

УДК 517.958

DOI: 10.25559/SITITO.18.202203.617-624

Оригинальная статья

Нарушение единственности решений для математической модели движения аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды

Д. В. Беляков

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
dimbel@rambler.ru

Аннотация

В статье построена и исследована математическая модель малых колебаний аэродинамического маятника в потоке движущейся среды. В качестве модели воздействия среды на тело принята модель квазистатического обтекания пластинки средой. Согласно этой гипотезе, аэродинамические силы, действующие на тело, прикладываются в центре давления. В нашей задаче центр давления является подвижным относительно пластинки. Получены уравнения движения для рассматриваемого тела. Проведен переход к новым безразмерным переменным. Показано нарушение единственности при определении угла атаки в точках, где воздушная скорость центра давления близка к нулю. Построены некоторые области неоднозначности с помощью многократного решения алгебраических нелинейных уравнений, полученных из кинематических соотношений. Такой способ создания областей неоднозначности достаточно трудоемкий и не позволяет это делать в широких пределах фазовых переменных. Более легкий способ работы с областями неоднозначности возможен, если определить координаты точек возврата и изобразить границы областей неоднозначности в виде двух огибающих. Подробно описан алгоритм получения этих огибающих. В математическом пакете MATLAB 18 написана программа, которая строит верхнюю и нижнюю границы областей неоднозначности. С ее помощью проведен их параметрический анализ складок при различных значениях фазовых переменных. Показано, что размеры полученных областей неоднозначности невелики. Указано, что изменение угла атаки при интегрировании должно носить непрерывный характер, иначе происходит сбой в поиске численного решения. Также создан комплекс программ, позволяющий строить области неоднозначности с помощью многократного решения нелинейного уравнения. Таким образом, разработана математическая модель колебаний пластинки и проведен геометрический анализ поверхностей и складок, с помощью комплекса программ на базе специализированной системы компьютерной математики MATLAB 18. Таким образом, рассмотрена интересная задача, в которой существует многозначность угла атаки, что более понятно если мы рассматриваем механическую интерпретацию, но нетривиально с точки зрения общей теории решения дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: тело, область неоднозначности, сингулярные точки

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Беляков Д. В. Нарушение единственности решений для математической модели движения аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 3. С. 617-624. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.617-624>

© Беляков Д. В., 2022



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Violation of the Uniqueness of Solutions for the Mathematical Model of the Motion of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Quasi-Static Medium

D. V. Belyakov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Address: 4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation

dimbel@rambler.ru

Abstract

The article presents the construction and study of a mathematical model of small oscillations of an aerodynamic pendulum in a flow of a moving medium. The model of the impact of the medium on the body is taken as the model of the quasi-static flow around the plate by the medium. According to this hypothesis, the aerodynamic forces acting on the body are applied at the center of pressure. In our task, the pressure centre is movable relative to the plate. The equations of motion for the considered body are obtained. A transition to new dimensionless variables is carried out. Uniqueness is shown to be impaired when determining the angle of attack at points where the air velocity of the pressure center is near zero. Some areas of ambiguity are constructed using multiple solutions of algebraic nonlinear equations obtained from kinematic relations. This method of creating areas of ambiguity is rather laborious and does not allow it to be done within a wide range of phase variables. An easier way of dealing with ambiguity areas is to define the coordinates of return points and draw the boundaries of ambiguity areas as two envelopes. The algorithm for obtaining these envelopes is described in detail. In the mathematical package MATLAB 18, a program is written that builds the upper and lower boundaries of the ambiguity regions. With its help, a parametric analysis of folds was carried out for various values of phase variables. It is shown that the sizes of the obtained areas of ambiguity are small. It is specified that the change of the angle of the attack during integration must be continuous, otherwise there is a failure in the search for a numerical solution. A set of programs has also been created, which makes it possible to build areas of ambiguity by repeatedly solving a nonlinear equation. Thus, a mathematical model of plate vibrations has been developed and a geometric analysis of surfaces and folds has been carried out using a set of programs based on a specialized computer mathematics system MATLAB 18. In this way, a very interesting problem in which there is a multi-valued angle of attack is considered, which is more understandable if we consider a mechanical interpretation, but non-trivial from the point of view of the general theory of solving differential equations.

Keywords: body, area of ambiguity, singular points

Conflict of interests: The author declares no conflict of interest.

For citation: Belyakov D.V. Violation of the Uniqueness of Solutions for the Mathematical Model of the Motion of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Quasi-Static Medium. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022;18(3):617-624. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.617-624>



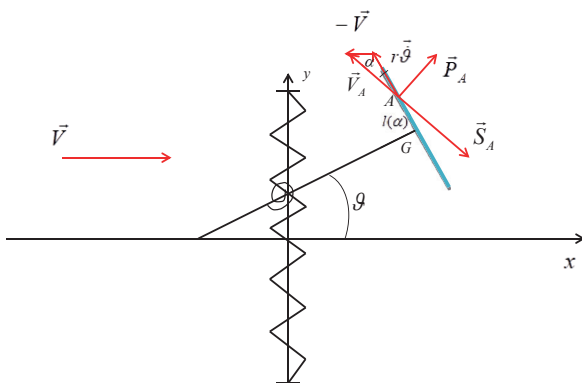
Введение

В работе рассматривается задача об автоколебаниях аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды. В рассматриваемую задачу входят функции, являющиеся экспериментальными данными. Учитывая нелинейный характер модели, экспериментальный характер аэродинамических функций, сложно провести глубокое аналитическое исследование и приходится применять численные методы. Исследование посвящено нарушению единственности решений системы дифференциальных уравнений, описывающих колебания маятника и поиску сингулярных точек. Проводится параметрический анализ областей неоднозначности.

Постановка задачи

Рассматривается задача о теле, представляющем из себя тонкую пластинку, установленную ортогонально стержню длины r . Тело закреплено в центре масс с помощью двух упругих элементов и совершает автоколебания в потоке среды (см. рисунок 1). Введем неподвижную систему координат XOY . Будем считать, что в положении покоя маятник занимает положение равновесия, в котором он ориентирован по потоку. Будем считать, что центр масс тела может двигаться только по вертикальной прямой, а силы деформации элементов крепления зависят от отклонений линейным образом и сводятся к восстанавливающей силе $F = -kx$ и возвращающему моменту $M = -c\vartheta$

Аэродинамические силы, приложенные к телу приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины.



Р и с. 1. Колебания тела сложной конфигурации в потоке среды
F i g. 1. Complex Configuration Body Oscillations in Environment Flow

В рассматриваемой модели предполагается, что центр давления пластинки точку А можно считать подвижной относительно пластинки. Аналогичная задача, только с неподвижным центром давления рассматривалась в работе [1]. Сдвиг центра давления описывается функцией $l(\alpha)$ (см. рис 4 для

$\lambda = 8$), которая описывает расстояние между центром давления А и геометрическим центром пластинки G. Зависимость $l(\alpha)$ определена из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и является экспериментальными данными¹ [2-8]. Аэродинамические силы, действующие на каждую пластинку, разложим на две составляющие: сила сопротивления \vec{S}_A , направленная против скорости \vec{V}_A точки А относительно потока среды, и подъемная сила \vec{P}_A , направленная ей ортогонально. При этом величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha)V_A^2$$

$$|\vec{P}_A| = p(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha)V_A^2$$

где α – угол атаки между вектором \vec{V}_A и пластинкой p, s – аэродинамические функции углов атаки, \tilde{n}_x, \tilde{n}_y – безразмерные аэродинамические функции (см. рисунки 2, 3 для $\lambda = 8$), ρ – плотность воздуха, σ – площадь одной пластинки. Вид аэродинамических функций для разных форм пластинок приводится в работе². Будем считать, что среда не влияет на стержень.

Составим уравнения движения рассматриваемого тела. В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координату y центра масс тела и угол ϑ отклонения пластинки от горизонтали [9-18].

Тогда теорема о движении центра масс в проекции на ось OY и теорема об изменении кинетического момента будут иметь вид:

$$m\ddot{y} = s(\alpha)V_A(l(\alpha)\dot{\vartheta}\sin\vartheta - r\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{y}) - p(\alpha)V_A(r\dot{\vartheta}\sin\vartheta + l(\alpha)\dot{\vartheta}\cos\vartheta + V) - ky \quad (1)$$

$$J\ddot{\vartheta} = rV_A^2\tau(\alpha) - l(\alpha)V_A^2n(\alpha) - c\vartheta$$

где

$$\tau(\alpha) = p(\alpha)\sin\alpha - s(\alpha)\cos\alpha$$

$$n(\alpha) = p(\alpha)\cos\alpha + s(\alpha)\sin\alpha$$

аэродинамические функции нормальной и касательной сил. Кинематические соотношения, связывающие V_A, α с $y, \dot{y}, \vartheta, \dot{\vartheta}$, имеют вид:

$$V_A \sin\alpha = l(\alpha)\dot{\vartheta} - \dot{y}\sin\vartheta + V \cos\vartheta \quad (2)$$

$$V_A \cos\alpha = r\dot{\vartheta} + \dot{y}\cos\vartheta + V \sin\vartheta$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений³ (1)-(2).

Введем новые безразмерным переменным:

$$Y = \frac{y}{b} \text{ безразмерная координата центра масс (здесь } b \text{ – ширина}$$

на пластинки)

$$\tau = \frac{V}{b}t \text{ безразмерное время}$$

$$\Omega = \frac{b\dot{\vartheta}}{V} \text{ безразмерная угловая скорость}$$

$$U = \frac{V_A}{V} \text{ безразмерная скорость центра давления}$$

¹ Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. 1974. № 1621. С. 79-93.

² Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. М. : Изд-во МГУ, 1992.

³ Журавлев В. Ф., Климов Д. М. Прикладные методы в теории колебаний. М. : Наука, 1988. 328 с.



$$M = \frac{mb}{0.5\rho\sigma} \text{ безразмерная масса}$$

$$K = \frac{kb}{0.5\rho\sigma V^2} \text{ безразмерный коэффициент жесткости пружины}$$

$$C = \frac{c}{0.5\rho\sigma V^2} \text{ безразмерный коэффициент восстанавливающего момента пружины}$$

$$I = \frac{J}{0.5\rho\sigma b} \text{ безразмерный момент инерции}$$

$$\varepsilon(\alpha) = \frac{l(\alpha)}{b} \text{ безразмерная функция сдвига центра давления}$$

$$R = \frac{r}{b} \text{ безразмерная длина стержня}$$

При переходе к новым безразмерным переменным уравнения (1) преобразуются к виду:

$$M\ddot{Y} = c_x(\alpha)U(R\Omega \cos \vartheta + \Omega \varepsilon(\alpha) \sin \vartheta - \dot{Y}) + c_y(\alpha)U(R\Omega \sin \vartheta + \Omega \varepsilon(\alpha) \cos \vartheta + 1) - KY \quad (3)$$

$$I\ddot{\vartheta} = U^2(Rc_r(\alpha) - \varepsilon(\alpha)c_n(\alpha)) - C\vartheta$$

$c_n(\alpha)$, $c_r(\alpha)$ изображены на рисунках 5,6 для $\lambda = 8$

После простых преобразований кинематические соотношения (2) будут иметь вид:

$$U \sin \alpha = \varepsilon(\alpha)\Omega - \dot{Y} \sin \vartheta + \cos \vartheta \quad (4)$$

$$U \cos \alpha = R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (3)-(4)

Неоднозначность определения угла атаки

В уравнения движения (3)-(4) рассматриваемой задачи входят функции $c_x(\alpha)$, $c_y(\alpha)$, $c_r(\alpha)$, $c_n(\alpha)$, $\varepsilon(\alpha)$, являющиеся экспериментальными данными⁴. Решение задачи (3)-(4) можно найти только численно. В [1] показано нарушение однозначности при определении угла атаки и проведена графическая интерпретация результатов решений уравнения (5) для прямоугольной пластинки с удлинением $\lambda = 8$ и построены соответствующие области и проведен их параметрический анализ. При численном интегрировании уравнений движения, определение угла атаки на каждом шаге сводится к решению нелинейного уравнения (5) при различных значениях фазовых переменных \dot{Y} , ϑ

$$(R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta)tg\alpha - \dot{Y} \cos \vartheta - \sin \vartheta = \varepsilon(\alpha)\Omega \quad (5)$$

Попытаемся оценить размеры областей неоднозначности. Граница областей неоднозначности состоит из двух огибающих:

$$\Omega = \frac{-\dot{Y} \cos \vartheta - \sin \vartheta}{R} \quad (6)$$

$$\Omega = \frac{-\dot{Y} \cos \vartheta (\sin \alpha - \cos \alpha) - 2 \sin \vartheta \sin \alpha}{(R \sin \alpha - \varepsilon(\alpha) \cos \alpha)} \quad (7)$$

Эти кривые можно представить в параметрической форме:

$$(R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta)tg\alpha - \dot{Y} \cos \vartheta - \sin \vartheta = \varepsilon(\alpha)\Omega \quad (8)$$

$$\frac{R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta}{\cos^2 \alpha} = \varepsilon'(\alpha)\Omega$$

Для оценки размеров областей нужно найти точки возврата искомых поверхностей к нормальному виду (особые точки). Продифференцируем второе уравнение еще раз и получим

$$\frac{2tg\alpha(R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta)}{\cos^2 \alpha} = \varepsilon''(\alpha)\Omega$$

и с учетом второго уравнения системы (7) можем записать уравнение (8), зависящее только от α .

$$2tg\alpha \varepsilon'(\alpha) = \varepsilon''(\alpha) \quad (9)$$

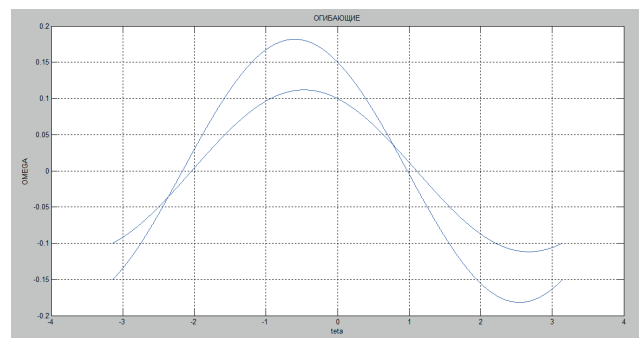
Проинтегрируем его с начальными условиями

$$\varepsilon(0) = \varepsilon m, \varepsilon'(\frac{\pi}{4}) = \varepsilon l$$

Пропуская простейшие преобразования, получим окончательное уравнение для нахождения α

$$\varepsilon m + tg\alpha = -\frac{2}{\varepsilon l} \varepsilon(\alpha) \quad (10)$$

Задавая начальные условия недалеко от точки пересечения тангенса и функции аэродинамического сдвига, мы можем найти приближенное решение с помощью встроенных функций системы MATLAB 18. Далее уже появляется возможность определить координаты особых точек и изобразить границы областей неоднозначности [19-25]. На рисунках (2-7) изображены верхняя и нижняя области неоднозначности – множество точек возврата при разных значениях параметров R , b , \dot{Y} .

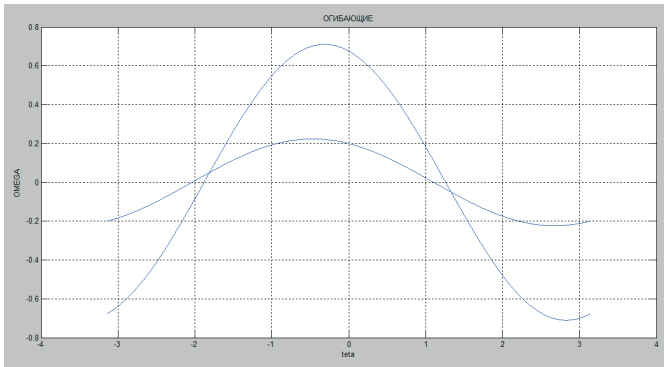


Р и с. 2. Огибающие для области неоднозначности при $R = 20, b = 10, \dot{Y} = 2$

F i g. 2. Envelopes for the region of ambiguity at $R = 20, b = 10, \dot{Y} = 2$

⁴ Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. 1974. № 1621.



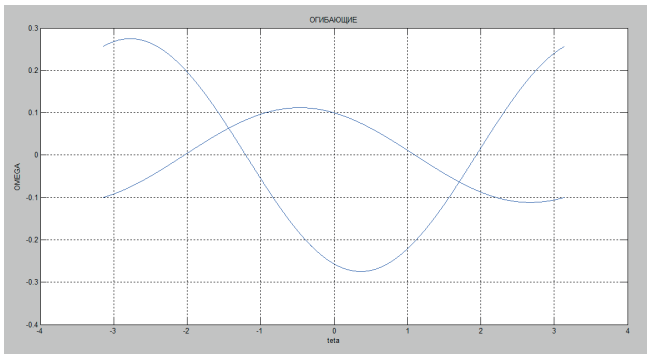
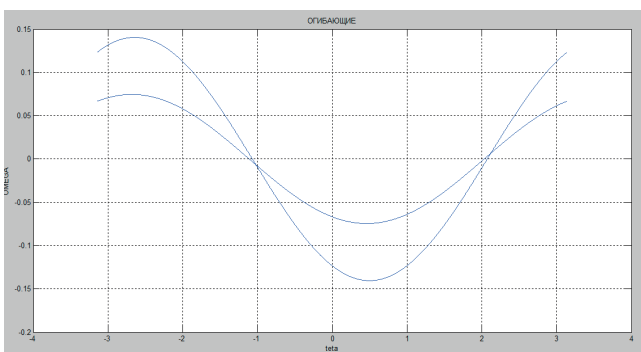


Р и с. 3. Огибающие для области неоднозначности при

$$R = 30, b = 0.3, \dot{Y} = 2$$

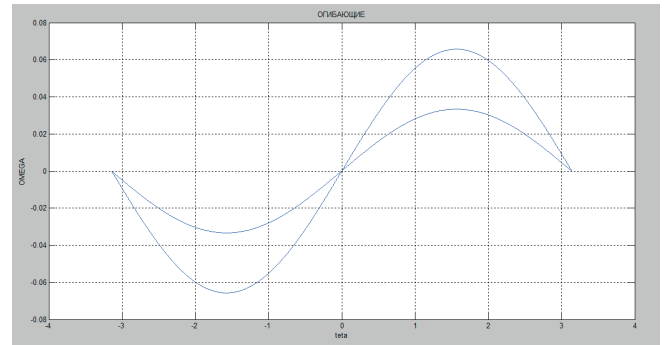
F i g. 3. Envelopes for the region of ambiguity at $R = 30, b = 0.3, \dot{Y} = 2$

Далее приведем разные варианты складок при различных значениях параметров R, b, \dot{Y}

Р и с. 4. Огибающие для области неоднозначности при $R = 5, b = 2, \dot{Y} = 2$ F i g. 4. Envelopes for the region of ambiguity at $R = 5, b = 2, \dot{Y} = 2$ 

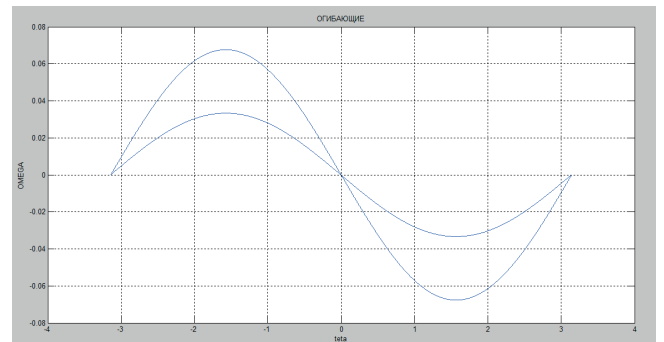
Р и с. 5. Огибающие для области неоднозначности при

$$R = 10, b = 0.3, \dot{Y} = -2$$

F i g. 5. Envelopes for the region of ambiguity at $R = 10, b = 0.3, \dot{Y} = -2$ 

Р и с. 6. Огибающие для области неоднозначности при

$$R = -30, b = 0.3, \dot{Y} = 0$$

F i g. 6. Envelopes for the region of ambiguity at $R = -30, b = 0.3, \dot{Y} = 0$ 

Р и с. 7. Огибающие для области неоднозначности при

$$R = 30, b = 0.3, \dot{Y} = 0$$

F i g. 7. Envelopes for the region of ambiguity at $R = 30, b = 0.3, \dot{Y} = 0$

Из рисунков 2-7 можно утверждать, что размер областей неоднозначности достаточно невелик.

Возникает вопрос: какое решение при прохождении области неоднозначности является истинным, и по какому правилу можно выбирать нужную ветвь при моделировании? Ведь неоднозначность определения угла атаки означает, что неоднозначно определяются аэродинамические функции и сдвиг центра давления. Учитывая то, что характер обтекания маятника носит непрерывный характер, значения угла атаки α нужно выбирать, сохраняя его непрерывность.

Заключение

Таким образом, в работе:

1. Создана математическая модель колебаний аэродинамического маятника в безразмерной форме.
 2. Показано нарушение единственности при определении угла атаки.
 3. Показана эволюция границ областей неоднозначности при различных значениях параметров R, b, \dot{Y}
- И найдены различные множества сингулярных точек.



Список использованных источников

- [1] Самсонов В. А., Беляков Д. В. Геометрический анализ при исследовании колебаний тела сложной конфигурации в потоке среды // *International Journal of Open Information Technologies*. 2019. Т. 7, № 9. С. 31-38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39529511> (дата обращения: 08.06.2022).
- [2] Беляков Д. В. Задача об исследовании автоколебаний аэродинамического маятника в потоке среды // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2020. Т. 16, № 2. С. 449-459. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.449-459>
- [3] Беляков Д. В. Устойчивость различных стационарных точек при малых колебаниях аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2021. Т. 17, № 4. С. 847-859. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.847-859>
- [4] Беляков Д. В. Режим авторотации при исследовании математической модели аэродинамического маятника в потоке среды // *Современные информационные технологии и ИТ-образование*. 2022. Т. 18, № 2. С. 404-411. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.404-411>
- [5] Беляков Д. В., Самсонов В. А., Филиппов В. В. Исследование движений несимметричного тела в сопротивляющейся среде // *Вестник Московского энергетического института*. 2006. № 4. С. 5-10. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (дата обращения: 08.06.2022).
- [6] Беляков Д. В. Разработка и исследование математической модели движения несимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде // *Мехатроника, Автоматизация, Управление*. 2007. № 11. С. 20-24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (дата обращения: 08.06.2022).
- [7] Samsonov V. A., Dosaev M. Z., Selyutskiy Yu. D. Methods of Qualitative Analysis in the Problem of Rigid Body Motion in Medium // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21, no. 10. P. 2955-2961. doi: <https://doi.org/10.1142/S021812741103026X>
- [8] Zotov A., Valeev A. Study of horizontal aerodynamic force directed against a fluid flow at oscillations of elastically suspended plate // *Liquid and Gaseous Energy Resources*. 2022. Vol. 2, issue 2. P. 58-65. doi: <https://doi.org/10.21595/lger.2022.23041>
- [9] Strickland J. H., Webster B. T., Nguyen T. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study // *Journal of Fluids Engineering*. 1979. Vol. 101, issue 4. P. 500-505. doi: <http://doi.org/10.1115/1.3449018>
- [10] Paraschivoiu I., Delclaux F. Double multiple streamtube model with recent improvements (for predicting aerodynamic loads and performance of Darrieus vertical axis wind turbines) // *Journal of Energy*. 1983. Vol. 7, no. 3. P. 250. doi: <http://doi.org/10.2514/3.48077>
- [11] Климина Л. А. Ротационные режимы движения аэродинамического маятника с вертикальной осью вращения // *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2009. № 5. С. 71-74. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13003165> (дата обращения: 08.06.2022).
- [12] Голуб А. П., Селюцкий Ю. Д. О влиянии упругого крепления на колебания двухзвенного аэродинамического маятника // *ТРУДЫ МФТИ. Труды Московского физико-технического института (национального исследовательского университета)*. 2017. Т. 9, № 3(35). С. 8-13. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32736027> (дата обращения: 08.06.2022).
- [13] Москатов Г. К., Чепелев А. А. Надежность и безопасность систем автоматического управления летательными аппаратами // *Научный вестник оборонно-промышленного комплекса России*. 2013. № 2. С. 41-63. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24276464> (дата обращения: 08.06.2022).
- [14] Alqurashi F., Mohamed M. H. Aerodynamic Forces Affecting the H-Rotor Darrieus Wind Turbine // *Modelling and Simulation in Engineering*. 2020. Vol. 2020. Article number: 1368369. doi: <http://doi.org/10.1155/2020/1368369>
- [15] Parashivoiu I. Aerodynamic loads and rotor performance for the Darrieus wind turbines // *Journal of Energy*. 1982. Vol. 6. P. 406-412. doi: <http://doi.org/10.2514/6.1981-2582>
- [16] Досаев М. З., Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. О динамике малой ветроэлектростанции // *Доклады Академии наук*. 2007. Т. 416, № 1. С. 50-53. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9533786> (дата обращения: 08.06.2022).
- [17] Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. Сопоставление различных форм записи уравнений движения тела в потоке среды // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2008. № 1. С. 171-178. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=10293701> (дата обращения: 08.06.2022).
- [18] Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // *Известия Российской академии наук. Механика твердого тела*. 2004. № 4. С. 24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17636289> (дата обращения: 08.06.2022).
- [19] Applications and Developments of Aeroelasticity of Flexible Structure in Flow Controls / J. Z. Zhang [и др.] // *Advances in Mechanics*. 2018. Vol. 48, issue 1. P. 299-319. doi: <http://doi.org/10.6052/1000-0992-16-034>
- [20] Климина Л. А., Локшин Б. Я. Об одном конструктивном методе поиска ротационных и автоколебательных режимов в автономных динамических системах // *Нелинейная динамика*. 2017. Т. 13, № 1. С. 25-40. doi: <http://doi.org/10.20537/nd1701003>
- [21] Климина Л. А. Метод формирования асинхронных автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы // *Прикладная математика и механика*. 2021. Т. 85, № 2. С. 152-171. doi: <http://doi.org/10.31857/S0032823521020065>



- [22] Лозовский И. В. Анализ математической модели авторотирующего несущего винта // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2021. № 6. С. 25-27. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46201456> (дата обращения: 08.06.2022).
- [23] Yao J., Yeo K. S. Free hovering of hummingbird hawkmoth and effects of wing mass and wing elevation // *Computers & Fluids*. 2019. Vol. 186. P. 99-127. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.04.007>
- [24] Hesamian G., Akbari M. G. A fuzzy additive regression model with exact predictors and fuzzy responses // *Applied Soft Computing*. 2020. Vol. 95. Article number: 106507. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106507>
- [25] Radionov A. A., Gasiyarov V. R. Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021) // *Lecture Notes in Mechanical Engineering*. Vol. II. Cham: Springer, 2022. 849 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-85230-6>

Поступила 08.06.2022; одобрена после рецензирования 20.08.2022; принята к публикации 15.09.2022.

Об авторе:

Беляков Дмитрий Валерьевич, доцент кафедры компьютерной математики Института № 8 «Информационные технологии и прикладная математика», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), кандидат технических наук, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, dimbelster@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

References

- [1] Samsonov V.A., Belyakov D.V. Geometrical analysis in the study of body oscillations of complex configuration in the medium flow. *International Journal of Open Information Technologies*. 2019;7(9):31-38. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39529511> (accessed 08.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [2] Belyakov D.V. The Problem of Studying the Self-Oscillations of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Medium. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2020;16(2):449-459. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.449-459>
- [3] Belyakov D.V. Stability of Various Stationary Points with Small Oscillations of the Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Quasi-Static Medium. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021;17(4):847-859. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.847-859>
- [4] Belyakov D.V. Geometrical Analysis in the Study of Body Oscillations of Complex Configuration in the Medium Flow. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022;18(2):404-411. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.404-411>
- [5] Belyakov D.V., Samsonov V.A., Filippov V.V. Motion Investigation of Asymmetric Solid in Resistant Environment. *Vestnik MEI. Bulletin of Moscow Power Engineering Institute*. 2006;(4):5-10. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (accessed 08.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [6] Belyakov D.V. Development and Features of Mathematical Model of Movement Asymmetrical Autorotating Bodies in Quasi-static to Environment. *Mechatronics, Automation, Control*. 2007;(11):20-24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (accessed 08.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [7] Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Yu.D. Methods of Qualitative Analysis in the Problem of Rigid Body Motion in Medium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011;21(10):2955-2961. doi: <https://doi.org/10.1142/S021812741103026X>
- [8] Zotov A., Valeev A. Study of horizontal aerodynamic force directed against a fluid flow at oscillations of elastically suspended plate. *Liquid and Gaseous Energy Resources*. 2022;2(2):58-65. doi: <https://doi.org/10.21595/lger.2022.23041>
- [9] Strickland J.H., Webster B.T., Nguyen T. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study. *Journal of Fluids Engineering*. 1979;101(4):500-505. doi: <http://doi.org/10.1115/1.3449018>
- [10] Paraschivoiu I., Delclaux F. Double multiple streamtube model with recent improvements (for predicting aerodynamic loads and performance of Darrieus vertical axis wind turbines). *Journal of Energy*. 1983;7(3):250. doi: <http://doi.org/10.2514/3.48077>
- [11] Klimina L.A. Rotational modes of motion for an aerodynamic pendulum with a vertical rotation axis. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2009;64(5):126. doi: <https://doi.org/10.3103/S0027133009050069>
- [12] Holub A.P., Selyutskiy Yu.D. On Influence of Elastic Mounting on Oscillations of a Double Aerodynamic Pendulum. *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*. 2017;9(3):8-13. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32736027> (accessed 08.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [13] Moskatov G.K., Chepelev A.A. Reliability and safety of feedback flight control systems. *Scientific Bulletin of the military-industrial complex of Russia*. 2013;(2):41-63. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24276464> (accessed 08.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [14] Alqurashi F., Mohamed M.H. Aerodynamic Forces Affecting the H-Rotor Darrieus Wind Turbine. *Modelling and Simulation in Engineering*. 2020;2020:1368369. doi: <http://doi.org/10.1155/2020/1368369>



- [15] Parashivoiu I. Aerodynamic loads and rotor performance for the Darrieus wind turbines. *Journal of Energy*. 1982;6:406-412. doi: <http://doi.org/10.2514/6.1981-2582>
- [16] Dosaev M.Z., Samsonov V.A., Seliutski Yu.D. On the Dynamics of a Small-Scale Wind Power Generator. *Doklady Physics*. 2007;52(9):493-495. doi: <http://doi.org/10.1134/S1028335807090091>
- [17] Samsonov V.A., Selyutskii Yu.D. Comparison of Different Notation for Equations of Motion of a Body in a Medium Flow. *Mechanics of Solids*. 2008;43(1):146-152. doi: <http://doi.org/10.1007/s11964-008-1015-x>
- [18] Samsonov V.A., Selyutskii Yu.D. About Vibrations of a Plate in a Flow of a Resisting Medium. *Mechanics of Solids*. 2004;(4):24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17636289> (accessed 08.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [19] Zhang J.Z., Liu Y., Sun X., Chen J.H., Wang L. Applications and Developments of Aeroelasticity of Flexible Structure in Flow Controls. *Advances in Mechanics*. 2018;48(1):299-319. doi: <http://doi.org/10.6052/1000-0992-16-034>
- [20] Klimina L.A., Lokshin B.Ya. On a constructive method of search for rotary and oscillatory modes in autonomous dynamical systems. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2017;13(1):25-40. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <http://doi.org/10.20537/nd1701003>
- [21] Klimina L.A. Method for Generating Asynchronous Self-Sustained Oscillations of a Mechanical System with Two Degrees of Freedom. *Mechanics of Solids*. 2021;56(7):1167-1180. doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654421070141>
- [22] Lozovsky I.V. Analysis of a mathematical model of an autorotation main rotor. *Flight*. 2021;(6):25-27. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46201456> (accessed 08.06.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [23] Yao J., Yeo K.S. Free hovering of hummingbird hawkmoth and effects of wing mass and wing elevation. *Computers & Fluids*. 2019;186:99-127. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.04.007>
- [24] Hesamian G., Akbari M.G. A fuzzy additive regression model with exact predictors and fuzzy responses. *Applied Soft Computing*. 2020;95:106507. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106507>
- [25] Radionov A.A., Gasiyarov V.R. Proceedings of the 7th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2021). In: Lecture Notes in Mechanical Engineering, Vol. II. Cham: Springer; 2022. 849 p. doi: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-85230-6>

Submitted 08.06.2022; approved after reviewing 20.08.2022; accepted for publication 15.09.2022.

About the author:

Dmitry V. Belyakov, Associate Professor of the Chair of Computational Mathematics, Institute of Computer Mathematics and Information Technologies, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation), Cand.Sci. (Eng.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, dimbelster@yandex.ru

The author has read and approved the final manuscript.

