

УДК 517.958

DOI: 10.25559/SITITO.18.202204.799-808

Оригинальная статья

Анализ неоднозначности угла атаки для модели аэродинамического маятника в потоке среды

Д. В. Беляков

ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4
dimbel@rambler.ru

Аннотация

Работа посвящена построению и исследованию математической модели автоколебаний аэродинамического маятника в потоке среды. В качестве модели воздействия среды на тело принята модель квазистатического обтекания пластинки средой. Согласно этой гипотезе, аэродинамические силы, действующие на тело, прикладываются в центре давления. В рассматриваемой задаче центр давления является подвижным относительно пластинки. Получены уравнения движения для рассматриваемого тела. Проведен переход к новым безразмерным переменным. Показано нарушение единственности при определении угла атаки. Проведен параметрический анализ областей неоднозначности. Показано, что в наиболее характерном положении равновесия, соответствующем состоянию покоя областей неоднозначности нет. Проведено исследование устойчивости различных положения равновесия, в которых реализован критерий Гурвица и изображены области устойчивости. Показано, что силы аэродинамического воздействия для тел с одними формами могут способствовать развитию автоколебаний, а для других затуханию. В математическом пакете MATLAB предложен комплекс программ, позволяющих проводить численные исследования, реализующий численное интегрирование уравнений описывающих колебания пластинки с неподвижным центром давления. Такая модель возможна при условии того, что длина стержня намного больше ширины пластинки. При запуске программы строится область устойчивости и на ней вводятся геометрические параметры: жесткость пружины и длина стержня. Далее вводится вектор начальных условий. При поиске численного решения используется процедура ode45, реализующая методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с переменным шагом. В файле-функции на каждом шаге метода Рунге-Кутта решается нелинейное уравнение из которого определяется угол атаки. При поиске численного решения экспериментальные аэродинамические функции интерполируются кубическим сплайном. Полученное путем интегрирования решение изображается на графике в виде фигур Лиссажу. Таким образом, разработана математическая модель колебаний пластинки, проведен параметрический анализ устойчивости, с помощью комплекса программ на базе специализированной системы компьютерной математики есть возможность подтвердить полученные аналитические результаты.

Ключевые слова: тело, стационарный режим, устойчивость, область устойчивости, флаттер

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Беляков Д. В. Анализ неоднозначности угла атаки для модели аэродинамического маятника в потоке среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 4. С. 799-808. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202204.799-808>

© Беляков Д. В., 2022



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Analysis of the Ambiguity of the Angle of Attack for the Model of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of the Medium

D. V. Belyakov

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russian Federation

Address: 4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation

dimbel@rambler.ru

Abstract

The work is devoted to the construction and study of a mathematical model of self-oscillations of an aerodynamic pendulum in a medium flow. The model of quasi-static flow of the plate by the medium was adopted as a model of the impact of the medium on the body. According to this hypothesis, the aerodynamic forces acting on the body are applied at the center of pressure. In the problem under consideration, the center of pressure is movable relative to the plate. A transition to new dimensionless variables is carried out. The violation of uniqueness in determining the angle of attack is shown. A parametric analysis of ambiguity domains is carried out. It is shown that in the most characteristic position of equilibrium, corresponding to the state of rest, there are no ambiguity regions. The stability of the equilibrium position corresponding to the state of rest was studied, in which the Hurwitz criterion was implemented, and the stability region was depicted. It is shown that aerodynamic forces for bodies with some forms can contribute to the development of self-oscillations, and for others, attenuation. In the MATLAB mathematical package, a set of programs is proposed allowing to carry out numerical research, realizing the numerical integration of equations describing the vibrations of a plate with a fixed pressure center. Such a model is possible, provided that the length of the rod is much greater than the width of the plate. When starting the program, a stability area is built and geometric parameters are entered on it: spring stiffness and rod length. The initial conditions vector is then entered. To find a numerical solution, the ode45 procedure is used, which implements the Runge-Kutta methods of the fourth and fifth orders with a variable step. In the function-file, at each step of the Runge-Kutta method, a nonlinear equation is solved from which the angle of attack is determined. When searching for a numerical solution, the experimental aerodynamic functions are interpolated by a cubic spline. The solution obtained by integration is shown on the graph in the form of Lissajous figures. Thus, a mathematical model of plate oscillations has been developed, a parametric analysis of stability has been carried out, and with the help of a set of programs based on a specialized system of computer mathematics, it is possible to confirm the obtained analytical results.

Keywords: body, stationary mode, stability, stability region, flutter

Conflict of interests: The author declares no conflict of interest.

For citation: Belyakov D.V. Analysis of the Ambiguity of the Angle of Attack for the Model of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of the Medium. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022;18(4):799-808. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202204.799-808>

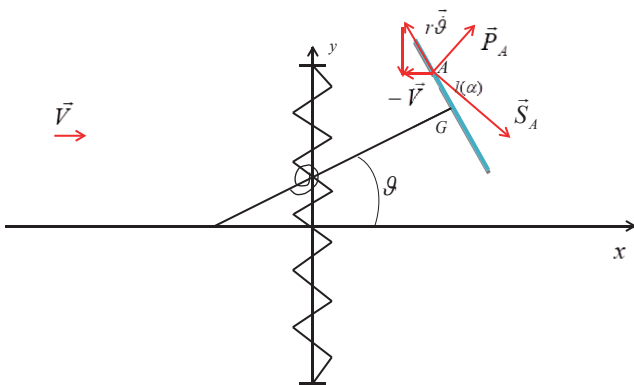


Введение

Рассматривается задача об автоколебаниях аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды. В уравнения движения входят функции, являющиеся экспериментальными данными, и они вносят свой вклад в появление нелинейных аэродинамических эффектов. Исследуется нарушение единственности при определении угла атаки, что дает возможность для соответствующих им стационарных точек построить области устойчивости.

Постановка задачи

Рассматривается задача о теле, представляющем из себя тонкую пластинку, установленную ортогонально стержню длины r . Тело закреплено в центре масс с помощью двух упругих элементов и совершает автоколебания в потоке среды (рис. 1). Введем неподвижную систему координат XOY . Будем считать, что в положении покоя маятник занимает положение равновесия, в котором он ориентирован по потоку. Будем считать, что центр масс тела может двигаться только по вертикальной прямой, а силы деформации элементов крепления зависят от отклонений линейным образом и сводятся к восстанавливающей силе $F = -kx$ и возвращающему моменту $M = -c\vartheta$. Аэродинамические силы, приложенные к телу приняты в соответствии с эмпирической теорией стационарного обтекания плоской пластины.



Р и с. 1. Колебания тела сложной конфигурации в потоке среды
F i g. 1. Complex Configuration Body Oscillations in Environment Flow

В рассматриваемой модели предполагается, что центр давления пластинки точку А можно считать подвижной относительно пластинки. Аналогичная задача, только с неподвижным центром давления рассматривалась в работе [1]. Сдвиг центра давления описывается функцией $l(\alpha)$ (рис. 4 для $\lambda = 8$), которая описывает расстояние между центром давления А и геометрическим центром пластинки G. Зависимость $l(\alpha)$ определена из продувок прямоугольных пластинок с заданным удлинением в аэродинамической трубе и является экспериментальными данными¹ [1-14]. Аэродинамические силы, действующие на

каждую пластинку, разложим на две составляющие: сила сопротивления \vec{S}_A , направленная против скорости \vec{V}_A точки А относительно потока среды, и подъемная сила \vec{P}_A , направленная ей ортогонально. При этом величины аэродинамических сил равны:

$$|\vec{S}_A| = s(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_x(\alpha)V_A^2$$

$$|\vec{P}_A| = p(\alpha)V_A^2 = 0.5\rho\sigma c_y(\alpha)V_A^2$$

где α - угол атаки между вектором \vec{V}_A и пластинкой P, S - аэродинамические функции углов атаки, \tilde{n}_x, \tilde{n}_y - безразмерные аэродинамические функции (см. рис. 2, рис. 3 для $\lambda = 8$), ρ - плотность воздуха, σ - площадь одной пластинки. Вид аэродинамических функций для разных форм пластинок приводится в работе². Будем считать, что среда не влияет на стержень.

Составим уравнения движения рассматриваемого тела. В качестве обобщенных координат, определяющих положение тела, введем координату y центра масс тела и угол ϑ отклонения пластинки от горизонтали.

Тогда теорема о движении центра масс в проекции на ось OY и теорема об изменении кинетического момента будут иметь вид:

$$m\ddot{y} = s(\alpha)V_A(l(\alpha)\dot{\vartheta}\sin\vartheta - r\dot{\vartheta}\cos\vartheta - \dot{y}) - p(\alpha)V_A(r\dot{\vartheta}\sin\vartheta + l(\alpha)\dot{\vartheta}\cos\vartheta + V) - ky \quad (1)$$

$$J\ddot{\vartheta} = rV_A^2\tau(\alpha) - l(\alpha)V_A^2n(\alpha) - c\vartheta$$

где

$$\tau(\alpha) = p(\alpha)\sin\alpha - s(\alpha)\cos\alpha$$

$$n(\alpha) = p(\alpha)\cos\alpha + s(\alpha)\sin\alpha$$

аэродинамические функции нормальной и касательной сил. Кинематические соотношения, связывающие V_A, α с $y, \dot{y}, \vartheta, \dot{\vartheta}$, имеют вид:

$$V_A\sin\alpha = l(\alpha)\dot{\vartheta} - \dot{y}\sin\vartheta + V\cos\vartheta \quad (2)$$

$$V_A\cos\alpha = r\dot{\vartheta} + \dot{y}\cos\vartheta + V\sin\vartheta$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (1)-(2).

Введем новые безразмерным переменным:

$$Y = \frac{y}{b}$$

безразмерная координата центра масс (здесь b - ширина пластинки)

$$\tau = \frac{V}{b}t$$

$$\Omega = \frac{b\dot{\vartheta}}{V}$$

$$U = \frac{V_A}{V}$$

$$M = \frac{mb}{0.5\rho\sigma}$$

$$K = \frac{kb}{0.5\rho\sigma V^2}$$

¹ Табачников В. Г. Стационарные характеристики крыльев на малых скоростях во всем диапазоне углов атаки // Труды ЦАГИ. 1974. № 1621. С. 79-93.

² Локшин Б. Я., Привалов В. А., Самсонов В. А. Введение в задачу о движении точки и тела в сопротивляющейся среде. М.: Изд-во МГУ, 1992.



$C = \frac{c}{0.5\rho\sigma V^2}$ безразмерный коэффициент восстанавливающего момента пружины

$I = \frac{J}{0.5\rho\sigma b}$ безразмерный момент инерции

$\varepsilon(\alpha) = \frac{l(\alpha)}{b}$ безразмерная функция сдвига центра давления

$R = \frac{r}{b}$ безразмерная длина стержня

При переходе к новым безразмерным переменным уравнения (1) преобразуются к виду:

$$M\ddot{Y} = c_x(\alpha)U(R\Omega \cos \vartheta + \Omega \varepsilon(\alpha) \sin \vartheta - \dot{Y}) + c_y(\alpha)U(R\Omega \sin \vartheta + \Omega \varepsilon(\alpha) \cos \vartheta + 1) - KY \quad (3)$$

$$I\ddot{\vartheta} = U^2(Rc_\tau(\alpha) - \varepsilon(\alpha)c_n(\alpha)) - C\vartheta$$

$c_n(\alpha)$, $c_\tau(\alpha)$ изображены на рисунках 5 и 6 для $\lambda = 8$

После простых преобразований кинематические соотношения (2) будут иметь вид:

$$U \sin \alpha = \varepsilon(\alpha)\Omega - \dot{Y} \sin \vartheta + \cos \vartheta \quad (4)$$

$$U \cos \alpha = R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta$$

Таким образом, построена математическая модель колебаний пластинки, представляющая замкнутую систему уравнений (3)-(4)

Неоднозначность определения угла атаки

В уравнения движения (3)-(4) рассматриваемой задачи входят функции $c_x(\alpha)$, $c_y(\alpha)$, $\varepsilon(\alpha)$, являющиеся экспериментальными данными. Решение задачи (3)-(4) можно найти только численно. При численном интегрировании уравнений движения, нужно сначала определить угол атаки из соотношений (4). Разделим первое уравнение (4) на второе и, избавляясь от U , получим:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\varepsilon(\alpha)\Omega - \dot{Y} \sin \vartheta + \cos \vartheta}{R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta} \quad (5)$$

Умножим правую и левую части уравнения (5) на знаменатель

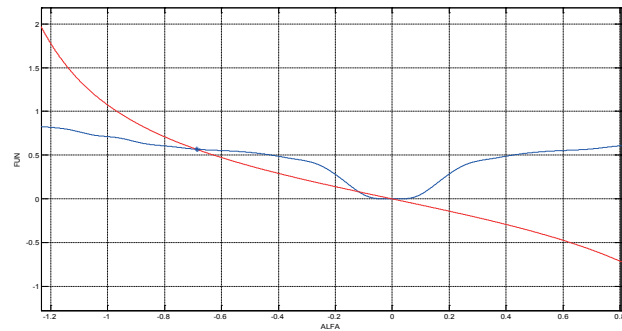
$$R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta \neq 0$$

Если знаменатель все-таки обращается в нуль, то тогда может быть потеряно решение $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

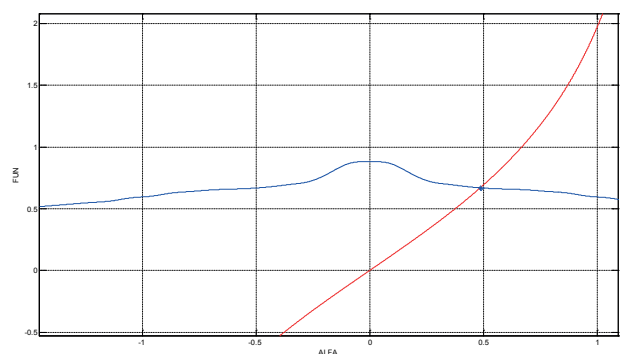
Получим нелинейное уравнение (6), равносильное соотношению (5):

$$(R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta) \operatorname{tg} \alpha - \dot{Y} \cos \vartheta - \sin \vartheta = \varepsilon(\alpha)\Omega \quad (6)$$

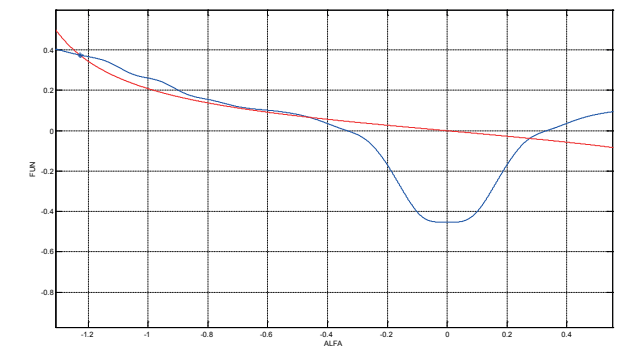
Мы можем решить уравнение (6) и найти угол атаки α при различных значениях фазовых переменных \dot{Y} , ϑ , ϑ . Поверхность $\alpha = \alpha(\dot{Y}, \vartheta, \vartheta)$ можно изобразить только в четырехмерном пространстве. Мы будем изображать поверхность $\alpha = \alpha(\vartheta, \vartheta)$ только при фиксированных значениях скорости центра масс \dot{Y} . Приведем графическую интерпретацию результатов решений уравнения (6) для пластинки шириной один метр с удлинением $\lambda = 8$, из которой следует нарушение единственности определения угла атаки при некоторых значениях \dot{Y} , ϑ , ϑ .



$\Omega < 0, R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta < 0$



$\Omega < 0, R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta > 0$



$\Omega < 0, R\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta < 0$

Р и с. 2. Неоднозначность углов атаки

F i g. 2. Ambiguity of angles of attack

Таким образом, существуют значения \dot{Y} , ϑ , ϑ , при которых поверхность $\alpha = \alpha(\vartheta, \vartheta)$ имеет складку, внутри которой кинематические соотношения (4) имеют ровно по три решения. Проведем параметрический анализ возможности попадания угла атаки $\alpha = \frac{\pi}{2}$, в область неоднозначности. Линеаризуем



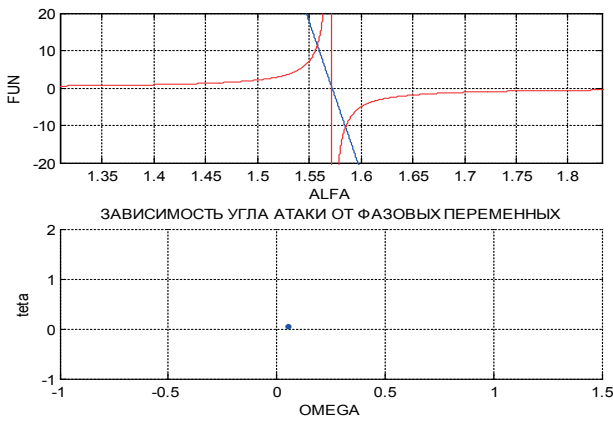
уравнение (6) в случае $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}, \vartheta \rightarrow 0$ получим:

$$(\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta)tg\alpha - \dot{Y} \cos \vartheta - \sin \vartheta = \Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2})(\alpha - \frac{\pi}{2})$$

Коэффициенты $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2})$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta$ влияют на характер наклона прямой и положение ветвей тангенса в уравнении (6 а).

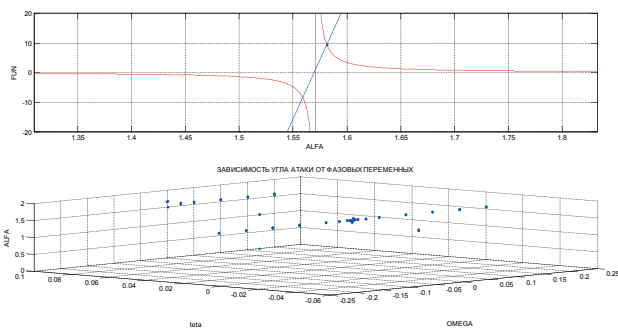
Приведем некоторые иллюстрации к решению (6 а) в малой окрестности (6 а) рассматриваемой точки.

1. В случае, когда $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2})$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta$ принимают значения разных знаков, мы видим, что всегда существуют два решения при разных наклонах.



Р и с. 3а. $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2}) < 0$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta > 0$

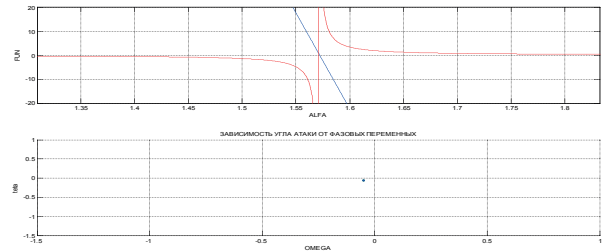
Fig. 3a. $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2}) < 0$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta > 0$



Р и с. 3б. $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2}) > 0$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta < 0$

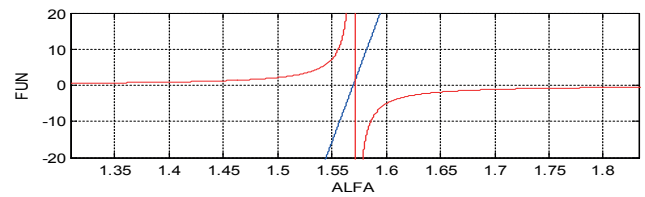
Fig. 3b. $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2}) > 0$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta < 0$

2. В случае, когда $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2})$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta$ принимают значения одних знаков, мы видим, что при разных наклонах прямой решений никогда нет.



Р и с. 4а. $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2}) < 0$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta < 0$

Fig. 4a. $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2}) < 0$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta < 0$

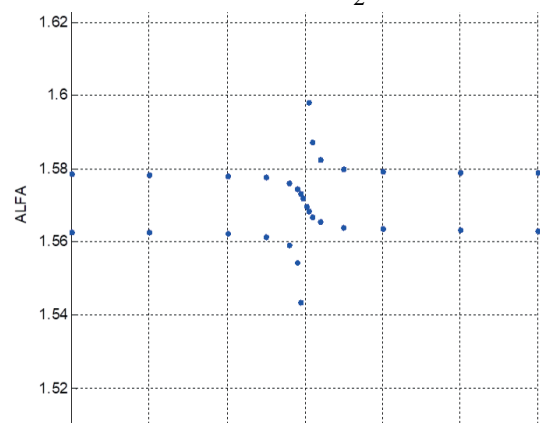


Р и с. 4б. $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2}) > 0$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta > 0$

Fig. 4b. $\Omega \varepsilon'(\frac{\pi}{2}) > 0$ и $\Omega + \dot{Y} \cos \vartheta + \sin \vartheta > 0$

На рисунке 5 приведена кривая $\alpha = \alpha(\Omega)$, которая является сечением $\alpha = \alpha(\Omega, \dot{Y})$ при $\dot{Y} = 0$ в допустимых пределах $80 \leq \alpha \leq 100$ градусов. На ней имеется одна центральная ветвь, проходящая через точку $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

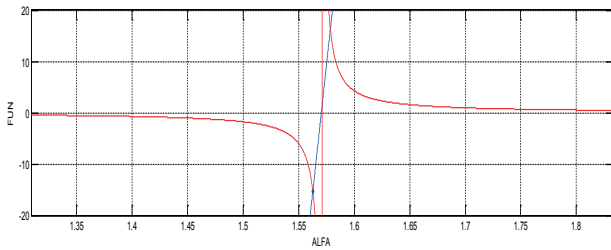
Две другие ветви, примыкающие к ней, лежат на ветвях тангенса и уходят в бесконечность в точке $\frac{\pi}{2}$. Таким образом, угол атаки принимает единственное значение при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Области неоднозначности примыкают к этому положению и могут быть ближе, либо дальше в зависимости от значений параметра $\varepsilon'(\frac{\pi}{2})$ [15-25].



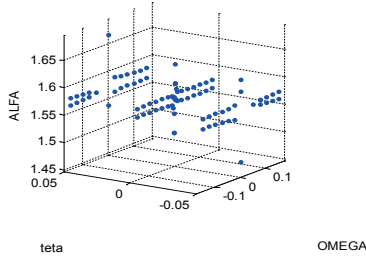
Р и с. 5. Неоднозначность при $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ в случае $\varepsilon'(\frac{\pi}{2}) < 0$

Fig. 5. Ambiguity at $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ in case $\varepsilon'(\frac{\pi}{2}) < 0$





ЗАВИСИМОСТЬ УГЛА АТАКИ ОТ ФАЗОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ



Р и с. 6. Другие сечения

Fig. 6. The dependence of the angle of attack on phase variables. Other sections

В следующем параграфе будут построены области устойчивости для тривиального положения равновесия.

Построение области устойчивости для тривиального положения равновесия

Будем считать, что маятник совершает малые колебания около тривиального положения равновесия $Y = 0, \vartheta = 0$. Исследуем его устойчивость. Для исследования устойчивости воспользуемся критерием Гурвица для системы четвертого порядка. Пусть $Y \rightarrow Y_*$ и $\vartheta \rightarrow \vartheta_*$. Введем малые отклонения: $Y = Y_* + \Delta Y$, $\vartheta = \vartheta_* + \Delta \vartheta$.

Линеаризуем уравнения движения (3) - (4), если $\Delta Y \rightarrow 0$ и $\Delta \vartheta \rightarrow 0$

$$M\Delta\ddot{Y} + (c_y'(\frac{\pi}{2}) + c_x(\frac{\pi}{2}))\Delta\dot{Y} + Ky + (a(\vartheta_*)R - b(\vartheta_*))\Delta\dot{\vartheta} + c_y'(\frac{\pi}{2})R\Delta\vartheta \sin \vartheta = 0 \quad (15)$$

$$-(\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2})\Delta\dot{Y} + I\Delta\ddot{\vartheta} - (b_1(\vartheta_*)R^2 + b_2(\vartheta_*)R + b_3(\vartheta_*))\Delta\dot{\vartheta} + (C - (\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2}))\Delta\vartheta = 0$$

Здесь $a(\vartheta_*), b(\vartheta_*), b_1(\vartheta_*), b_2(\vartheta_*), b_3(\vartheta_*)$ - некоторые функции угла ϑ_* вид которых мы приводить не будем из-за того, что это достаточно большие и громоздкие выражения.

Характеристическое уравнение системы (15) имеет вид:

$$a_0\lambda^4 + a_1\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_3\lambda + a_4 = 0$$

Приведем условия Гурвица

$$a_0 = MI > 0 \text{ (выполнено всегда)}$$

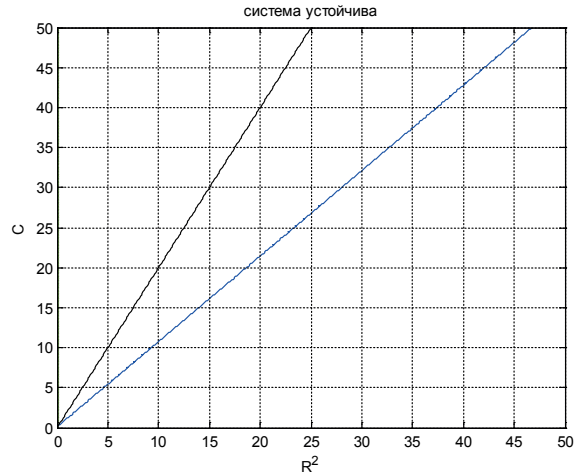
$$a_1 = M(b_1(\vartheta_*)R^2 + b_2(\vartheta_*)R + b_3(\vartheta_*)) + c_y' I > 0$$

$$a_2 = M(C - (\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2})) + c_x(\frac{\pi}{2})(b_1(\vartheta_*)R^2 + b_2(\vartheta_*)R + b_3(\vartheta_*)) + KI > 0$$

$$a_4 = K(C - (\varepsilon'(\frac{\pi}{2})c_n(\frac{\pi}{2})) + \varepsilon(\frac{\pi}{2})c_n'(\frac{\pi}{2})) > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ a_1 & a_3 & 0 \end{vmatrix} > 0$$

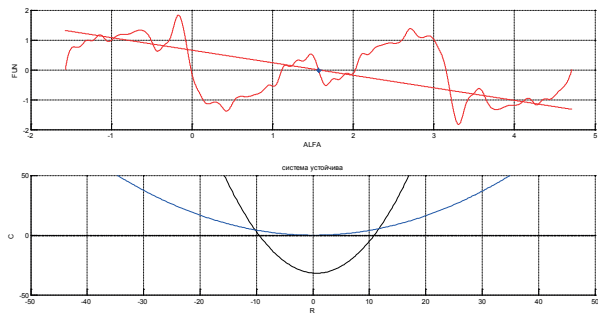
Сначала изобразим область устойчивости для положения $Y_* = 0, \vartheta_* = 0$ на плоскости безразмерных параметров (R^2, \tilde{N}) .



Р и с. 7. Область устойчивости (выше черной прямой)

Fig. 7. Stability region (above the black line)

Можно изобразить область устойчивости для положения $Y_* = 0, \vartheta_* = 0$ на плоскости безразмерных параметров (R, \tilde{N}) .



Р и с. 8. Область устойчивости (внутри черной параболы)

Fig. 8. Stability region (inside the black parabola)

Перейдем к следующему этапу данной работы – построению программы, которая строит области устойчивости и реализует численное интегрирование системы уравнений движения

Программа, интегрирующая уравнения движения

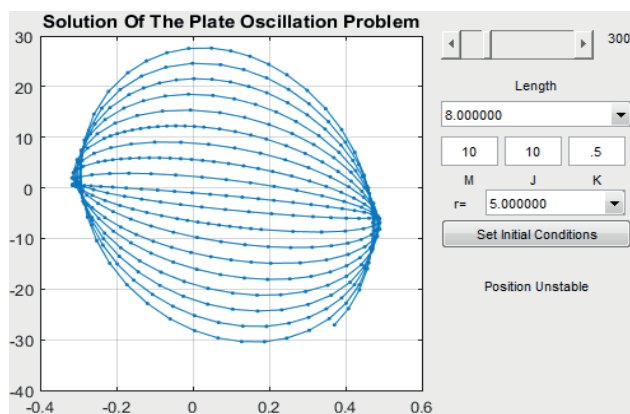
В математическом пакете MATLAB 18 написана программа, реализующая численное интегрирование уравнений (3)-(4), описывающих колебания пластинки. При поиске численного решения используется процедура ode45, реализующая методы Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка с переменным



шагом. При поиске численного решения аэродинамические функции интерполируются кубическим сплайном.

В программе задается интервал интегрирования, значения R и C вводятся путем выбора точки на графике области устойчивости, выбирается удлинение пластинки, длина стержня. Начальные условия также выбираются графически. Полученные путем интегрирования точки, изображаются как траектории в конфигурационном пространстве системы.

Для моделирования колебаний пластинки возьмем удлинение, равное пяти (рис. 9). Зададим значения \tilde{N} , R . Получим неустойчивость в нуле и уход траектории от состояния покоя.



Р и с. 9. Колебания тела в потоке среды
F i g. 9. Body vibrations in the medium flow

Заключение

Таким образом, в работе:

1. Создана математическая модель колебаний аэродинамического маятника.
2. Показано нарушение единственности при определении угла атаки. Проведен параметрический анализ областей неоднозначности.
3. Проведены численные исследования устойчивости, в которых реализованы критерий Гурвица и изображена область устойчивости при различных значениях параметров \tilde{N} , R .
4. Предложен комплекс программ, позволяющий строить области устойчивости и проводить численное интегрирование уравнений движения для исследуемой модели.

Список использованных источников

- [1] Самсонов В. А., Беляков Д. В. Геометрический анализ при исследовании колебаний тела сложной конфигурации в потоке среды // International Journal of Open Information Technologies. 2019. Т. 7, № 9. С. 31-38. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39529511> (дата обращения: 13.09.2022).
- [2] Беляков Д. В. Задача об исследовании автоколебаний аэродинамического маятника в потоке среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. Т. 16, № 2. С. 449-459. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.449-459>
- [3] Беляков Д. В. Устойчивость различных стационарных точек при малых колебаниях аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 4. С. 847-859. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.847-859>
- [4] Беляков Д. В. Режим авторотации при исследовании математической модели аэродинамического маятника в потоке среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 2. С. 404-411. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.404-411>
- [5] Беляков Д. В., Самсонов В. А., Филиппов В. В. Исследование движений несимметричного тела в сопротивляющейся среде // Вестник Московского энергетического института. 2006. № 4. С. 5-10. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (дата обращения: 13.09.2022).
- [6] Беляков Д. В. Разработка и исследование математической модели движения несимметричного авторотирующего тела в квазистатической среде // Мехатроника, Автоматизация, Управление. 2007. № 11. С. 20-24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (дата обращения: 13.09.2022).
- [7] Беляков Д. В. Нарушение единственности решений для математической модели движения аэродинамического маятника в потоке квазистатической среды // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18, № 3. С. 617-624. doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.617-624>
- [8] Samsonov V. A., Dosaev M. Z., Selyutskiy Yu. D. Methods of Qualitative Analysis in the Problem of Rigid Body Motion in Medium // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2011. Vol. 21, no. 10. P. 2955-2961. doi: <https://doi.org/10.1142/S021812741103026X>
- [9] Zotov A., Valeev A. Study of horizontal aerodynamic force directed against a fluid flow at oscillations of elastically suspended plate // Liquid and Gaseous Energy Resources. 2022. Vol. 2, issue 2. P. 58-65. doi: <https://doi.org/10.21595/lger.2022.23041>



- [10] Strickland J. H., Webster B. T., Nguyen T. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study // Journal of Fluids Engineering. 1979. Vol. 101, issue 4. P. 500-505. doi: <http://doi.org/10.1115/1.3449018>
- [11] Paraschivoiu I., Delclaux F. Double multiple streamtube model with recent improvements (for predicting aerodynamic loads and performance of Darrieus vertical axis wind turbines) // Journal of Energy. 1983. Vol. 7, no. 3. P. 250. doi: <http://doi.org/10.2514/3.48077>
- [12] Климина Л. А. Ротационные режимы движения аэродинамического маятника с вертикальной осью вращения // Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2009. № 5. С. 71-74. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=13003165> (дата обращения: 13.09.2022).
- [13] Голуб А. П., Селюцкий Ю. Д. О влиянии упругого крепления на колебания двухзвенного аэродинамического маятника // ТРУДЫ МФТИ. Труды Московского физико-технического института (национального исследовательского университета). 2017. Т. 9, № 3(35). С. 8-13. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32736027> (дата обращения: 13.09.2022).
- [14] Москатов Г. К., Чепелев А. А. Надежность и безопасность систем автоматического управления летательными аппаратами // Научный вестник оборонно-промышленного комплекса России. 2013. № 2. С. 41-63. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24276464> (дата обращения: 13.09.2022).
- [15] Alqurashi F., Mohamed M. H. Aerodynamic Forces Affecting the H-Rotor Darrieus Wind Turbine // Modelling and Simulation in Engineering. 2020. Vol. 2020. Article number: 1368369. doi: <http://doi.org/10.1155/2020/1368369>
- [16] Parashivoiu I. Aerodynamic loads and rotor performance for the Darrieus wind turbines // Journal of Energy. 1982. Vol. 6. P. 406-412. doi: <http://doi.org/10.2514/6.1981-2582>
- [17] Досаев М. З., Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. О динамике малой ветроэлектростанции // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, № 1. С. 50-53. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9533786> (дата обращения: 13.09.2022).
- [18] Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. Сопоставление различных форм записи уравнений движения тела в потоке среды // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2008. № 1. С. 171-178. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=10293701> (дата обращения: 13.09.2022).
- [19] Самсонов В. А., Селюцкий Ю. Д. О колебаниях пластины в потоке сопротивляющейся среды // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2004. № 4. С. 24. URL: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17636289> (дата обращения: 13.09.2022).
- [20] Applications and Developments of Aeroelasticity of Flexible Structure in Flow Controls / J. Z. Zhang [и др.] // Advances in Mechanics. 2018. Vol. 48, issue 1. P. 299-319. doi: <http://doi.org/10.6052/1000-0992-16-034>
- [21] Климина Л. А., Локшин Б. Я. Об одном конструктивном методе поиска ротационных и автоколебательных режимов в автономных динамических системах // Нелинейная динамика. 2017. Т. 13, № 1. С. 25-40. doi: <http://doi.org/10.20537/nd1701003>
- [22] Климина Л. А. Метод формирования асинхронных автоколебаний в механической системе с двумя степенями свободы // Прикладная математика и механика. 2021. Т. 85, № 2. С. 152-171. doi: <http://doi.org/10.31857/S0032823521020065>
- [23] Лозовский И. В. Анализ математической модели авторотирующего несущего винта // Полет. Общероссийский научно-технический журнал. 2021. № 6. С. 25-27. URL: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46201456> (дата обращения: 13.09.2022).
- [24] Yao J., Yeo K. S. Free hovering of hummingbird hawkmoth and effects of wing mass and wing elevation // Computers & Fluids. 2019. Vol. 186. P. 99-127. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.04.007>
- [25] Hesamian G., Akbari M. G. A fuzzy additive regression model with exact predictors and fuzzy responses // Applied Soft Computing. 2020. Vol. 95. Article number: 106507. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106507>

Поступила 13.09.2022; одобрена после рецензирования 21.11.2022; принята к публикации 29.11.2022.

Об авторе:

Беляков Дмитрий Валерьевич, доцент кафедры компьютерной математики Института № 8 «Информационные технологии и прикладная математика», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Российская Федерация, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), кандидат технических наук, **ORCID:** <https://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, dimbelster@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.



References

- [1] Samsonov V.A., Belyakov D.V. Geometrical analysis in the study of body oscillations of complex configuration in the medium flow. *International Journal of Open Information Technologies*. 2019;7(9):31-38. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=39529511> (accessed 13.09.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [2] Belyakov D.V. The Problem of Studying the Self-Oscillations of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Medium. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2020;16(2):449-459. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202002.449-459>
- [3] Belyakov D.V. Stability of Various Stationary Points with Small Oscillations of the Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Quasi-Static Medium. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021;17(4):847-859. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202104.847-859>
- [4] Belyakov D.V. Geometrical Analysis in the Study of Body Oscillations of Complex Configuration in the Medium Flow. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022;18(2):404-411. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202202.404-411>
- [5] Belyakov D.V., Samsonov V.A., Filippov V.V. Motion Investigation of Asymmetric Solid in Resistant Environment. *Vestnik MEI. Bulletin of Moscow Power Engineering Institute*. 2006;(4):5-10. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9455853> (accessed 13.09.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [6] Belyakov D.V. Development and Features of Mathematical Model of Movement Asymmetrical Autorotating Bodies in Quasi-static to Environment. *Mechatronics, Automation, Control*. 2007;(11):20-24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=9609383> (accessed 13.09.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [7] Belyakov D.V. Violation of the Uniqueness of Solutions for the Mathematical Model of the Motion of an Aerodynamic Pendulum in the Flow of a Quasi-Static Medium. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2022;18(3):617-624. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <https://doi.org/10.25559/SITITO.18.202203.617-624>
- [8] Samsonov V.A., Dosaev M.Z., Selyutskiy Yu.D. Methods of Qualitative Analysis in the Problem of Rigid Body Motion in Medium. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011;21(10):2955-2961. doi: <https://doi.org/10.1142/S021812741103026X>
- [9] Zotov A., Valeev A. Study of horizontal aerodynamic force directed against a fluid flow at oscillations of elastically suspended plate. *Liquid and Gaseous Energy Resources*. 2022;2(2):58-65. doi: <https://doi.org/10.21595/lger.2022.23041>
- [10] Strickland J.H., Webster B.T., Nguyen T. A Vortex Model of the Darrieus Turbine: An Analytical and Experimental Study. *Journal of Fluids Engineering*. 1979;101(4):500-505. doi: <http://doi.org/10.1115/1.3449018>
- [11] Paraschivoiu I., Delclaux F. Double multiple streamtube model with recent improvements (for predicting aerodynamic loads and performance of Darrieus vertical axis wind turbines). *Journal of Energy*. 1983;7(3):250. doi: <http://doi.org/10.2514/3.48077>
- [12] Klimina L.A. Rotational modes of motion for an aerodynamic pendulum with a vertical rotation axis. *Moscow University Mechanics Bulletin*. 2009;64(5):126. doi: <https://doi.org/10.3103/S0027133009050069>
- [13] Holub A.P., Selyutskiy Yu.D. On Influence of Elastic Mounting on Oscillations of a Double Aerodynamic Pendulum. *Proceedings of Moscow Institute of Physics and Technology*. 2017;9(3):8-13. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=32736027> (accessed 13.09.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [14] Moskatov G.K., Chepelev A.A. Reliability and safety of feedback flight control systems. *Scientific Bulletin of the military-industrial complex of Russia*. 2013;(2):41-63. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=24276464> (accessed 13.09.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [15] Alqurashi F., Mohamed M.H. Aerodynamic Forces Affecting the H-Rotor Darrieus Wind Turbine. *Modelling and Simulation in Engineering*. 2020;2020:1368369. doi: <http://doi.org/10.1155/2020/1368369>
- [16] Parashivoiu I. Aerodynamic loads and rotor performance for the Darrieus wind turbines. *Journal of Energy*. 1982;6:406-412. doi: <http://doi.org/10.2514/6.1981-2582>
- [17] Dosaev M.Z., Samsonov V.A., Seliutski Yu.D. On the Dynamics of a Small-Scale Wind Power Generator. *Doklady Physics*. 2007;52(9):493-495. doi: <http://doi.org/10.1134/S1028335807090091>
- [18] Samsonov V.A., Selyutskii Yu.D. Comparison of Different Notation for Equations of Motion of a Body in a Medium Flow. *Mechanics of Solids*. 2008;43(1):146-152. doi: <http://doi.org/10.1007/s11964-008-1015-x>
- [19] Samsonov V.A., Selyutskii Yu.D. About Vibrations of a Plate in a Flow of a Resisting Medium. *Mechanics of Solids*. 2004;(4):24. Available at: <https://elibrary.ru/item.asp?id=17636289> (accessed 13.09.2022). (In Russ., abstract in Eng.)
- [20] Zhang J.Z., Liu Y., Sun X., Chen J.H., Wang L. Applications and Developments of Aeroelasticity of Flexible Structure in Flow Controls. *Advances in Mechanics*. 2018;48(1):299-319. doi: <http://doi.org/10.6052/1000-0992-16-034>
- [21] Klimina L.A., Lokshin B.Ya. On a constructive method of search for rotary and oscillatory modes in autonomous dynamical systems. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. 2017;13(1):25-40. (In Russ., abstract in Eng.) doi: <http://doi.org/10.20537/nd1701003>
- [22] Klimina L.A. Method for Generating Asynchronous Self-Sustained Oscillations of a Mechanical System with Two Degrees of Freedom. *Mechanics of Solids*. 2021;56(7):1167-1180. doi: <https://doi.org/10.3103/S0025654421070141>
- [23] Lozovsky I.V. Analysis of a mathematical model of an autorotation main rotor. *Flight*. 2021;(6):25-27. Available at: <https://www.elibrary.ru/item.asp?id=46201456> (accessed 13.09.2022). (In Russ., abstract in Eng.)



- [24] Yao J., Yeo K.S. Free hovering of hummingbird hawkmoth and effects of wing mass and wing elevation. *Computers & Fluids*. 2019;186; 99-127. doi: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2019.04.007>
- [25] Hesamian G., Akbari M.G. A fuzzy additive regression model with exact predictors and fuzzy responses. *Applied Soft Computing*. 2020;95:106507. doi: <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106507>

Submitted 13.09.2022; approved after reviewing 21.11.2022; accepted for publication 29.11.2022.

About the author:

Dmitry V. Belyakov, Associate Professor of the Chair of Computational Mathematics, Institute of Computer Mathematics and Information Technologies, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4 Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russian Federation), Cand. Sci. (Eng.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5093-2963>, dimbelster@yandex.ru

The author has read and approved the final manuscript.

