УДК 512.643
DOI: 10.25559/SITITO.18.202203.578-588

Оригинальная статья

Сингулярное разложение пространственных матриц

П. Л. Ильин*, **Т. А. Самойлова**
ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет», г. Смоленск, Российская Федерация
Адрес: 214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4
* zub.dayu@mail.ru

Аннотация

Сингулярное разложение матриц – базовый строительный блок, используемый в решениях многих прикладных задач. В случаях, когда размерность задачи превышает два, прибегают к обобщениям сингулярного разложения – тензорным разложениям. Однако, разложения тензоров не всегда хорошо работают. Именно поэтому в данной статье предложено рассмотреть естественное обобщение алгоритма сингулярного разложения плоских матриц на пространственные матрицы. Перечислены задачи, успешно решенные с помощью алгебры многомерных матриц, а также примеры алгоритмов, получившие естественное обобщение на алгебру многомерных матриц. Приводится определение сингулярного разложения для плоских матриц, перечислены свойства данного разложения. Приводятся необходимые понятия алгебры многомерных матриц, данные в работе Н. П. Соколова; помимо этого, вводится пара новых определений, после чего на основании желаемых свойств и данных определений формулируются требования к искомому разложению. Предлагается способ нахождения сингулярного разложения пространственных матриц, использующий идеи разбиения матрицы на сечения; данный подход позволяет свести решаемую задачу к нахождению сингулярных разложений плоских матриц. Доказывается сохранение свойств данного разложения, приводится пример подобного разложения, после чего выдвигаются идеи о возможностях его применения и дальнейшего обобщения на случай произвольной размерности исходной матрицы.

Ключевые слова: алгебра многомерных матриц, (λ,μ)-свернутое произведение, матричное разложение, сингулярное разложение

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Ильин П. Л., Самойлова Т. А. Сингулярное разложение пространственных матриц // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 3. С. 578-588. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.578-588

Original article

Singular Value Decomposition of Spatial Matrices

P. L. Iljin*, T. A. Samoilova
Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation
Address: 4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation
* zub.dayu@mail.ru

Abstract

Singular value decomposition is a basic building block which is used in solution of many different problems. In cases when dimensionality of a problem exceeds two, a generalization of a singular value decomposition – tensor decompositions – are used. There is only one problem: the usage of tensor decompositions is not a good option in some cases. That is the reason why we propose to consider a generalization of a singular value decomposition on spatial matrices. In this article, the singular value decomposition of a spatial matrix is considered. Examples of tasks which can be successfully solved using multidimensional matrix algebra and examples of algorithms which have a natural generalization to multidimensional matrix algebra are given. Definition of the singular value decomposition is given and its properties are listed. Next, definitions of necessary concepts of multidimensional matrix algebra which were defined in Sokolov's research work are given; also, there are a couple of new definitions which are first formulated in this article. Thereafter, requirements for the sought decomposition are formulated based on desired properties of it. A method of creation the singular value decomposition of a spatial matrix is given; the method uses an idea of slicing a spatial matrix. This approach makes it possible to reduce the problem of finding the singular value decomposition of a spatial matrix to finding such decompositions for flat matrices. The property retention of such a decomposition is proved, and an example of this decomposition is given.Finally, ideas of applying the decomposition to problem solving are given and ideas of future work are proposed.

Keywords: multidimensional matrix algebra, (λ, μ)-convolution product, matrix decomposition, singular value decomposition

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Iljin P.L., Samoilova T.A. Singular Value Decomposition of Spatial Matrices. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2022;18(3):578-588. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.578-588

Введение

Авторы [1, 2] утверждают, что программно-аппаратный комплекс решает задачу наиболее эффективно тогда, когда он полностью реализовывает алгебру, в которой описана её математическая модель. Алгебра многомерных матриц может быть использована как модель данных для решения задачи из самых разных предметных областей. В [3] авторы доказывают гомоморфизм между алгеброй многомерных матриц и реляционной алгеброй, что породило новый подход к распараллеливанию запросов в базах данных. Авторы [4] вывели полиномиальные алгоритмы для вывода ассоциативных правил и маршрутизации. Некоторые матричные алгоритмы шифрования (шифр Хилла [5] и алгоритм Диффи-Хеллмана) удалось удачно обобщить с помощью алгебры многомерных матриц, получи значительное усиление их показателей стойкости. Алгебра многомерных матриц удачно подходит для построения цепей Маркова [6] и решения задач на графах [7]. В [8] автор получает математическую модель операций свертки на основе алгебры многомерных матриц с операцией (0, μ)-свернутого произведения. Автор [9] применяет алгебру многомерной матрицы для исследования гиперграфов.

Все вышеприведенные примеры демонстрируют, как естественное обобщение уже известных алгоритмов на алгебру многомерных матриц позволило улучшить их характеристики или получить гибкий инструмент для решения более широкого круга задач. Продолжить подобную тенденцию можно рассмотрев обобщение алгоритма сингулярного разложения плоских матриц, являющегося важным инструментом в решении множества задач из различных областей науки: математики и информатики, физики, биологии, социологии и т.д.

Сингулярное разложение плоских матриц

Сингулярное разложение – это один из видов факторизации матрицы, позволяющий представить вещественную матрицу A размера $n \times n$ в виде произведения трех матриц.

***Теорема* 1.**

Для любой вещественной матрицы A $n \times n$ существуют две вещественные ортогональные матрицы $n \times n$, обозначаемые U и V такие, что

$$U^T A V = \Sigma \tag{1}$$

и матрица Σ – диагональная матрица.

Данная теорема хорошо известна и доказывается многими авторами; например, в работе[1].

Следствие.

Умножив обе части (1) слева на U и справа на V^T, получим сингулярное разложение матрицы A:

$$A = U \Sigma V^T. \tag{2}$$

Данное разложение имеет расширение. В случае, когда A – матрица с комплексными элементами, равенство (2) можно переписать в виде:

$$A = U \Sigma V^*, \tag{3}$$

где U – унитарная матрица $m \times m$, Σ – диагональная матрица $m \times n$ с действительными элементами, V – унитарная матрица $n \times n$, а знак * обозначает эрмитово сопряжение. Иногда рассматривают так называемый экономный вариант разложения, в котором U имеет размер $m \times r$, Σ – размер $r \times r$, а V – размер $r \times n$, где $r = \min\{m, n\}$.

Данное разложение связано с задачей отыскания собственных значений и собственных векторов матрицы. Так как U и V ортогональны, справедливы равенства:

$$AA^T = U\Sigma V^T V \Sigma U^T = U \Sigma^2 U^T$$

$$A^T A = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T$$

Умножив оба выражения справа на U и V соответственно, получим:

$$AA^T U = U \Sigma^2$$

$$A^T A V = V \Sigma^2$$

Анализируя эти равенства, заключаем, что столбцы матрицы U являются собственными векторами матрицы AA^T, столбцы матрицы V – собственными векторами матрицы $A^T A$, а значения матрицы Σ – корнями соответствующих собственных значений матриц AA^T либо $A^T A$.

Свойства сингулярного разложения:

1) матрица А должна представлять собой произведение трех матриц U, Σ и V^T;
2) матрицы U и V должны быть ортогональны;
3) матрица Σ должна иметь ненулевыми элементами только сингулярные значения, расположенные на главной диагонали;
4) столбцы U и V составляют собственные векторы матриц AA^T и $A^T A$ соответственно.

Далее, перед изложением идеи сингулярного разложения пространственных матриц, введём необходимые в определения.

Элементарные понятия алгебры многомерных матриц

Многомерной матрицей размерности p назовем любую систему из $n_1 n_2 \ldots n_p$ элементов $A_{n_1 n_2 \ldots n_p}$ $(i_\alpha = 1, 2, \ldots, n_\alpha;$ $\alpha = 1, 2, \ldots, p)$. Полагая для простоты, но без нарушения общности, $n_1 = n_2 = \ldots = n_p = n$, имеем p-мерную матрицу порядка n:

$$A = \left\| A_{i_1 i_2 \ldots i_p} \right\| \ (i_1, i_2, \ldots, i_p = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Пространственной назовём матрицу, для которой $p = 3$.

Совокупность элементов матрицы (4) с фиксированными $\overline{i_\alpha}$ значениями индекса i_α $(1 \le \alpha \le p)$ образует простое сечение ориентации (i_α), являющееся $(p-1)$-мерной матрицей порядка n[2].

Матрица $A' = \left\| A'_{i_1 i_2 \ldots i_p} \right\|$, элементы которой связаны с элементами матрицы (4) соотношением $A'_{i_1 i_2 \ldots i_p} = A_{i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} \ldots i_{\alpha_p}}$, где $i_{\alpha_1}, i_{\alpha_2}, \ldots, i_{\alpha_p}$ – какая-нибудь перестановка из значений

[1] Forsythe G. E., Mole, C. B. Computer solution of linear algebraic systems. Englewood Cliffs, N. J. : Prentice-Hall, Inc., 1967. 148 p.

[2] Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев : Наукова думка, 1972. 176 с.

индексов $i_1, i_2, ..., i_p$, называется транспонированной относительно матрицы (4) соответственно подстановке $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \dots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}$. Обозначим её $A^{\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \dots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}}$[3].

Центральная операция алгебры многомерных матриц

Пусть матрицы $A = \left\| A_{i_1 \dots i_p} \right\|$ и $B = \left\| B_{i_1 \dots i_q} \right\|$ – p- и q-мерные соответственно. Совокупности индексов этих матриц $i_1, \dots, i_p$ и $i_1, \dots, i_q$ разобьём на четыре группы, содержащие соответственно κ, λ, μ и ν индексов $(\kappa, \lambda, \mu, \nu \geq 0)$, причем:

$$\kappa + \lambda + \mu = p, \ \lambda + \mu + \nu = q. \tag{5}$$

Полученные группы индексов обозначим: $l = (l_1, \dots, l_\kappa)$, $s = (s_1, \dots, s_\lambda)$, $c = (c_1, \dots, c_\mu)$ и $m = (m_1, \dots, m_\nu)$. Тогда матрицы A и B можно представить в виде $A = \left\| A_{lsc} \right\|$ и $B = \left\| B_{csm} \right\|$. Индексы разбиения c называются кэлиевыми, s – скоттовыми, а индексы разбиения m и l – свободными. Матрица $C = \left\| C_{lsm} \right\|$, элементы которой вычисляются по формуле $C_{lsm} = \sum_{(c)} A_{lsc} \times B_{csm}$, называется (λ,μ)-свернутым произведением матриц A и B и обозначается ${}^{\lambda,\mu}(A \times B) = C$[4].

Положим $p = q$. Пусть необходимо, чтобы размерность результирующей для произведения ${}^{\lambda,\mu}(A \times B) = C$ матрицы C была равна p и q. В результате элементарных преобразований, из (5) легко вывести равенство:

$$\kappa + \lambda + \nu = p + q - \tau, \tag{6}$$

где $\tau = \lambda + 2\mu$. Тогда, принимая во внимание (6), имеем следующее условие, связывающее параметры p, q, λ и μ:

$$p = q = \tau = \lambda + 2\mu. \tag{7}$$

Пользуясь разбиениями индексов многомерной матрицы A на группы, предложенными в определении (λ,μ)-свернутого произведения, можно построить способ разделения многомерной матрицы на сечения.

Пусть $A = \left\| A_{i_1 \dots i_p} \right\|$ есть p-мерная матрица порядка n. Введем разбиение индексов A на группы l, s, c. За $s_i = (s_{i_1}, \dots, s_{i_\lambda})$ обозначим зафиксированный набор индексов группы s. Всего имеем n^λ таких наборов. Каждому набору сопоставим $(p - \lambda)$-мерную матрицу $A_{s_i} = \left\| A_{ls_ic} \right\|$, которая является s_i-ым сечением многомерной матрицы A [10] Многомерную матрицу, обладающую скоттовыми индексами, можно представить в виде группы ее скоттовых сечений:

$$D^s(A) = \left\{ A_{s_i} \right\}_{i=1}^{n^\lambda}. \tag{8}$$

Верно и обратное: по группе сечений можно восстановить исходную многомерную матрицу:

$$A = \left(D^s \right)^{-1} \left(\left\{ A_{s_i} \right\}_{i=1}^{n^\lambda} \right). \tag{9}$$

(λ,μ)-свернутое произведение само по себе представляет большой интерес. Например, разные варианты идей работы с сотовыми сечениям для выполнения данной операции предлагались авторами в статьях [8], [11], [12], [13]; однако, углубленное её рассмотрение не является целью данной работы.

E называется (λ,μ)-единичной матрицей порядка n, если она является решением уравнения ${}^{\lambda,\mu}(A \times X) = A$ для произвольной A. Данная матрица является τ-мерной матрицей и обозначается через $E(\lambda, \mu)$[5]. Каждый её элемент равняется символу Кронекера; сама матрица, очевидно, фиксирована при фиксированных λ, μ и n.

Собственные числа и собственные матрицы многомерной матрицы. Сингулярные числа многомерной матрицы

Пусть матрица A есть p-мерная матрица порядка n. Рассмотрим уравнение вида:

$${}^{\lambda,\mu}(A \times X) = \alpha X. \tag{10}$$

Матрицы X, удовлетворяющие данному уравнению, называются (λ,μ)-собственными матрицами для A, а числа α – (λ,μ)-собственными значениями (числами) матрица A.

Обозначим через q количество измерений X; тогда из (10) следует, что $p + q - \tau = q$, т.е. $p = \tau = \lambda + 2\mu$. Соответственно, q может быть произвольным целым, не меньшим $\lambda + \mu$.

Согласно работе[6], элементы X можно получить, решая систему уравнений:

$$\sum_c (A_{lsc} - \alpha E_{lsc}) X_{csm} = O. \tag{11}$$

В работе[7] показано, что (λ,μ)-собственные значения можно определить как корни n^λ характеристических уравнений $\Delta_{0,\mu}^{(h)}(\alpha) = \left| \mathsf{A}_{0,\mu}^{(h)}(\alpha) \right|$, где $\mathsf{A}_{0,\mu}^{(h)}(\alpha)$ – квадратная матрица порядка n^λ, являющаяся $(0, \mu)$-ассоциированной с 2μ-мерной матрицей, представляющей сечение ориентации (s) матрицы A:

$$A_{s_i} = \left\| A_{ls_ic} \right\|, \ (i = 1, 2, \dots, n^\lambda).$$

Таким образом, (λ,μ)-собственные числа матрицы A есть набор $(0,\mu)$-собственных чисел матриц $A^{(h)}$.

Связь сингулярных чисел матрицы A с её (λ,μ)-собственными числами определим аналогично плоским матрицам. (λ,μ)-сингулярными числа матрицы A соответственно подстановке $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \dots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}$ являются корни из собственных значений матрицы ${}^{\lambda,\mu}\left(A \times A^{\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \dots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}}\right)$ или ${}^{\lambda,\mu}\left(A^{\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_p \\ i_{\alpha_1} & i_{\alpha_2} & \dots & i_{\alpha_p} \end{pmatrix}} \times A\right)$.

[3] Там же.
[4] Там же.
[5] Там же.
[6] Там же.
[7] Там же.

Ортогональность многомерных матриц

Матрица A называется (λ,μ)-ортогональной соответственно подстановке $\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \\ i_{\alpha_1} \, i_{\alpha_2} \, \dots \, i_{\alpha_p} \end{pmatrix}$, если результат умножения её на транспонированную соответственно подстановке $\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \\ i_{\alpha_1} \, i_{\alpha_2} \, \dots \, i_{\alpha_p} \end{pmatrix}$ равен $E(\lambda,\mu)$:

$${}^{\lambda,\mu}(A\times A^{\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \\ i_{\alpha_1} \, i_{\alpha_2} \, \dots \, i_{\alpha_p} \end{pmatrix}}) = E(\lambda,\mu).$$

Данное определение является естественным обобщением определения ортогональности плоских матриц на алгебру многомерных матриц.

Примечание 1. Нетрудно убедиться, что и ${}^{\lambda,\mu}(A^{\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \\ i_{\alpha_1} \, i_{\alpha_2} \, \dots \, i_{\alpha_p} \end{pmatrix}}\times A) = E(\lambda,\mu)$ в таком случае также является справедливым равенством.

***Примечание* 2.** Без потери общности данное определение можно расширить, определив аналогичным образом (λ,μ)-унитарную многомерную матрицу соответственно подстановке $\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \\ i_{\alpha_1} \, i_{\alpha_2} \, \dots \, i_{\alpha_p} \end{pmatrix}$.

Сингулярное разложение пространственной матрицы

Идея получения данного разложения родилась из желания построить разложение, аналогичное сингулярному, то есть сохраняющее все его свойства для пространственных матриц. Изначально сингулярное разложение является произведением трех матриц; тогда, перепишем (2) в обозначениях алгебры многомерных матриц:

$$A = {}^{\lambda_1,\mu_1}({}^{\lambda_2,\mu_2}(U\times\Sigma)\times V^{\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, \dots \, i_p \\ i_{\alpha_1} \, i_{\alpha_2} \, \dots \, i_{\alpha_p} \end{pmatrix}}). \quad (12)$$

В сформулированном таким образом равенстве (12) ограничения на размерность U, Σ и V не накладываются. Значит, существует возможность выбора параметров (λ,μ) в каждом из двух произведений; в зависимости от выбора параметров размерности матриц U, V и Σ могут быть различны. Рассмотрение различных комбинаций параметров, размерностей результирующих матриц и следующих за этим результатов могут стать темой дальнейшего исследования. Так как в исходном равенстве (2) все матрицы являются плоскими (т.е. их размерности совпадают), аналогично ограничимся случаем, когда все три матрицы U, Σ и V имеют размерность исходной матрицы A, то есть являются пространственными. Из этого условия, применив (7), заключаем, что для сохранения матрицей A порядка 3 необходимо, чтобы $\lambda_1=\lambda_2=\mu_1=\mu_2=1$.

С учетом ограничений, перечисленных выше, можем переписать равенство (12):

$$A = {}^{1,1}({}^{1,1}(U\times\Sigma)\times V^{\begin{pmatrix} i_1 \, i_2 \, i_3 \\ i_{\alpha_1} i_{\alpha_2} i_{\alpha_3} \end{pmatrix}}). \quad (13)$$

Для нахождения разложения, соответствующего (13), первоначально найдем все простые сечения (8) матрицы A. Разобьем индексы многомерной матрицы так, что $l=i_1$, $s=i_2$, $c=i_3$. Исходя из вышеуказанных условий, имеем: $\{A_{s_i}\}_{i=1}^n$,

где каждое сечение A_{s_i} есть плоская матрица $n\times n$.

Заметим, что матрица V в последнем из равенств (13) является транспонированной относительно подстановки $\begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ i_3 i_2 i_1 \end{pmatrix}$.

Данное утверждение справедливо, ведь транспонирование матрицы V согласно подстановке $\begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ i_3 i_2 i_1 \end{pmatrix}$ производит транспонирование всех её плоских сечений ориентации (i_2), так как индекс i_2 фиксирован, а индексы i_1 и i_3 меняются местами.

Для каждой A_{s_i} согласно следствию из теоремы 1 существует представление:

$$A_{s_i} = U_i\Sigma_i V_i^T. \quad (14)$$

Найдем разложения (14). Получим 3 набора плоских матриц: $\{U_i\}_{i=1}^n$, $\{\Sigma_i\}_{i=1}^n$ и $\{V_i^T\}_{i=1}^n$, по n матриц в каждом. Пользуясь (9), восстановим по полученным наборам сечений многомерные матрицы; учитывая найденную подстановку для транспонирования, получим матрицы:

$$U = (D^s)^{-1}(\{U_i\}_{i=1}^n),$$

$$\Sigma = (D^s)^{-1}(\{\Sigma_i\}_{i=1}^n),$$

$$V^{\begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ i_3 i_2 i_1 \end{pmatrix}} = (D^s)^{-1}(\{V_i^T\}_{i=1}^n). \quad (15)$$

При этом матрицы (15) – пространственные матрицы порядка n. Левые части равенств (13) – и есть искомые матрицы разложения (13).

Получается, аналогом разложения (2) для пространственных матриц будет:

$$A = {}^{1,1}({}^{1,1}(U\times\Sigma)\times V^{\begin{pmatrix} i_1 i_2 i_3 \\ i_3 i_2 i_1 \end{pmatrix}}). \quad (16)$$

***Примечание* 1.** Так как предложенное разложение основано на сингулярном разложении плоских матриц, оно не будет обладать свойством единственности. В силу конструкции матриц (15) можно получать различные комбинации сингулярного разложения пространственной матрицы, варьируя сингулярные разложения плоских сечений матрицы A.

Примечание 2. Аналогичным образом можно определить компактный вид сингулярного разложения пространственных матриц.

Почему равенство (16) справедливо? Это возможно благодаря сути операции (λ,μ)-свернутого произведения. Авторы [14] доказали одно важное утверждение: результатом (λ,μ)-свернутого произведения будет матрица C, составленная из $\tau-\lambda$ -мерных сечений, каждое из которых есть произведение $q-\lambda$ -мерных сечений матриц A и B соответственно. С учетом значений параметров (16) заключаем, что результатом

(1,1)-свернутого произведения пространственных матриц A и B является матрица C, которая определяется формулой:

$$C = \left(D^s\right)^{-1}\left(\left\{A_{s_i} \times B_{s_i}\right\}_{i=1}^{n}\right), \qquad (17)$$

где × есть обычное матричное умножение. Равенство (17) означает, что (1,1)-свернутое произведение пространственных матриц сводится к умножению их плоских скоттовых сечений. Имея все необходимые утверждения, сформулируем свойства, аналогичные свойствам сингулярного разложения плоских матрица, для разложения (16) на языке алгебры многомерных матриц:

5) матрица M должна представлять собой произведение трех матриц U, Σ и $V^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}}$;

6) матрицы U и V должны быть (1,1)-ортогональны соответственно подстановке $\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}$;

7) матрица Σ должна иметь ненулевыми элементами только сингулярные числа матрицы A, расположенные на местах, соответствующих единицам в матрице $E(1,1)$;

8) векторные сечения матриц U и V составляют столбцы собственных матриц матрицы ${}^{\lambda,\mu}(A \times A^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}})$ и ${}^{\lambda,\mu}(A^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}} \times A)$ соответственно.

Первое свойство очевидно выполняется исходя из требований, поставленных перед конструируемым разложением.

Второе свойство выполняется в силу конструкции матриц U и V. Как было показано выше, при транспонировании матриц U и V соответственно подстановке $\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}$ будут транспонированы их плоские сечения ориентации (i_2). Далее, из (17) следует, что произведение ${}^{1,1}(V^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}} \times V)$ или ${}^{1,1}(V \times V^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}})$ представляет собой произведение соответствующих плоских скоттовых сечений, являющихся ортогональными матрицами; получается:

$$E(1,1) = \left(D^s\right)^{-1}\left(\left\{V_i \times V_i^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}}\right\}_{i=1}^{n}\right).$$

Выполнимость третьего свойства прямо вытекает из способа конструирования матрицы Σ. Из определения сингулярных значений многомерной матрицы следует, что для пространственной матрицы (1,1)-сингулярные числа соответственно подстановке $\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}$ будут составлены набором из корней из собственных значений матрицы ${}^{\lambda,\mu}(A \times A^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}})$. В свою очередь, её собственные значения есть собственные значения её плоских сечений ориентации (i_2), что будет в точности совпадать с элементами матрицы Σ.

Четвертое свойство выполняется, исходя из определения собственных матриц. Заметим, что минимальной размерностью собственной матрицы будет $\lambda + \mu$; для нашего случая это число равно двум. Учитывая, что число собственных матриц пространственной матрицы порядка n будет равно n^2, свойство четыре не удалось бы сформулировать в точности так же, как и для плоских матриц (например, пространственная матрица порядка два имеет четыре собственных плоских матрицы, из которых не удалось бы составить ровно одну пространственную матрицу того же порядка). Поэтому данное свойство было переформулировано. Тогда, согласно (11) и (17), простое сечение собственной матрицы будет содержать собственный вектор соответствующего скоттова сечения пространственной матрицы.

Пример

Найдём сингулярное разложение матрицы $A = \begin{array}{c} i_2 \to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3 \to \\ i_1 \downarrow \end{array}$. Для этого выпишем все сечения (8):

$$D^s(A) = \left\{\left\|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}\right\|, \left\|\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}\right\|\right\}.$$

Для каждого из сечений найдем представление (14):

$$\left\|\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\| \times \left\|\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right\| \times \left\|\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\|, \quad \left\|\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\| \times \left\|\begin{array}{cc} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right\| \times \left\|\begin{array}{cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\|,$$

откуда имеем искомое разложение:

$$U = \begin{array}{c} i_2 \to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3 \to \\ i_1 \downarrow \end{array}, \quad \Sigma = \begin{array}{c} i_2 \to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3 \to \\ i_1 \downarrow \end{array}, \quad V^{\binom{i_1 i_2 i_3}{i_3 i_2 i_1}} = \begin{array}{c} i_2 \to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3 \to \\ i_1 \downarrow \end{array}.$$

Нетрудно убедиться в том, что данное разложение верно путем проверки выполнимости (16) и сохранении свойств сингулярного разложения.

$$
{}^{1,1}(U\times\Sigma)=\begin{array}{c} i_2\to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt2}\times3+\frac{1}{\sqrt2}\times0 & \frac{1}{\sqrt2}\times0+\frac{1}{\sqrt2}\times1 & \frac{1}{\sqrt2}\times5-\frac{1}{\sqrt2}\times0 & \frac{1}{\sqrt2}\times0-\frac{1}{\sqrt2}\times1 \\ \frac{1}{\sqrt2}\times3-\frac{1}{\sqrt2}\times0 & \frac{1}{\sqrt2}\times0-\frac{1}{\sqrt2}\times1 & \frac{1}{\sqrt2}\times5+\frac{1}{\sqrt2}\times0 & \frac{1}{\sqrt2}\times0+\frac{1}{\sqrt2}\times1 \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3\to \\ i_1\downarrow \end{array} = \begin{array}{c} i_2\to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} \frac{3}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{5}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{3}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{5}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3\to \\ i_1\downarrow \end{array},
$$

$$
A={}^{1,1}\left({}^{1,1}(U\times\Sigma)\times V^{\begin{pmatrix} i_1i_2i_3 \\ i_3i_2i_1 \end{pmatrix}}\right)=
$$

$$
=\begin{array}{c} i_2\to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} \frac{3}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{3}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{5}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{5}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{3}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{3}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{5}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{5}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3\to \\ i_1\downarrow \end{array} == \begin{array}{c} i_2\to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3\to \\ i_1\downarrow \end{array}.
$$

Как видим, равенство (16) выполняется. Свойство 1 очевидно и не нуждается в проверке. Проверим свойство 2. Транспонируем U соответственно подстановке $\begin{pmatrix} i_1i_2i_3 \\ i_3i_2i_1 \end{pmatrix}$:

$$
U^{\begin{pmatrix} i_1i_2i_3 \\ i_3i_2i_1 \end{pmatrix}}=\begin{array}{c} i_2\to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3\to \\ i_1\downarrow \end{array},
$$

тогда $${}^{1,1}\left(U\times U^{\begin{pmatrix} i_1i_2i_3 \\ i_3i_2i_1 \end{pmatrix}}\right)=\begin{array}{c} i_2\to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & -\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}-\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2}+\frac{1}{\sqrt2}\times\frac{1}{\sqrt2} \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3\to \\ i_1\downarrow \end{array}=$$

$$
=\begin{array}{c} i_2\to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3\to \\ i_1\downarrow \end{array}=E(1,1).
$$

Аналогично можно проверить выполнимость данного свойства для ${}^{1,1}\left(V\times V^{\begin{pmatrix} i_1i_2i_3 \\ i_3i_2i_1 \end{pmatrix}}\right)$

Для проверки третьего свойства вычислим для начала ${}^{\lambda,\mu}\left(A\times A^{\begin{pmatrix} i_1i_2i_3 \\ i_3i_2i_1 \end{pmatrix}}\right)$:

$$
{}^{\lambda,\mu}\left(A\times A^{\begin{pmatrix} i_1i_2i_3 \\ i_3i_2i_1 \end{pmatrix}}\right)=\begin{array}{c} i_2\to \\ \left\|\begin{array}{cc|cc} 5 & 4 & 13 & 12 \\ 4 & 5 & 12 & 13 \end{array}\right\| \end{array} \begin{array}{l} i_3\to \\ i_1\downarrow \end{array}.
$$

Теперь найдем собственные значения данной матрицы. Это в свою очередь будут собственные числа плоских матриц $\left\|\begin{array}{cc} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{array}\right\|$ и $\left\|\begin{array}{cc} 13 & 12 \\ 12 & 13 \end{array}\right\|$; это будут числа {9, 1} и {25, 1}.

Корни из этих чисел будут равняться {3, 1, 5, 1}, что в точности равняется элементам матрицы Σ. Нетрудно заметить, что данные элементы – единственные ненулевые элементы данной матрицы, расположенные на местах единиц матрицы $E(1,1)$.

Для проверки свойства 4 относительно ${}^{\lambda,\mu}\left(A\times A^{\begin{pmatrix} i_1i_2i_3 \\ i_3i_2i_1 \end{pmatrix}}\right)$ построим систему:

$$
(5-\alpha)Y_{11}+4Y_{21}=0,\ (13-\alpha)Y_{12}+12Y_{22}=0
$$
$$
4Y_{11}+(5-\alpha)Y_{21}=0,\ 12Y_{12}+(13-\alpha)Y_{22}=0
$$

Подставляя собственные числа {9, 1, 25, 1} и решая систему, имеем четыре фундаментальные (1,1)-собственные матрицы для A:

$$
\left\|\begin{array}{cc} a & 0 \\ a & 0 \end{array}\right\|,\ \left\|\begin{array}{cc} a & a \\ -a & -a \end{array}\right\|,\ \left\|\begin{array}{cc} 0 & a \\ 0 & a \end{array}\right\|,\ \left\|\begin{array}{cc} a & a \\ -a & -a \end{array}\right\|,
$$

где a – произвольное отличное от нуля число. При этом, выбором а соответствующие столбцы собственных матриц есть в точности векторные сечения матрицы U.

Полученные результаты

В статье была предложена модель обобщения сингулярного разложения на случай пространственных матриц; фактически, данная модель тесно связана с нахождением сингулярного разложения плоских матриц. Было показано, что предложенное разложение сохраняет все свойства аналогичного разложения двумерных матриц.

Сингулярное разложение применяется как базовый строительный блок для многих алгоритмов, применяемых в решении задач из самых разных областей. Идеи сингулярного разложения, обобщенного на большее число измерений, нашли себя в тензорных разложениях (HOSVD, разложение Таккера) [15-18]. Однако, определение операций тензорной алгебры (в частности, тензорного произведения [19]) не позволяет получить разложение, совпадающее по свойствам с сингулярным; помимо того, зачастую не существует хороших алгоритмов по нахождению подобных тензорных разложений, потому применяют аналоги, не обладающие в полной мере теми хорошими свойствами, но имеющие хорошие показатели сходимости [15-18], [20, 21]. Применение сингулярного разложения пространственных матриц или его потенциального обобщения может быть удобным для решения задач, в которых сейчас используются тензоры: социология, биохимия и т.д.[8]. Например, в работах[9] [22, 23] демонстрируется применение сингулярного разложения в решении задачи сжатия изображений. В работе [24] показано, как сингулярное разложение используется для создания водяных знаков. С помощью сингулярного разложения пространственных матриц можно получить обобщения приведенных в статьях алгоритмов. Помимо этого, сингулярное разложение пространственных матриц можно естественным образом применить к построению рекомендательных систем [25].

Дальнейшим развитием данной работы может стать обобщение полученных результатов на случай произвольного числа измерений, а также непосредственное применение сингулярного разложения пространственных и многомерных матриц к решению перечисленных (и других) задач.

Список использованных источников

[1] Мунерман В. И. Построение архитектур программно-аппаратных комплексов для повышения эффективности массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2014. Т. 10, № 4. С. 3-16. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22831892 (дата обращения: 28.07.2022).

[2] Захаров В. Н., Мунерман В. И. Параллельная реализация обработки интенсивно используемых данных на основе алгебры многомерных матриц // Аналитика и управление данными в областях с интенсивным использованием данных : XVII Международная конференция DAMDID / RCDL'2015 (Обнинск, 13-16 октября 2015 года, Россия): Труды конференции / под ред. Л. А. Калиниченко, С. О. Старкова. Обнинск : ИАТЭ НИЯУ МИФИ, 2015. С. 217-223. URL: https://elibrary.ru/item.asp?id=24564996 (дата обращения: 28.07.2022).

[3] Мунерман В. И., Мунерман Д. В. Соответствие операций в многомерно-матричной и реляционной моделях данных // Системы компьютерной математики и их приложения. 2019. № 20. С. 209-214. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39103187 (дата обращения: 28.07.2022).

[4] Кириллов Е. В., Мельник К. В., Мунерман В. И. Параллельная реализация вывода ассоциативных правил на основе NUMA-архитектуры // Системы компьютерной математики и их приложения. 2019. № 20-1. С. 172-176. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39103178 (дата обращения: 28.07.2022).

[5] Гончаров Е. И., Мунерман В. И., Самойлова Т. А. Выбор параметров многомерных матриц для обобщенного алгоритма шифрования Хилла // Системы компьютерной математики и их приложения. 2019. № 20-1. С. 111-116. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39103166 (дата обращения: 28.07.2022).

[6] Корчиц К. С., Муха В. С. Векторные односвязные цепи Маркова // Доклады БГУИР. 2003. Т. 1, № 3. С. 102-105. URL: https://libeldoc.bsuir.by/handle/123456789/30997 (дата обращения: 28.07.2022).

[7] Мунерман В. И., Самойлова Т. А. Алгебраический подход к алгоритмизации задач маршрутизации // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, № 5. С. 50-56. doi: https://doi.org/10.18127/j20729472-201805-08

[8] Гончаров Е. И. Многомерно-матричное определение операции свертки // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 3. С. 541-549. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202103.541-549

[9] Тараненко А. А. Перманенты многомерных матриц: свойства и приложения // Дискретный анализ и исследование операций. 2016. Т. 23, № 4(130). С. 35-101. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=27349044 (дата обращения: 28.07.2022).

[10] Гончаров Е. И. Реализация (λ, μ)-свернутого произведения матриц средствами ($0, \mu$)-свернутого произведения // Системы компьютерной математики и их приложения. 2022. № 23. С. 96-100. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48621275 (дата обращения: 28.07.2022).

[8] Оселедец И. Тензорные разложения и их применения [Электронный ресурс] // Habr, 2022. URL: https://habr.com/ru/company/yandex/blog/313892 (дата обращения: 28.07.2022).

[9] Cao L. Singular Value Decomposition Applied To Digital Image Processing [Электронный ресурс]. URL: https://sites.math.washington.edu/~morrow/498_13/svdphoto.pdf (дата обращения: 28.07.2022).

[11] Goncharov E., Munerman V., Yakovlev G. Software and Hardware Complex for Calculating Convolutions by Methods Multidimensional Matrix Algebra // 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus). St. Petersburg, Moscow, Russia : IEEE Computer Society, 2021. P. 2176-2180. doi: https://doi.org/10.1109/ElConRus51938.2021.9396584
[12] Николаев К. С. Применение современных параллельных технологий к решению задачи умножения многомерных матриц методом рекурсивного спуска // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. № 21. С. 183-188. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44237974 (дата обращения: 28.07.2022).
[13] Гончаров Е. И., Ильин П. Л. Сравнение реализаций блочного алгоритма умножения многомерных матриц // Системы компьютерной математики и их приложения. 2020. № 21. С. 102-109. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44237961 (дата обращения: 28.07.2022).
[14] Захаров В. Н., Мунерман В. И. Параллельный алгоритм умножения многомерных матриц // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 11, № 2. С. 384-390. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26167519 (дата обращения: 28.07.2022).
[15] De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition // SIAM journal on Matrix Analysis and Applications. 2000. Vol. 21, no. 4. P. 1253-1278. doi: https://doi.org/10.1137/S0895479896305696
[16] Tucker L. R. The extension of factor analysis to three-dimensional matrices // Contributions to mathematical psychology ; ed. by N. Frederiksen, H. Gulliksen. Vol. 110119. New York : Holt, Rinehart & Winston, 1964. P. 109-127.
[17] Tucker L. R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis // Psychometrika. 1966. Vol. 31, issue 3. P. 279-311. doi: https://doi.org/10.1007/BF02289464
[18] Tucker L. R. Implications of Factor Analysis of Three-Way Matrices for Measurement of Change // Problems in Measuring Change ; ed. by C. W. Harris. Vol. 15. Madison. Wisc : University of Wisconsin Press, 1963. P. 122-137.
[19] Goncharov E. Iljin P., Munerman V. Multidimensional Matrix Algebra Versus Tensor Algebra or μ > 0 // 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). St. Petersburg and Moscow, Russia : IEEE Computer Society, 2020. P. 1949-1954. doi: https://doi.org/10.1109/EIConRus49466.2020.9039478
[20] Kim Y.-D., Choi S. Nonnegative Tucker Decomposition // 2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Minneapolis, MN, USA : IEEE Computer Society, 2007. P. 1-8. doi: https://doi.org/10.1109/CVPR.2007.383405
[21] Bader B.W., Kolda T.G. Algorithm 862: MATLAB tensor classes for fast algorithm prototyping // ACM Transactions on Mathematical Software. 2006. Vol. 32, issue 4. P. 635-653. doi: https://doi.org/10.1145/1186785.1186794
[22] Kahu S., Rahate R. Image Compression Using Singular Value Decomposition // International Journal of Advancements in Research & Technology. 2013. Vol. 2, issue 8. P. 244-248.
[23] Newman M., Sardeshmukh P. D. A Caveat Concerning Singular Value Decomposition // Journal of Climate. 1995. Vol. 8, no. 2. P. 352-360. URL: http://www.jstor.org/stable/26199885 (дата обращения: 28.07.2022).
[24] Chandra D. V. S. Digital image watermarking using singular value decomposition // The 2002 45th Midwest Symposium on Circuits and Systems, 2002 (MWSCAS-2002). Tulsa, OK, USA : IEEE Computer Society, 2002. P. III-III. doi: https://doi.org/10.1109/MWSCAS.2002.1187023
[25] Frolov E., Oseledets I. Fifty Shades of Ratings: How to Benefit from a Negative Feedback in Top-N Recommendations Tasks // Proceedings of the 10th ACM Conference on Recommender Systems (RecSys'16). New York, NY, USA : Association for Computing Machinery, 2016. P. 91-98. doi: https://doi.org/10.1145/2959100.2959170

Поступила 28.07.2022; одобрена после рецензирования 15.08.2022; принята к публикации 26.09.2022.

Об авторах:

Ильин Павел Леонидович, магистрант физико-математического факультета, ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет» (214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4), **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7878-9919,** zub.dayu@mail.ru

Самойлова Татьяна Аркадьевна, доцент кафедры прикладной математики и информатики физико-математического факультета, ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет» (214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4), кандидат технических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3712-327X,** tatsamoilova24@gmail.com

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Munerman V.I. Construction of hardware-software complexes architecture to improve massively data processing. *Highly Available Systems*. 2014;10(4):3-16. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=22831892 (accessed 28.07.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[2] Zakharov V., Munerman V. Parallel Implementation of Data Intensive Processing on the Basis of the Algebra of Multidimensional Matrices. In: Kalinichenko L.A., Starkov S.O. (eds.). Data Analytics and Management in Data Intensive Domains: XVII International Conference DAMDID/RCDL2015. Obninsk, Russia: Proceeding of the Conference. Obninsk: INPE NRNU MEPhI; 2015. p. C. 217-223. Available at: https://elibrary.ru/item.asp?id=24564996 (accessed 28.07.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[3] Munerman V.I., Munerman D.V. The compliance of operations of multi-dimensional matrix algebra with operations of the relational data model. *Computer Mathematics Systems and Their Applications*. 2019;(20):209-214. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39103187 (accessed 28.07.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[4] Kirillov E.V., Melnik K.V., Munerman V.I. Parallel association rules mining based on NUMA-architecture. *Computer Mathematics Systems and Their Applications*. 2019;(20-1):172-176. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39103178 (accessed 28.07.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[5] Goncharov E.I., Munerman V.I., Samoylova T.A. The method of selecting parameters of multidimensional matrix for hill encryption algorithm. *Computer Mathematics Systems and Their Applications*. 2019;(20-1):111-116. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=39103166 (accessed 28.07.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[6] Korchits K.S., Mukha V.S. [Vector simply connected Markov chains]. *Doklady BGUIR*. 2003;1(3):102-105. Available at: https://libeldoc.bsuir.by/handle/123456789/30997 (accessed 28.07.2022). (In Russ.)

[7] Munerman V.I., Samoylova T.A. Algebraic approach to algorithmization of routing problems. *Highly Available Systems.* 2018;14(5):50-56. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.18127/j20729472-201805-08

[8] Goncharov E.I. Multi-Dimensional Definition of Convolution. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2021;17(3):541-549. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202103.541-549

[9] Taranenko A.A. Permanents of multidimensional matrices: Properties and applications. *Journal of Applied and Industrial Mathematics.* 2016;10(4):567-604. doi: https://doi.org/10.1134/S1990478916040141

[10] Goncharov E.I. Realization the (λ, μ)-convolution product of matrixes by means of the (0, μ)-convolution product. *Computer Mathematics Systems and Their Applications*. 2022;(23):96-100. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=48621275 (accessed 28.07.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[11] Goncharov E., Munerman V., Yakovlev G. Software and Hardware Complex for Calculating Convolutions by Methods Multidimensional Matrix Algebra. In: 2021 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (ElConRus). St. Petersburg, Moscow, Russia: IEEE Computer Society; 2021. p. 2176-2180. doi: https://doi.org/10.1109/ElConRus51938.2021.9396584

[12] Nikolaev K.S. Application of modern parallel technologies to the solution of the problem of multiplaying multidimensional matrices by the method of recursive descent. *Computer Mathematics Systems and Their Applications*. 2020;(21):183-188. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44237974 (accessed 28.07.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[13] Goncharov E.I., Iljin P.L. Comparison of realisations of parallel multidimensional matrix multiplication algorithms. *Computer Mathematics Systems and Their Applications*. 2020;(21):102-109. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=44237961 (accessed 28.07.2022). (In Russ., abstract in Eng.)

[14] Munerman V.I., Zakharov V.N. [Parallel Algorithm for Multidimensional Matrix Multiplication]. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2015;11(2):384-390. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26167519 (accessed 28.07.2022). (In Russ.)

[15] De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J. A Multilinear Singular Value Decomposition. *SIAM journal on Matrix Analysis and Applications*. 2000;21(4):1253-1278. doi: https://doi.org/10.1137/S0895479896305696

[16] Tucker L.R. The extension of factor analysis to three-dimensional matrices. In: Frederiksen N., Gulliksen H. (eds.). Contributions to mathematical psychology. Vol. 110119. New York: Holt, Rinehart & Winston; 1964. p. 109-127.

[17] Tucker L.R. Some mathematical notes on three-mode factor analysis. *Psychometrika*. 1966;31(3):279-311. doi: https://doi.org/10.1007/BF02289464

[18] Tucker L.R. Implications of Factor Analysis of Three-Way Matrices for Measurement of Change. In: Harris C.W. Problems in Measuring Change. Vol. 15. Madison. Wisc: University of Wisconsin Press; 1963. p. 122-137.

[19] Goncharov E. Iljin P., Munerman V. Multidimensional Matrix Algebra Versus Tensor Algebra or μ > 0. In: 2020 IEEE Conference of Russian Young Researchers in Electrical and Electronic Engineering (EIConRus). St. Petersburg and Moscow, Russia: IEEE Computer Society; 2020. p. 1949-1954. doi: https://doi.org/10.1109/EIConRus49466.2020.9039478

[20] Kim Y.-D., Choi S. Nonnegative Tucker Decomposition. In: 2007 IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. Minneapolis, MN, USA: IEEE Computer Society; 2007. p. 1-8. doi: https://doi.org/10.1109/CVPR.2007.383405

[21] Bader B.W., Kolda T.G. Algorithm 862: MATLAB tensor classes for fast algorithm prototyping. *ACM Transactions on Mathematical Software*. 2006;32(4):635-653. doi: https://doi.org/10.1145/1186785.1186794

[22] Kahu S., Rahate R. Image Compression Using Singular Value Decomposition. *International Journal of Advancements in Research & Technology.* 2013;2(8):244-248.

[23] Newman M., Sardeshmukh P.D. A Caveat Concerning Singular Value Decomposition. *Journal of Climate.* 1995;8(2):352-360. Available at: http://www.jstor.org/stable/26199885 (accessed 28.07.2022).
[24] Chandra D.V.S. Digital image watermarking using singular value decomposition. In: The 2002 45th Midwest Symposium on Circuits and Systems, 2002 (MWSCAS-2002). Tulsa, OK, USA: IEEE Computer Society; 2002. p. III-III. doi: https://doi.org/10.1109/MWSCAS.2002.1187023
[25] Frolov E., Oseledets I. Fifty Shades of Ratings: How to Benefit from a Negative Feedback in Top-N Recommendations Tasks. In: Proceedings of the 10th ACM Conference on Recommender Systems (RecSys'16). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery; 2016. p. 91-98. doi: https://doi.org/10.1145/2959100.2959170

Submitted 28.07.2022; approved after reviewing 15.08.2022; accepted for publication 26.09.2022.

About the authors:

Pavel L. Iljin, Master degree student of the Faculty of Physics and Mathematics, Smolensk State University (4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation), **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7878-9919,** zub.dayu@mail.ru
Tatiana A. Samoilova, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics and Computer Science, Faculty of Physics and Mathematics, Smolensk State University (4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation), Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3712-327X,** tatsamoilova24@gmail.com

All authors have read and approved the final manuscript.