УДК 004.032.24 : 519.174
DOI: 10.25559/SITITO.18.202203.537-544

Оригинальная статья

Использование многомерных матриц для определения параметров графа

А. И. Макаров*, В. И. Мунерман
ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет», г. Смоленск, Российская Федерация
Адрес: 214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4
* al.makarov8@gmail.com

Аннотация
При увеличении сложности проектируемых вычислительных систем и компьютерных сетей растет необходимость в определении наиболее подходящей модели данных. Одной из основных моделей для подобного рода задач является графовая модель. Однако для систем с большим числом узлов графы получаются настолько сложными, что эвристические методы, являющиеся основными в теории графов, становятся слишком ресурсозатратными. Но при использовании методов теории многомерных матриц возможно определение отдельных свойств графов, а также их параметров при значительно меньших занимаемых ресурсах вычислительных мощностей. В данной статье рассмотрены некоторые свойства графов, которые возможно проанализировать с использованием (λ, μ) -свернутого произведения многомерных матриц. Проведены доказательства соответствия одного из численных параметров вершин графа и результата возведения матрицы смежности графа в квадрат. Сформулированы параметры графа, не влияющие на его хроматическое число, и выдвинуто предположение о возможной связи между хроматическим числом и числом нечетных циклов в графе.

Ключевые слова: клика, многомерные матрицы, свойства графов, хроматическое число, циклы в графе

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Макаров А. И., Мунерман В. И. Использование многомерных матриц для определения параметров графа // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 3. С. 537-544. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.537-544

Original article

Using Multidimensional Matrices to Determine Graph Properties

A. I. Makarov*, V. I. Munerman
Smolensk State University, Smolensk, Russian Federation
Address: 4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation
*al.makarov8@gmail.com

Abstract

The need to determine the most appropriate data model increases, as the complexity of the designed computing systems and computer networks increases. The graph model is one of the main models for this kind of tasks. However, graphs are so complex for systems with many nodes, that heuristic methods, which are basic in graph theory, become too resource intensive. But it is possible to determine individual properties of graphs, as well as their parameters using the methods of the theory of multidimensional matrices, with significantly less computing power resources. This article discusses some properties of graphs that can be analyzed using the (λ, μ) - collapsed product of multidimensional matrices. The proofs of the correspondence of one of the numerical parameters of the vertices of the graph and the result of squaring the adjacency matrix of the graph are carried out. The parameters of the graph that do not affect its chromatic number are formulated, and an assumption is made about a possible relationship between the chromatic number and the number of odd cycles in the graph.

Keywords: clique, multidimensional matrices, graph properties, chromatic number, cycles in a graph

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Makarov A.I., Munerman V.I. Using Multidimensional Matrices To Determine Graph Properties. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2022;18(3):537-544. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.537-544

Введение

При проектировании различного рода систем, включая все возможные роды вычислительных систем и компьютерных сетей, важной деталью является определение свойств, присущих системе. Начиная от базовых: размера и связности, до более специфических: хроматического числа, размера клики, наличия эйлеровых или гамильтоновых циклов. Также немалую роль играет возможность или невозможность отнести модель к какого-либо роду изученных моделей.

Определение свойств необходимо для принятия решений о включении в модель или исключении из нее определенных элементов, либо о необходимости изменения структуры. Например, если в модели компьютерной сети один узел является связующим у нескольких подграфов, не имеющих кроме него общих, он является критическим узлом такой сети, а значит необходимо больше контроля за сохранением его доступности, либо же добавление дублирующего узла. При моделировании городской дорожной сети важно наличие различного рода циклов для распределения транспортных потоков.

Цель исследования

Целью исследования является рассмотрение возможности применения алгебры многомерных матриц в моделировании вычислительных комплексов и компьютерных сетей, а также других прикладных задач. Использование основных операций данной алгебры для анализа свойств графов, получаемых при моделировании систем, а также для отнесения графов к определенным классам.

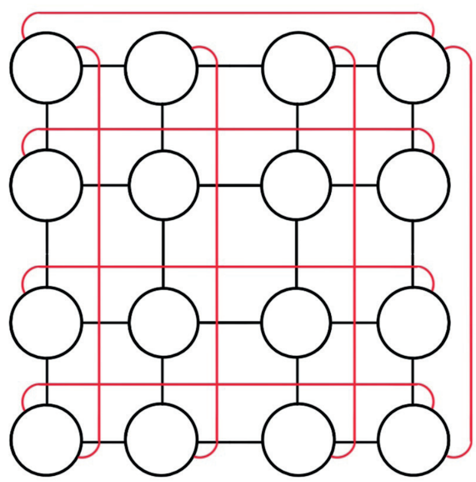
Определение оптимальной модели данных

Если граф построенной модели невозможно отнести к какого-либо рода изученной модели, все его свойства надо определять каждый раз отдельно, а если он отнесен к изученной модели, наличие определенных свойств будет следовать из этого автоматически. Сейчас наиболее актуальными являются задачи проектирования высокопроизводительных систем, логистические решения, а также топологические, касающиеся разводки печатных плат и элементов вычислительной техники в целом – в таких случаях число узлов в модели исчисляется десятками и сотнями тысяч, если не больше. Для такого числа вершин в графе комбинаторные алгоритмы, являющиеся основными в теории графов, становятся малоэффективными, а постоянная проверка на сохранение каких-либо свойств при малейшем изменении графа занимает слишком много времени. Когда дело касается теории графов, изученных моделей не так уж и много, а отнесение к ним является порой нетривиальной задачей. Например, определить, является ли граф тороидальным можно только двумя способами: построить его на торе таким образом, чтобы никакие два ребра не пересекались; или проверив, не являются ли его частью графы из набора запрещенных, который конечен, но не известен полностью (и при этом его размер превышает 250000). Задачи о поиске клики и об определении хроматического числа графа являются *np*-полными.

Однако в обоих примерах вся проверка ограничивается комбинаторными или эвристическими методами теории графов [1]. И значительная часть исследования графов и математических моделей, построенных на основе графов, строится на этих же методах, не касаясь любых других математических теорий. Только малая часть от общего числа изучает графы с точки зрения алгебраической теории графов несмотря на то, что одной из базовых форм задания графа является матрица смежности [2].

Но это верно и в обратном направлении. Очень большое число исследований завершаются описанием модели, которая или сразу задается графом, или может быть представлена в виде графа. Но, не изучая эту модель дальше, исследователи, возможно, упускают какие-либо детали.

При изучении алгебры многомерных матриц возникают модели или структуры, которые являются ничем иным, как графом. Например, оптимальной структурой построения процессоров и памяти для распараллеливания умножения матриц является тороидальный граф [3], полученный из квадратного сетчатого графа размера $n*n$ путем соединения вершин с координатами $(1, i)$ с (n, i), а также $(i, 1)$ с (i, n). Легко доказать, что подобный граф будет тороидальным: соединив вершины с координатами $(1, i)$ и вершины с координатами (n, i), мы получаем цилиндр. Соединив после этого вершины с координатами $(i, 1)$ и вершины с координатами (i, n), которые лежат на основаниях цилиндра, мы получаем тор.



Р и с. 1. Тороидальный граф
F i g. 1. Toroidal Graph

При совмещении же теории графов и алгебры многомерных матриц возможно получить алгоритмы, отличающиеся от комбинаторных, основанных на переборе. Кроме того, возможно применить изученные алгоритмы, для которых известны различные способы распараллеливания [3-10], что не уменьшает вычислительную сложность задач, но значительно сокращает время на их решение.

Например, с помощью алгебры многомерных матриц возможно осуществлять поиск маршрутов из каждой вершины в каждую [11, 12], построение циклов в графе [1], [13-18]. И в целом, задавая различные алгебраические структуры, решать множество прикладных задач [8], [19-21].

Определение оптимальной модели вычислений

Задачей данного исследования является построение математической модели с использованием алгебры многомерных матриц, на основе которой возможно будет определение некоторых свойств произвольных графов и их отнесение к отдельным категориям графов. В основе модели лежат базовые операции над матрицами, операции над многомерными матрицами, а также логические операции. Логические операции будут применяться для оптимизации алгоритмов при их реализации.

Рассмотрим операцию умножения матриц. В алгебре многомерных матриц ей соответствует (0, 1)-свернутое произведение матриц[1]. По определению результатом произведения двух матриц A с элементами $a_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, k$ и B с элементами $b_{i,j}$, $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$ является матрица C с элементами $c_{i,j}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$, такими что $c_{i,j} = \sum_{x=1}^{k} a_{i,x} b_{x,j}$. Если на основании этого рассмотреть возведение матриц смежности в квадрат, можно заметить, что $a_{i,x} b_{x,j} = 1$ тогда и только тогда, когда $a_{i,x} = 1$ и $b_{x,j} = 1$. Это означает, что существует связь между вершинами с номером i и x, и одновременно с этим между вершинами x и j. А значит, вершина с номером x одновременно смежная для вершин с номерами i и j. Во всех остальных случаях $a_{i,x} b_{x,j} = 0$. Следовательно, $\sum_{x=1}^{k} a_{i,x} b_{x,j}$ является функцией подсчета числа вершин смежных одновременно вершинам с номерами i и j. Как итог, матрица C представляет собой матрицу числа смежных вершин. Причем на главной диагонали матрицы значения будут являться степенями соответствующих вершин. Сложность данного алгоритма известна и составляет $O(n^3)$. Так же, как и известны варианты распараллеливания данного алгоритма [7, 9].

Дополнением операции умножения может быть переопределение значений элементов матрицы C на значения следующего вида: $c_{i,j} = a_{i,j} b_{i,j} \sum_{x=1}^{k} a_{i,x} b_{x,j}$. При данном дополнении возведение матрицы смежности в квадрат будет давать несколько другие результаты: $c_{i,j}$ будет равно числу смежных вершинам с номерами i и j вершин только в том случае, когда сами вершины с номерами i и j смежны, а в остальных случаях будет равно нулю. Это, в целом, позволяет найти матрицу числа смежных вершин у каждой пары смежных вершин. На главной диагонали теперь могут находиться не только степени вершин, но и нули, в случае отсутствия в графе «петель». При этом сложность алгоритма не изменилась, и остается так же $O(n^3)$.

На основании этого дополнения базовой операции алгебры многомерных матриц можно рассмотреть алгоритм определения верхней границы клики.

Для клики размера n из определения следует, что любые для любых двух вершин графа, входящих в состав клики, существует не менее n-2 вершин, связанных сразу с обеими этими вершинами.

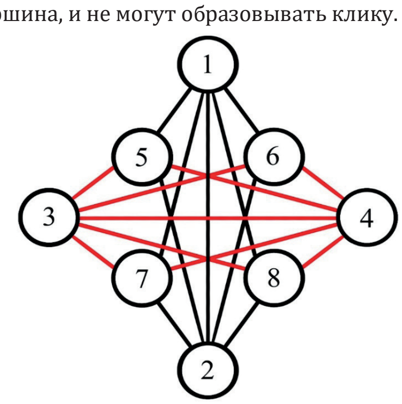
$$\forall a, b \epsilon K_n \exists v_1, v_2, \ldots, v_{n-2} \epsilon V : \{a, b\} \times \{v_1, v_2, \ldots, v_{n-2}\} \epsilon E \quad (1)$$

Доказано, что размер максимальной клики не будет превосходить $\max(c_{i,j}) + 1, i = 1 \ldots n, j = 1 \ldots n$ [22]. Но это не будет точной верхней границей клики: для того, чтобы в графе G существовала клика K_m, необходимо, чтобы в квадрате матрицы смежности было не менее $m^2 - m$ элементов больших или равных m-2 (Условие 1). Как было упомянуто ранее, квадрат матрицы смежности при рассмотренном дополнении есть матрица числа смежных вершин у каждой пары смежных между собой вершин. Если добавить к числу смежных вершин (m-2) еще и две рассматриваемые, получаем как раз клику размером m. В клике размера m существует $\frac{m*(m-1)}{2}$ неповторяющихся пар вершин. Очевидно, что матрица числа смежных вершин так же, как и матрица смежности симметрична относительно главной диагонали, из чего и следует требование к числу элементов в $m^2 - m$. Таким образом возможно определение верхней границы кликового числа произвольного графа с помощью алгоритма, вычислительная сложность которого составляет $O(n^3)$, что соответствует сложности произведения матриц.

Но точность данного метода определения верхней границы можно увеличить, если заменить однократное возведение матрицы смежности в квадрат на последовательное возведение в квадрат сначала матрицы смежности, а потом результирующих матриц. При этом на каждом этапе важно добавить условие к определению $c_{i,j}$:

$$c_{i,j} = \begin{cases} 1, & a_{i,j} * \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} * a_{k,j} \geq t \\ 0 \end{cases}, \quad (2)$$

где t – порядковый номер возведения в степень. Таким образом, на каждом шаге добавляется требование на наличие t вершин смежных обеим рассматриваемым. Условие 1 в таком случае заменяется на Условие 2: для того, чтобы в графе G существовала клика K_m, необходимо, чтобы в матрице C_{m-1} m-1-ой степени матрицы смежности было не менее $m^2 - m$ элементов, равных 1. Такой подход позволяет исключить случаи, когда пара вершин может иметь большое количество общих смежных вершин, которые смежны только этим двум вершина, и не могут образовывать клику.



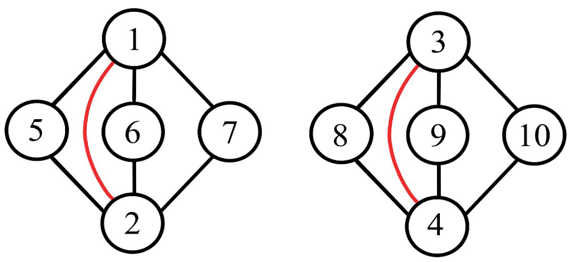
Р и с. 2. Пример связного графа с максимальной кликой 3

F i g. 2. An example of a connected graph with a maximum clique of 3

[1] Соколов Н. П. Введение в теорию многомерных матриц. Киев : Наукова думка, 1972. 176 с.

На рисунке 1 представлен связный граф, в котором имеется две пары вершин 1 и 2, 3 и 4 соответственно смежных между собой и имеющих по 4 общих смежных вершины. И основываясь на менее точном методе, можно допустить в графе клики размером 4. Однако максимальная клика графа 3. На рисунке 2 представлена похожая ситуация, только граф на нем не связный. Пары вершин 1 и 2, 3 и 4 соответственно смежны между собой и имеют по три общих смежных вершины, чего достаточно для того, чтобы, опираясь на первый предложенный метод, допустить существование клики размером 4. Но здесь так же максимальная клика включает три вершины.

Кроме того, этот алгоритм позволяет полностью исключить переборную часть задачи: при простом возведении в степень необходимо, переходя от наибольшего элемента матрицы к наименьшему, проверять на наличие элементов с не меньшим значением. При последовательном возведении в степень достаточно дойти до первой матрицы, в которой при степени t - 1 осталось менее не нулевых элементов. На основании этого можно будет утверждать, что в графе, соответствующем первоначальной матрице смежности, не существует клики размером большем t. При этом сложность алгоритма возрастает не более, чем до $O(n^4)$, так как, очевидно, что в худшем случае необходимо найти матрицу n-1-ой степени, чтобы определить, является ли исходный граф полным.



Р и с. 3. Пример несвязного графа с кликой 3

F i g. 3. An example of a disconnected graph with clique 3

Определение свойств графа на основе вычислений

Но возведение матрицы в квадрат не ограничивается определением верхней границы ее клики. С его помощью можно проверять некоторые свойства графов. Например, для всех тороидальных графов, полученных из графов клетчатой решетки со сторонами, большими 3, матрица C, полученная с помощью дополненной операции умножения, будет единичной матрицей E – все элементы матрицы, кроме находящихся на главной диагонали, равны нулю, последние же равны 1.

В научной статье «Один метод построения циклов в графе» Емельченкова Е. П. также рассмотрено применение -свернутого произведения многомерных матриц для поиска циклов в графе [1]. Одним из простейших приложений такого поиска является определение возможности раскрасить граф в два цвета: если граф содержит циклы нечетной длины, его невозможно раскрасить в два цвета [23]. При этом, если цикл в три вершины еще возможно найти наглядно даже по матрице смежности, то циклы большей длины обнаружить без вычислительной техники много сложнее. Есть и другое применение данного свойства: если граф не содержит циклов нечетной длины, данный граф является двудольным [24].

Авторы в своих работах[2] доказали, что возможно построить граф с любым наперед заданным хроматическим числом, не имеющим клик размером 3, однако размер максимальной клики является нижней границей хроматического числа. Между числом четных циклов и хроматическим числом графа также не существует прямой связи, так как для тороидального графа квадратной сетки с вершинами хроматическое число равно 2, вне зависимости от n, так как он является двудольным. Максимальная степень вершины ограничивает хроматическое число сверху, но, если построить граф, состоящий из n вершин, не связанных между собой (множество ребер E пустое), и добавить к нему одну вершину, связанную с каждой другой, ее степень будет n, однако хроматическое число так же будет равно 2, а значит, и максимальная степень не имеет прямой зависимости с хроматическим числом [25].

Полученные результаты

Предложенный в статье метод позволяет определять верхнюю границу клики без использования эвристики. С его помощью возможно определение вершин, которые могут образовывать клику искомого размера.

Задача отнесения графа к двудольным решается нахождением нечетного цикла в графе, или доказательством его отсутствия. При этом с помощью многомерных матриц возможно нахождение всех циклов в графе.

И несмотря на то, что ни размер максимальной клики, ни общее число графов в цикле не имеют прямой связи с хроматическим числом, можно предположить, что число нечетных циклов может оказывать влияние на хроматическое число графа, а не являться его верхней или нижней оценкой.

Заключение

В статье рассмотрены некоторые варианты использования алгебры многомерных матриц для определения свойств графов. Приведены примеры задач, в которых возможно использование математической модели, основанной на теории графов. Рассмотрены классы графов, отнесение к которым возможно при применении основных операций алгебры многомерных матриц.

[2] Зыков А. А. Теория конечных графов. Новосибирск : Наука, Сибирское отделение, 1969. 554 с.; Татт У. Теория графов [пер. с англ.] / У. Татт ; пер. Г. П. Гаврилов. М. : Мир, 1988. 424 с.

Список использованных источников

[1] Один метод построения циклов в графе / Е. П. Емельченков, В. И. Мунерман, Д. В. Мунерман, Т. А. Самойлова // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 4. С. 814-823. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.814-823

[2] Мунерман В. И., Мунерман Д. В. О соответствии моделей данных и моделей вычислений // Системы компьютерной математики и их приложения. 2021. № 22. С. 146-152. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46649891 (дата обращения: 14.06.2022).

[3] Мунерман В. И. Архитектура программно-аппаратного комплекса для массовой обработки данных на базе многомерно-матричной модели // Системы высокой доступности. 2015. Т. 11, № 2. С. 13-18. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23819273 (дата обращения: 14.06.2022).

[4] Efficient Partitioning Algorithm for Parallel Multidimensional Matrix Operations by Linearization / K. S. Alam [и др.] // Information and Communication Technology for Intelligent Systems. ICTIS 2020. Smart Innovation, Systems and Technologies ; ed. by T. Senjyu, P. N. Mahalle, T. Perumal, A. Joshi. Vol. 195. Singapore: Springer, 2021. P. 141-149. doi: https://doi.org/10.1007/978-981-15- 7078-0_13

[5] Performance-Aware Model for Sparse Matrix-Matrix Multiplication on the Sunway TaihuLight Supercomputer / Y. Chen [и др.] // IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems. 2019. Vol. 30, no. 4. P. 923-938. doi: https://doi. org/10.1109/TPDS.2018.2871189

[6] Red-blue pebbling revisited: near optimal parallel matrix-matrix multiplication / G. Kwasniewski [и др.] // Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC'19). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, 2019. Article number: 24. P. 1-22. doi: https://doi.org/10.1145/3295500.3356181

[7] Мунерман В. И., Усачев В. В. Один способ параллельной реализации умножения матриц // Системы компьютерной математики и их приложения. 2013. № 14. С. 96-98. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20588350 (дата обращения: 14.06.2022).

[8] Мунерман В. И., Самойлова Т. А. Параллельная реализация решения оптимизационных задач средствами баз данных // Системы высокой доступности. 2015. Т. 11, №. 1. С. 18-22. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23417734 (дата обращения: 14.06.2022).

[9] Мунерман В. И., Усачев В. В. Параллельная реализация умножения матриц с использованием облачных вычислений в WINDOWS AZURE // Системы компьютерной математики и их приложения. 2014. № 15. С. 97-98. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21947784 (дата обращения: 14.06.2022).

[10] Захаров В. Н., Мунерман В. И. Параллельный алгоритм умножения многомерных матриц // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2015. Т. 11, № 2. С. 384-390. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26167519 (дата обращения: 14.06.2022).

[11] Мунерман В. И., Самойлова Т. А. Алгебраический подход к алгоритмизации задач маршрутизации // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, № 5. С. 50-56. doi: https://doi.org/10.18127/j20729472-201805-08

[12] Морозов С. А., Мунерман В. И., Симаков В. А. Экспериментальный анализ многомерно-матричного подхода к построению маршрутов в графе // Известия высших учебных заведений. Электроника. 2022. Т. 27, № 5. С. 676-686. doi: https://doi.org/10.24151/1561-5405-2022-27-5-676-686

[13] Kirsch R., Sibley C., Sprangel E. Graph universal cycles: Compression and connections to universal cycles // arXiv:2209.14198. 2022. P. 1-25. doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.14198

[14] Xu J., Lu M., Liu K. Anti-Ramsey problems for cycles //Applied Mathematics and Computation. 2021. Vol. 408. Article number: 126345. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126345

[15] Khoufi I., Laouiti A., Adjih C. A Survey of Recent Extended Variants of the Traveling Salesman and Vehicle Routing Problems for Unmanned Aerial Vehicles // Drones. 2019. Vol. 3, issue 3. P. 66. doi: https://doi.org/10.3390/drones3030066

[16] Hu Y., Yao Y., Lee W. S. A reinforcement learning approach for optimizing multiple traveling salesman problems over graphs // Knowledge-Based Systems. 2020. Vol. 204. Article number: 106244. doi: https://doi.org/10.1016/j.knosys.2020.106244

[17] Xu X., Li J., Zhou M. Bi-Objective Colored Traveling Salesman Problems // IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems. 2022. Vol. 23, no. 7. P. 6326-6336. doi: https://doi.org/10.1109/TITS.2021.3086625

[18] Спивак С. И., Исмагилова А. С., Хамитова И. А. Теоретико-графовый метод определения маршрутов сложных химических реакций // Доклады Академии наук. 2010. Т. 434, № 4. С. 499-501. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=15524859 (дата обращения: 14.06.2022).

[19] Емельченков Е. П., Мунерман В. И. Подход к анализу систем высокой доступности // Системы высокой доступности. 2018. Т. 14, № 5. С. 36-41. doi: https://doi.org/10.18127/j20729472-201805-05

[20] Мунерман В. И. Многомерно-матричная модель массовой обработки данных // Системы высокой доступности. 2012. Т. 8, № 3. С. 19-22. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18418156 (дата обращения: 14.06.2022).

[21] Гончаров Е. И. Многомерно-матричное определение операции свертки // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 3. С. 541-549. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202103.541-549

[22] Moon J. W., Moser L. On cliques in graphs // Israel Journal of Mathematics. 1965. Vol. 3, issue 1. P. 23-28. doi: https://doi.org/10.1007/BF02760024

[23] König D. Graphok és mátrixok // Matematikai és Fizikai Lapok. 1931. Vol. 38. P. 116-119. URL: http://real-j.mtak.hu/7307 (дата обращения: 14.06.2022).
[24] Карпов Д. В., Гравин Н. В. О правильных раскрасках гиперграфов // Записки научных семинаров Санкт-Петербургского отделения математического института им. В.А. Стеклова РАН. 2011. Т. 391, № 3. С. 79-89. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17730707 (дата обращения: 14.06.2022).
[25] Купавский А. Б., Райгородский А. М. О дистанционных графах с большим хроматическим и малым кликовым числами // Доклады Академии наук. 2012. Т. 444, № 5. С. 483-487. URL: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17745923 (дата обращения: 14.06.2022).

Поступила 14.06.2022; одобрена после рецензирования 12.08.2022; принята к публикации 23.09.2022.

Об авторах:

Макаров Александр Ильич, аспирант физико-математического факультета, ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет» (214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4), **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7579-7593,** al.makarov8@gmail.com

Мунерман Виктор Иосифович, доцент кафедры информатики физико-математического факультета, ФГБОУ ВО «Смоленский государственный университет» (214000, Российская Федерация, г. Смоленск, ул. Пржевальского, д. 4), кандидат технических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9628-4049,** vimoon@gmail.com

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Yemelchenkov E.P., Munerman V.I., Munerman D.V., Samoylova T.A. Some Method for Constructing Cycles in a Graph. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021;17(4):814-823. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.814-823
[2] Munerman V.I., Munerman D.V. About the correspondence of data models and calculation models. *Computer Mathematics Systems and Their Applications.* 2021;(22):146-152. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46649891 (accessed 14.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
[3] Munerman V.I. Construction of hardware-software complexes architecture to improve massively data processing. *Highly Available Systems.* 2015;11(2):13-18. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23819273 (accessed 14.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
[4] Alam K.S., Shishir T.A., Azharul Hasan K.M. Efficient Partitioning Algorithm for Parallel Multidimensional Matrix Operations by Linearization. In: Senjyu T., Mahalle P.N., Perumal T., Joshi A. (eds.). Information and Communication Technology for Intelligent Systems. ICTIS 2020. Smart Innovation, Systems and Technologies. Vol. 195. Singapore: Springer; 2021. p. 141-149. doi: https://doi. org/10.1007/978-981-15-7078-0_13
[5] Chen Y., Li K., Yang W., Xiao G., Xie X., Li T. Performance-Aware Model for Sparse Matrix-Matrix Multiplication on the Sunway TaihuLight Supercomputer. *IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems.* 2019;30(4):923-938. doi: https://doi.org/10.1109/TPDS.2018.2871189
[6] Kwasniewski G., Kabić M., Besta M., VandeVondele J., Solcà R., Hoefler T. Red-blue pebbling revisited: near optimal parallel matrix-matrix multiplication. In: Proceedings of the International Conference for High Performance Computing, Networking, Storage and Analysis (SC'19). New York, NY, USA: Association for Computing Machinery; 2019. Article number: 24. p. 1-22. doi: https://doi.org/10.1145/3295500.3356181
[7] Munerman V.I., Usachev V.V. [One way of parallel implementation of matrix multiplication]. *Computer Mathematics Systems and Their Applications.* 2013;(14):96-98. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=20588350 (accessed 14.06.2022). (In Russ.)
[8] Munerman V.I., Samoylova T.A. Parallel implementation for solving optimization problems by means of databases. *Highly Available Systems.* 2015;11(1):18-22. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=23417734 (accessed 14.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
[9] Munerman V.I., Usachev V.V. [Parallel implementation of matrix multiplication using cloud computing in WINDOWS AZURE]. *Computer Mathematics Systems and Their Applications.* 2014;(15):97-98. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=21947784 (accessed 14.06.2022). (In Russ.)
[10] Munerman V.I., Zakharov V.N. [Parallel Algorithm for Multidimensional Matrix Multiplication]. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2015;11(2):384-390. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=26167519 (accessed 14.06.2022). (In Russ.)
[11] Munerman V.I., Samoylova T.A. Algebraic approach to algorithmization of routing problems. *Highly Available Systems.* 2018;14(5):50-56. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.18127/j20729472-201805-08
[12] Morozov S.A., Munerman V.I., Simakov V.A. Experimental analysis of multidimensional matrix approach to constructing routings in a

graph. *Proceedings of Universities. Electronics*. 2022;27(5):676-686. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.24151/1561-5405-2022-27-5-676-686
[13] Kirsch R., Sibley C., Sprangel E. Graph universal cycles: Compression and connections to universal cycles. arXiv:2209.14198. 2022. 25 p. doi: https://doi.org/10.48550/arXiv.2209.14198
[14] Xu J., Lu M., Liu K. Anti-Ramsey problems for cycles. *Applied Mathematics and Computation*. 2021;408:126345. doi: https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126345
[15] Khoufi I., Laouiti A., Adjih C. A Survey of Recent Extended Variants of the Traveling Salesman and Vehicle Routing Problems for Unmanned Aerial Vehicles. *Drones*. 2019;3(3):66. doi: https://doi.org/10.3390/drones3030066
[16] Hu Y., Yao Y., Lee W.S. A reinforcement learning approach for optimizing multiple traveling salesman problems over graphs. *Knowledge-Based Systems*. 2020;204:106244. doi: https://doi.org/10.1016/j.knosys.2020.106244
[17] Xu X., Li J., Zhou M. Bi-Objective Colored Traveling Salesman Problems. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems.* 2022;23(7):6326-6336. doi: https://doi.org/10.1109/TITS.2021.3086625
[18] Spivak S.I., Ismagilova A.S., Khamitova I.A. Graph-theoretical method for determining routes of complex chemical reactions. *Doklady Physical Chemistry*. 2010;434(2):169-171. doi: https://doi.org/10.1134/S0012501610100040
[19] Emelchenkov E.P., Munerman V.I. One approach to analysis of high-availability systems. *Highly Available Systems*. 2018;14(5):36-41. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.18127/j20729472-201805-05
[20] Munerman V.I. [Multidimensional-matrix model of mass data processing]. *Highly Available Systems*. 2012;8(3):019-022. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=18418156 (accessed 14.06.2022). (In Russ.)
[21] Goncharov E.I. Multi-Dimensional Definition of Convolution. *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2021;17(3):541-549. (In Russ., abstract in Eng.) doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202103.541-549
[22] Moon J.W., Moser L. On cliques in graphs. *Israel Journal of Mathematics*. 1965;3(1):23-28. doi: https://doi.org/10.1007/BF02760024
[23] König D. Graphok és mátrixok. *Matematikai és Fizikai Lapok*. 1931;38:116-119. Available at: http://real-j.mtak.hu/7307 (accessed 14.06.2022). (In Hungarian)
[24] Karpov D.V., Gravin N.V. On Proper Colorings of Hypergraphs. *Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI*. 2011;391(3):79-89. Available at: https://www.elibrary.ru/item.asp?id=17730707 (accessed 14.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
[25] Kupavskii A.B., Raigorodskii A.M. Distance graphs with large chromatic numbers and small clique numbers. *Doklady Mathematics*. 2012;85(3):394-398. doi: https://doi.org/10.1134/S1064562412030295

Submitted 14.06.2022; approved after reviewing 12.08.2022; accepted for publication 23.09.2022.

About the authors:

Aleksandr I. Makarov, Postgraduate Student of the Faculty of Physics and Mathematics, Smolensk State University (4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation), **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7579-7593,** al.makarov8@gmail.com

Victor I. Munerman, Associate Professor of the Chair of Computer Science, Faculty of Physics and Mathematics, Smolensk State University (4 Przhevalsky St., Smolensk 214000, Russian Federation), Cand.Sci. (Eng.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9628-4049,** vimoon@gmail.com

All authors have read and approved the final manuscript.