;1) = f_1$, $g(\cdot;1) = g_1$,

Теорема 2.1. Пусть однопараметрическое семейство задач нелинейного программирования (2.10) является невырожденной деформацией задачи (2.9) в задачу (2.11). Пусть экстремаль x_0 реализует локальный минимум в задаче (2.9). Тогда экстремаль x_1 реализует минимум в задаче (2.9).

3. Задачи вариационного исчисления

3.1. Одномерные задачи вариационного исчисления

Рассмотрим простейший функционал вариационного исчисления

$$f(x) = \int_0^T F(t, x(t), x'(t))dt, \quad (3.1)$$

который рассмотрим на гильбертовом пространстве

$$\dot{W}_2^m[0,T\}$$

абсолютно непрерывных функций $x(t) (0 \leq t \leq T)$, удовлетворяющих условию $x(0) = x(T) = 0$, производные которых суммируемы с квадратом. Скалярное произведение в $\dot{W}_2^m[0,T]$ определим равенством

$$(x, y) = \int_0^T x'(t)y'(t)\,dt. \quad (3.2)$$

Предположим, что лагранжиан $F(t,x,p;\lambda)$ непрерывен по совокупности переменных $t \in [0,T]$, x, $p \in R$, $\lambda \in [0,1]$ вместе с производными по x, p до второго порядка включительно. Предположим также, что при каждом $\lambda \in [0,1]$ лагранжиан $F(t,x,p;\lambda)$ удовлетворяет оценкам:

$$|F| + |F'_x| + |F''_{xx}| \leq c(1 + p^2), \quad (3.3)$$
$$|F'_p| + |F''_{xp}| \leq c(1 + |p|), \quad (3.4)$$
$$\alpha \leq |F''_{pp}| \leq c, \quad (3.5)$$

где α и c положительные константы [17-19].

Теорема 3.1. Пусть при каждом $\lambda \in [0, 1]$ уравнение Эйлера функционала (3.1)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F(t,x(t),x'(t);\lambda)}{\partial p} - \frac{\partial F(t,x(t),x'(t);\lambda)}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

имеет единственное решение $x(t,\lambda)$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0,\lambda) = x(T,\lambda) = 0$. (3.7)

Пусть функция $x_0 = x(\cdot, 0)$ реализует локальный минимум в $W_2^1[0,T]$ функционала $f_0 = f(\cdot, 0)$. Тогда функция $x_1 = x(\cdot, 1)$ реализует локальный минимум в $W_2^1[0,T]$ функционала $f_1 = f(\cdot, 1)$.

3.2. Многомерные интегральные функционалы

Пусть Ω – ограниченная область в R^N с гладкой границей, а $\dot{W}_2^m(\Omega)$ – пространство Соболева функций $u(x)$ $(x \in \Omega)$, имеющая обобщенные производные до порядка m, суммируемые с квадратом, и нулевой след на границе $\partial\Omega$ области Ω вместе с производными до порядка $m-1$.

Рассмотрим на $\dot{W}_2^m(\Omega)$ интегральный функционал

$$f(u) = \int F(x, u(x), Du(x), \dots, D^m u(x))\,dx. \quad (3.8)$$

Здесь $D^\kappa u(x) = \{D^\alpha u(x) : |\alpha| = k\} (k = \overline{1,m})$.

Предположим, что интегрант

$$F(x,\xi)\{x \in \Omega, \xi_\alpha\colon |\alpha| \le m\} \in \mathrm{R}^{\mathrm{M}}$$

непрерывен по совокупности переменных вместе с первыми и вторыми производными по $\xi \in \mathrm{R}^{\mathrm{M}}$. Пусть, кроме того, выполнены оценки

$$\left|\frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}\right| \le C\left(1 + \sum_{m-\left(\frac{N}{2}\right) \le |\gamma| \le m} \left|\xi_\gamma\right|^{p_\gamma}\right)^{p_{\alpha\beta}}. \qquad (3.9)$$

Здесь:

p_γ – произвольное положительное число, если $\gamma = m - \frac{N}{2}$;

p_γ =2N/N−2(m−$|\gamma|$)), если $m - \frac{N}{2} < |\gamma| < m$;

$p_{\alpha\beta} = 1 - p_\alpha^{-1} - p_\beta^{-1}$, если $|\alpha| = |\beta| = m$;

$p_{\alpha\beta} = 1 - p_\alpha^{-1}$, если $m - \frac{N}{2} < |\alpha| < m$;

$p_{\alpha\beta} = 1$, если $|\alpha|, |\beta| > m - \frac{N}{2}$, $|\alpha| + |\beta| < 2m$.

В этом случае функционал f дифференцируем по Фреше на $\dot{W}_2^m(\Omega)$, а его градиент ∇f удовлетворяет условию Липшица на каждом шаре пространства $\dot{W}_2^m(\Omega)$.

Если, кроме того, выполнена оценка

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} \frac{\partial^2 F}{\partial \xi_\alpha \partial \xi_\beta}\eta_\alpha \eta_\beta \ge c\sum_{|\alpha|=m} \eta_\alpha^2 \qquad (3.10)$$

$$(c > 0,\ \ x \in \Omega, \xi \in \mathrm{R}^{\mathrm{M}},\ \eta = \{\eta_\alpha\colon |\alpha| = m\}),$$

то градиент функционала f обладает $(S)_+$– свойством.

Деформационный принцип

Рассмотрим на $\dot{W}_2^m(\Omega)$ однопараметрическое семейство интегральных функционалов (в области Ω)

$$f(u;\lambda) = \int F(x, u(x), \mathrm{D}u(x), \dots, D^m u(x); \lambda)\, dx, \quad (3.11)$$

где $u \in \dot{W}_2^m(\Omega)$, $0 \le \lambda \le 1$.

Предположим, что интегрант $F(x,\xi;\lambda)$ непрерывен по совокупности переменных $x \in \Omega, \xi \in \mathrm{R}^{\mathrm{M}}$, $\lambda \in [0,1]$ вместе с производными по ξ до второго порядка включительно. Пусть при каждом $\lambda \in [0,1]$ интегрант $F(x,\xi;\lambda)$ функционала (3.11) удовлетворяет оценкам (3.9), (3.10).

Справедлива следующая (деформационная) теорема.

Теорема 3.2. Пусть при каждом $\lambda \in [0,1]$ задача Дирихле для уравнения Эйлера функционала (3.11)

$$\sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \frac{\partial F}{\partial \xi_\alpha}(x, u(x), \mathrm{D}u(x), \dots, D^m u(x); \lambda) = 0,$$

$$D^\alpha u(x) = 0 \ \text{ при } x \in \Omega \quad (|\alpha| \le m{-}1)$$

имеет единственное обобщенное решение $u(\cdot;\lambda) \in \dot{W}_2^m(\Omega)$.

Пусть функция $u_0 = u(\cdot;0)$ реализует локальный минимум в $\dot{W}_2^m(\Omega)$ функционала $f_0 = f(\cdot;0)$. Тогда функция $u_1 = u(\cdot;1)$ реализует минимум функционала $f_1 = f(\cdot;1)$.

Замечание. Теорема 3.2 обосновывает деформационный принцип минимума для интегральных функционалов, рассматриваемых на гильбертовом пространстве $\dot{W}_2^m(\Omega)$. Аналогичный принцип справедлив для интегральных функционалов, рассматриваемых на банаховых пространствах $\dot{W}_p^m(\Omega)$ $(2 \le p < \infty)$.

4. Устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений

4.1. Устойчивость градиентных систем

Рассмотрим *градиентную систему* обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -\nabla f(x) \quad (x \in R^N), \qquad (4.1).$$

где $f\colon R^N \to R$ – непрерывно дифференцируемая функция.

Пусть $\nabla f(0)$=0. Тогда ноль – состояние равновесия.

Теорема 4.1. Нулевое состояние равновесия системы (4.1) устойчиво по Ляпунову в том, и только в том случае, если ноль – точка локального минимума функции $f(x)$.

4.2. Устойчивость гамильтоновых систем

Рассмотри гамильтонову систему

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \frac{\partial H(x,y)}{\partial x}, \\ \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial H(x,y)}{\partial y}. \end{cases} \qquad (4.2)$$

Здесь $x, y \in R^N$, $H\colon R^N x R^N \to R$ – гладкая функция, называемая гамильтонианом системы.

Пусть

$$\frac{\partial H(0,0)}{\partial x} = \frac{\partial H(0,0)}{\partial y} = 0.$$

Тогда точка (0,0) $\in R^N x R^N$ является состоянием равновесия системы (4.2). В силу теоремы Дирихле, это состояние равновесия устойчиво по Ляпунову, если точка (0,0) является точкой локального минимума гамильтониана H.

Для исследования устойчивости состояний равновесия гамильтоновых систем можно применить гомотопический метод [2], [20-25].

Заключение

Таким образом, рассмотренные примеры показывают большую эффективность при исследовании экстремальных задач нелинейных динамических систем.

Список использованных источников

[1] Устойчивость системы Лоренца / В. В. Нефедов, В. В. Тихомиров, Р. Р. Исаев, А. В. Мальцева // Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики : Сборник трудов Международной научной конференции. Воронеж : ООО «Вэлборн», 2022. С. 90-98. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49273907 (дата обращения: 24.08.2022).

[2] Smol'yakov E. R. An Efficient Method for Stability Analysis of Highly Nonlinear Dynamic Systems // Cybernetics and Systems Analysis. 2019. Vol. 55, issue 4. P. 531-538. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-019-00161-4

[3] Бобылев Н. А. Деформационный метод исследования задач нелинейного программирования. II // Автоматика и телемеханика. 1989. № 8. С. 24-33. URL: https://www.mathnet.ru/links/9648e225acb9e506e8b693e3fd53b121/at6364.pdf (дата обращения: 24.08.2022).

[4] Бобылев Н. А., Коровин С. К., Скалыга В. И. О гомотопическом методе исследования многокритериальных задач // Автоматика и телемеханика. 1996. № 10. С. 168-178. URL: https://www.mathnet.ru/links/ae64c4881f582c03d795fa7aef44d8ec/at3506.pdf (дата обращения: 24.08.2022).

[5] Бобылев Н. А., Емельянов С. В., Коровин С. К. Об одном подходе к исследованию вариационных задач // Дифференциальные уравнения. 2001. Т. 37, № 11. С. 1453-1461. URL: https://www.mathnet.ru/links/62c6831d6a6c7e000714ccf3fa7e8eab/de10480.pdf (дата обращения: 24.08.2022).

[6] Skopin V. A. The Equivalence of Causal and Ordinary Invertibility for Integral Convolution Operators // Differential Equations. 2001. Vol. 37, issue 9. P. 1331-1339. doi: https://doi.org/10.1023/A:1012538216183

[7] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Теория типа Морса для интегрируемых гамильтоновых систем с ручными интегралами // Математические заметки. 1988. Т. 43, № 5. С. 663-671. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=18231329 (дата обращения: 24.08.2022).

[8] Нефедов В. В., Тихомиров В. В., Максимова Я. Д. Устойчивость системы Валлиса // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 1. С. 13-19. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202201.13-19

[9] Численное исследование влияния стохастических возмущений на поведение решений некоторых дифференциальных уравнений / А. Н. Фирсов, И. Н. Иновенков, В. В. Тихомиров, В. В. Нефедов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 1. С. 37-43. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202101.730

[10] Устойчивость системы Лоренца / В. В. Тихомиров, Р. Р. Исаев, А. В. Мальцева, В. В. Нефедов // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 2. С. 241-249. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.241-249

[11] Нефедов В. В., Тихомиров В. В., Исаев Р. Р. Оптимизация системы уравнений Лоренца // Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы : Сб. материалов межд. конф. Белгород : БелГУ, 2021. С. 197. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49839790 (дата обращения: 24.08.2022).

[12] Chen X. Lorenz Equations Part I: Existence and Nonexistence of Homoclinic Orbits // SIAM Journal on Mathematical Analysis. 1996. Vol. 27, issue 4. P. 1057-1069. doi: https://doi.org/10.1137/S0036141094264414

[13] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields // Applied Mathematical Sciences. Vol. 42. New York, NY : Springer, 1983. 462 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2

[14] Liao S. Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations. Springer Berlin, Heidelberg, 2012. 400 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-25132-0

[15] Marinca V., Herişanu N. Nonlinear dynamic analysis of an electrical machine rotor-bearing system by the optimal homotopy perturbation method // Computers & Mathematics with Applications. 2011. Vol. 61, issue 8. P. 2019-2024. doi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.08.056

[16] Kalantarov V. K., Yilmaz Y. Decay and growth estimates for solutions of second-order and third-order differential-operator equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications. 2013. Vol. 89. P. 1-7. doi: https://doi.org/10.1016/j.na.2013.04.016

[17] Shil'nikov A., Shil'nikov L., Turaev D. Normal forms and Lorenz attractors // International Journal of Bifurcation and Chaos. 1993. Vol. 03, no. 05. P. 1123-1139. doi: https://doi.org/10.1142/S0218127493000933

[18] Sparrou C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors // Applied Mathematical Sciences. Vol. 41. New York, NY: Springer, 1982. 270 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5767-7

[19] Нефедов В. В., Тихомиров В. В. Об одном вариационном методе исследования устойчивости системы Валлиса // Тихоновские чтения. М. : ООО «МАКС Пресс», 2022. С. 24-25. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=49717862 (дата обращения: 24.08.2022).

[20] He X.-Q., Jia W. J. Homotopy perturbation method for solving singular linear quadratic optimal control problems // 2016 35th Chinese Control Conference (CCC). Chengdu, China : IEEE Computer Society, 2016. P. 2505-2509. doi: https://doi.org/10.1109/ChiCC.2016.7553740

[21] Ghomanjani F., Ghaderi S., Farahi M. H. Solving the Optimal Control of Linear Systems via Homotopy Perturbation Method // Intelligent Control and Automation. 2012. Vol. 3, issue 1. P. 26-33. doi: https://doi.org/10.4236/ica.2012.31004

[22] Saberi Nik H., Effati S., Yildirim A. Solution of linear optimal control systems by differential transform method // Neural Computing & Applications. 2013. Vol. 23, issue 5. P. 1311-1317. doi: https://doi.org/10.1007/s00521-012-1073-4

[23] Marinca V., Herisanu N. Optimal Homotopy Asymptotic Method // The Optimal Homotopy Asymptotic Method. Cham : Springer, 2015. P. 9-22. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-15374-2_2

[24] Qiu Z., Jiang N. A symplectic homotopy perturbation method for stochastic and interval Hamiltonian systems and its applications in structural dynamic systems // Computational and Applied Mathematics. 2022. Vol. 41, issue 8. P. 363. doi: https://doi.org/10.1007/s40314-022-02079-8

[25] Analysis Method For Oscillatory Systems With Cubic and Trigonometric Non-Linearity / S. J. Patil [и др.] // Computational Mathematics, Nanoelectronics, and Astrophysics. CMNA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics ; ed. by S. Mukherjee, A. Datta, S. Manna, S. K. Sahoo. Vol. 342. Singapore : Springer, 2021. P. 25-45. doi: https://doi.org/10.1007/978-981-15-9708-4_3

Поступила 24.08.2022; одобрена после рецензирования 11.10.2022; принята к публикации 26.11.2022.

Об авторах:

Нефедов Владимир Вадимович, доцент кафедры автоматизации научных исследований факультета вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4602-5070,** vv_nefedov@mail.ru

Тихомиров Василий Васильевич, доцент кафедры общей математики факультета вычислительной математики и кибернетики, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова» (119991, Российская Федерация, г. Москва, ГСП-1, Ленинские горы, д. 1), кандидат физико-математических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5569-1502,** zedum@cs.msu.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Tikhomirov V.V., Isaev R.R., Maltseva A.V., Nefedov V.V. [Stability of the Lorentz System]. In: Proceedings of the International Conference on Applied Mathematics, Computational Science and Mechanics: Current Problems. Wellborn LLC, Voronezh; 2022. p. 90-98. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=49273907 (accessed 24.08.2022). (In Russ.)

[2] Smol'yakov E.R. An Efficient Method for Stability Analysis of Highly Nonlinear Dynamic Systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2019;55(4):531-538. doi: https://doi.org/10.1007/s10559-019-00161-4

[3] Bobylyov N.A. A Deformational Approach to Investigation of Nonlinear Programming Problems. II. *Avtomatika i Telemehanika*. 1989;(8):24-33. Available at: https://www.mathnet.ru/links/9648e225acb9e506e8b693e3fd53b121/at6364.pdf (accessed 24.08.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[4] Bobylev N.A., Korovin S.K., Skalyga V.I. A homotopic method of studying multivalued problems. *Automation and Remote Control*. 1996;57(10):1513-1521.

[5] Bobylev N.A., Emel'yanov S., Korovin S.K. An Approach to Variational Problems. *Differential Equations.* 2001;37(11):1526-1534. doi: https://doi.org/10.1023/A:1017904429352

[6] Skopin V.A. The Equivalence of Causal and Ordinary Invertibility for Integral Convolution Operators. *Differential Equations*. 2001;37(9):1331-1339. doi: https://doi.org/10.1023/A:1012538216183

[7] Matveev S.V., Fomenko A.T. Morse-type theory for integrable Hamiltonian systems with tame integrals. *Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR*. 1988;43(5):382-386. doi: https://doi.org/10.1007/BF01158846

[8] Nefedov V.V., Tikhomirov V.V., Maximova Ya.D. Stability of the Vallis System. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022;18(1):13-19. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202201.13-19

[9] Firsov A.N., Inovenkov I.N., Tikhomirov V.V., Nefedov V.V. Numerical Study of the Effect of Stochastic Disturbances on the Behavior of Solutions of Some Differential Equations. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2021;17(1):37-43. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202101.730

[10] Tikhomirov V.V., Isaev R.R., Maltseva A.V., Nefedov V.V. Stability of the Lorentz System. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021;17(2):241-249. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.241-249

[11] Nefedov V.V., Tikhomirov V.V., Isaev R.R. [Optimization of the system of Lorentz equations]. In: Proceedings of the International Conference on Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms. BSU Publ., Belgorod; 2021. p. 197. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=49839790 (accessed 24.08.2022). (In Russ.)

[12] Chen X. Lorenz Equations Part I: Existence and Nonexistence of Homoclinic Orbits. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*. 1996;27(4):1057-1069. doi: https://doi.org/10.1137/S0036141094264414

[13] Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields. Applied Mathematical Sciences. Vol. 42. Springer, New York, NY; 1983. 462 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1140-2

[14] Liao S. Homotopy Analysis Method in Nonlinear Differential Equations. Springer Berlin, Heidelberg; 2012. 400 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-642-25132-0

[15] Marinca V., Herişanu N. Nonlinear dynamic analysis of an electrical machine rotor-bearing system by the optimal homotopy perturbation method. *Computers & Mathematics with Applications*. 2011;61(8):2019-2024. doi: https://doi.org/10.1016/j.camwa.2010.08.056

[16] Kalantarov V.K., Yilmaz Y. Decay and growth estimates for solutions of second-order and third-order differential-operator equations. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*. 2013;89:1-7. doi: https://doi.org/10.1016/j.na.2013.04.016

[17] Shil'nikov A., Shil'nikov L., Turaev D. Normal forms and Lorenz attractors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 1993;03(05):1123-1139. doi: https://doi.org/10.1142/S0218127493000933

[18] Sparrou C. The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors. *Applied Mathematical Sciences*. Vol. 41. Springer, New York, NY; 1982. 270 p. doi: https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5767-7

[19] Nefedov V.V., Tikhomirov V.V. [On one variational method for studying the stability of the Wallis system]. In: Proceedings of the International Conference on Tikhonovskie chteniya. MSU, MAKS Press, Moscow; 2022. p. 24-25. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=49717862 (accessed 24.08.2022). (In Russ.)

[20] He X.-Q., Jia W.J. Homotopy perturbation method for solving singular linear quadratic optimal control problems. In: 2016 35th Chinese Control Conference (CCC). IEEE Computer Society, Chengdu, China; 2016. p. 2505-2509. doi: https://doi.org/10.1109/ChiCC.2016.7553740

[21] Ghomanjani F., Ghaderi S., Farahi M.H. Solving the Optimal Control of Linear Systems via Homotopy Perturbation Method. *Intelligent Control and Automation*. 2012;3(1):26-33. doi: https://doi.org/10.4236/ica.2012.31004

[22] Saberi Nik H., Effati S., Yildirim A. Solution of linear optimal control systems by differential transform method. *Neural Computing & Applications*. 2013;23(5):1311-1317. doi: https://doi.org/10.1007/s00521-012-1073-4

[23] Marinca V., Herisanu N. Optimal Homotopy Asymptotic Method. In: The Optimal Homotopy Asymptotic Method. Springer, Cham; 2015. p. 9-22. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-319-15374-2_2

[24] Qiu Z., Jiang N. A symplectic homotopy perturbation method for stochastic and interval Hamiltonian systems and its applications in structural dynamic systems. *Computational and Applied Mathematics*. 2022;41(8):363. doi: https://doi.org/10.1007/s40314-022-02079-8

[25] Patil S.J., Kashyap A.R.V., Kolwankar K.M. Homotopy Analysis Method For Oscillatory Systems With Cubic and Trigonometric Non-Linearity. In: Mukherjee S., Datta A., Manna S., Sahoo S.K. (eds.) Computational Mathematics, Nanoelectronics, and Astrophysics. CMNA 2018. Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. Vol. 342. Springer, Singapore; 2021. p. 25-45. doi: https://doi.org/10.1007/978-981-15-9708-4_3

Submitted 24.08.2022; approved after reviewing 11.10.2022; accepted for publication 26.11.2022.

About the authors:

Vladimir V. Nefedov, Associate Professor of the Chair of Automation for Scientific Research, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4602-5070,** vv_nefedov@mail.ru

Vasiliy V. Tikhomirov, Associate Professor of the Chair of General Mathematics, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University (1 Leninskie gory, Moscow 119991, GSP-1, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5569-1502,** zedum@cs.msu.ru

All authors have read and approved the final manuscript.