

## Геометрическое перестроение расчетной сетки с помощью общей огибающей семейства сфер в задаче ледообразования

**А. А. Рыбаков**

ФГУ «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук», г. Москва, Российская Федерация

Адрес: 117218, Российская Федерация, г. Москва, Нахимовский пр., д. 36, корп. 1  
rybakov@jssc.ru

### Аннотация

При численном моделировании процесса нарастания льда на поверхности обтекаемого тела важную роль играет задача геометрического перестроения поверхностной расчетной сетки согласно интенсивности ледообразования. В данной задаче по интенсивности нарастания льда в узлах или ячейках рассматриваемой сетки необходимо вычислить новые положения узлов сетки, чтобы получившаяся конфигурация эволюционировавшей расчетной сетки адекватно отражала поверхность с образовавшимся на ней ледяным покровом. Одним из критичных требований к алгоритму перестроения сетки является его надежность, возможность работать с произвольными поверхностными сетками, способность работать с сильными изгибами сетки, складками и шумами, а также бороться с потенциальными самопересечениями. В данной статье рассматривается алгоритм перестроения поверхностной сетки, в котором новое положение узла расчетной сетки определяется как точка пересечения траектории движения узла и общей огибающей семейства сфер с центрами в точках роста льда и радиусами, соответствующими интенсивности роста льда. Предложенный алгоритм предназначен для работы с телами со сложной геометрией, при его использовании происходит затягивание локальных впадин, а также сглаживание острых пиков, что повышает качество итоговой сетки. Основным качеством разработанного алгоритма является его надежность, что позволяет ему работать с сетками произвольной сложности и с сетками, обладающими геометрическими дефектами.

**Ключевые слова:** ледообразование, поверхностная расчетная сетка, перестроение сетки

**Финансирование:** работа выполнена в Межведомственном суперкомпьютерном центре Российской академии наук – филиале ФГУ «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (МСЦ РАН) в рамках государственного задания по теме FNEF-2022-0016. В исследованиях использовался суперкомпьютер МВС-10П.

**Конфликт интересов:** автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Рыбаков А. А. Геометрическое перестроение расчетной сетки с помощью общей огибающей семейства сфер в задаче ледообразования // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2023. Т. 19, № 2. С. 282-291.

© Рыбаков А. А., 2023



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Mesh Geometric Rebuilding Using the Common Envelope of a Spheres Family in the Ice Accretion Problem

A. A. Rybakov

Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation

Address: 36, build. 1, Nakhimov Ave., Moscow 117218, Russian Federation  
rybakov@jssc.ru

### Abstract

In the numerical simulation of the process of ice growth on the surface of a streamlined body, an important role is played by the problem of geometric remeshing of the surface computational mesh according to the intensity of ice accretion. In this problem, according to the intensity of ice growth in the nodes or cells of the mesh, it is necessary to calculate the new positions of the mesh nodes so that the resulting configuration of the evolved computational mesh adequately reflects the surface with the ice cover formed on it. One of the critical requirements for the mesh rebuilding algorithm is its reliability, the ability to work with arbitrary surface meshes, the ability to work with strong mesh bends, wrinkles and noise, and to deal with potential self-intersections. This article considers an algorithm for rebuilding a surface mesh, in which the new position of a computational mesh node is defined as the point of intersection of the trajectory of the node and the common envelope of a spheres' family with centers at the points of ice growth and radii corresponding to the intensity of ice growth. The proposed algorithm is designed to work with bodies with complex geometry; when using it, local cavities are tightened, as well as sharp peaks are smoothed, which improves the quality of the final mesh. The main quality of the developed algorithm is its reliability, which allows it to work with meshes of arbitrary complexity and with meshes with geometric defects.

**Keywords:** ice accretion, surface computational mesh, remeshing

**Funding:** The work was carried out at the MSC RAS within the framework of the state assignment on the topic FNEF-2022-0016. The MBC-10П supercomputer was used in the research.

**Conflict of interests:** The author declares no conflict of interests.

**For citation:** Rybakov A.A. Mesh geometric rebuilding using the common envelope of a spheres family in the ice accretion problem. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2023;19(2):282-291.



## Введение

Численное моделирование процесса обледенения поверхности является сложной мультифизической задачей, включающей в себя моделирование процессов газовой динамики, теплообмена, течения жидкости, динамики капель в воздушном потоке и других. Исследование процессов ледообразования имеет важное практическое значение. В частности, характер и интенсивность образования льда на поверхности летательного аппарата критическим образом влияет на летные характеристики летательного аппарата, что напрямую связано с безопасностью полетов [1].

На сегодняшний день среди зарубежного программного обеспечения для моделирования процесса ледообразования лидером является программный комплекс ANSYS (включая модули FENSAP-ICE, DROP3D, ICE3D) [2]. В России также активно ведется разработка решений по этому направлению. Можно отметить исследования по разработке модуля iceFoam в составе открытого пакета OpenFOAM [3]. Среди коммерческих продуктов в последние годы активно развивается пакет IceVision в составе программного комплекса FlowVision [4, 5], а также решение в составе пакета инженерного анализа ЛОГОС<sup>1</sup>.

Моделирование процесса ледяного покрова осуществляется, как правило, на поверхностной расчетной сетке и состоит из двух основных частей. Первой частью является вычисление интенсивности нарастания льда в отдельных элементах сетки (это может быть вычисление массы скопившегося льда в каждой ячейке расчетной сетки за единицу времени, либо скорость образования ледяного покрова в узлах сетки, либо другие аналогичные характеристики). Для выполнения вычисления интенсивности нарастания льда в элементах расчетной сетки существует множество моделей ледообразования [6-8], учитывающих разные состояния льда, динамику водяной пленки, тепловые потоки и другие факторы. Различные модели ледообразования не рассматриваются в рамках данной работы. Второй важной составляющей моделирования ледяного нароста является определение изменения поверхности тела после нарастания на ней слоя льда. Этой задаче и посвящена настоящая статья.

## Задача эволюции поверхности в процессе ледообразования

Пусть поверхность тела, на которой моделируется процесс ледообразования, представлена неструктурированной поверхностной расчетной сеткой, ячейки которой являются треугольниками. Каждый узел сетки является точкой в пространстве  $\bar{N}$  (то есть имеет три координаты). В большинстве моделей ледообразования используются конечно-объемные численные методы, с помощью которых вычисляется масса  $\Delta M(f)$ , а значит, и объем  $V(f)$  наростшего льда в каждой ячейке  $f$  расчетной сетки за некоторое время  $\Delta t$ . Тогда задачей эволюции поверхностной сетки является определение таких новых положений ее узлов  $\bar{N} \rightarrow \bar{N}'$ , что для каждой ячейки расчетной сетки  $f$  с инцидентными узлами  $A, B, C$  объем фигуры  $ABCA'B'C'$

соответствует объему наростшего льда  $V(f)$  [9]. При этом задача делится на две части: определение направлений смещения узлов сетки и определение величин смещения узлов сетки. В качестве распространенного упрощения можно принять в качестве начальных направлений смещения узлов среднее значение внешних нормалей всех ячеек, инцидентных рассматриваемому узлу [3]. Отметим, что для двумерного аналога рассматриваемой проблемы для задачи определения смещений узлов сетки при фиксированных направлениях может быть найдено наилучшее решение с помощью метода наименьших квадратов (при которой задача сводится к решению системы линейных уравнений относительно неизвестных смещений узлов) [10]. В трехмерном варианте такой подход не работает, так как метод наименьших квадратов приводит к системе нелинейных уравнений, решение которой имеет свои особенности.

Наиболее простым и консервативным подходом является вычисление смещения узла как среднего арифметического высот льда всех инцидентных данному узлу ячеек (высота льда ячейки равна объему накопленного в ней льда, деленного на площадь этой ячейки). Такой метод, очевидно, отличается низкой точностью, особенно в местах изгибов сетки. Несколько повысить точность помогает применение итерационного подхода, когда вместо расчета эволюции сетки за один шаг применяется  $K$  последовательных шагов эволюции, на каждом из которых считается, что в ячейке  $f$  накоплено  $V(f)/K$  льда. При таком подходе траектория смещения узлов сетки становится кусочно-линейной, и общая ошибка по объему льда уменьшается [11].

Среди множества работ по эволюции расчетных сеток можно выделить направление, базирующееся на фундаментальной работе [12], в которой рассматриваются аспекты деформации поверхностных расчетных сеток с сохранением объема. Дело в том, что в процессе эволюции расчетной сетки некоторые ячейки могут растягиваться, некоторые сжиматься, что негативно влияет на дальнейший процесс перестроения сетки. Работа [12] предлагает в промежутках между итерациями перестроения производить специальные процедуры сглаживания сетки, в результате которых, с сохранением объема, осуществляется смещение некоторых узлов, что предотвращает появление областей повышенного сгущения и разрежения узлов. Использование таких сглаживаний получило свое развитие в методах деформации со смещением плоскостей ячеек перпендикулярно своим нормалям [13], а также в заметных работах [14, 15], в которых авторы используют дополнительные процедуры по сглаживанию нормалей ячеек и узлов, перераспределению объемов льда между ячейками и другие эвристические настройки, позволяющие повысить качество итоговой сетки, а метод, освещенный в работе [16] позволяет распространить полученные результаты на незамкнутые поверхностные сетки. При слишком сильном сжатии или, наоборот, растяжении отдельных ячеек, когда применение сглаживания уже не может скорректировать сетку в полной мере, можно применять разбиение слишком крупных ячеек [17] с сохранением локальной кривизны поверхности [18] или удаление слишком мелких ячеек путем стягивания сетки по слишком коротким ребрам [19].

<sup>1</sup> Особенности моделирования обледенения летательных аппаратов в естественных условиях полета / Н. Г. Галанов [и др.] // Супервычисления и математическое моделирование. Тезисы XVIII Международной конференции. Саров : ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», 2022. С. 4344. URL: <http://book.sarov.ru/product/supercomputing-abstracts-18> (дата обращения: 19.05.2023).



Узким местом всех рассмотренных методов эволюции сетки, кроме слишком долгого времени работы методов со сглаживаниями, являются проблемы при работе с телами сложной геометрии или при наличии дефектов сетки. Во многих случаях наличие слишком сильных изломов сетки, складок и шумов, а также глубоких впадин приводит к аварийному завершению алгоритма или к возникновению самопересечений сетки. Решение проблем с самопересечением сетки является необходимой и отдельной задачей, так как избежать самопересечений совсем невозможно при наличии глубоких впадин на изначальной сетке. В общем случае для устранения самопересечения сетки необходимо выполнить три основных действия. Сначала из всего множества треугольников, из которых состоит сетка, необходимо выбрать попарно пересекающиеся, при этом не используя для этого полный перебор всех треугольников [20], затем для каждой пары пересекающихся треугольников нужно вычислить точки их пересечения и выполнить триангуляцию ячеек по этим точкам [21], последним действием является удаление образовавшихся внутренних полостей полученной сетки [22]. В данной статье не будем подробно рассматривать удаление самопересечений сетки, остановившись на вопросе устойчивой работы алгоритма. Рассмотрим алгоритм определения смещений расчетной сетки, с помощью которого удастся справиться с мелкими локальными дефектами сетки, получив в результате более гладкую поверхность.

## Определение смещения узлов расчетной сетки во время ледообразования

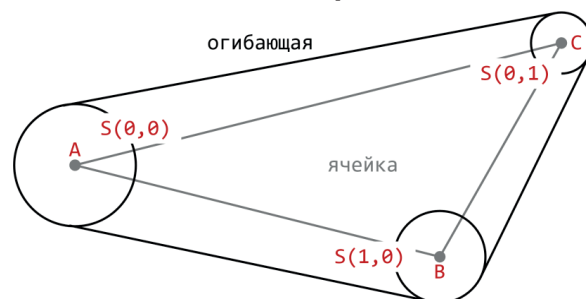
Рассмотрим геометрическую задачу определения новых положений узлов расчетной сетки, если для каждого узла  $\bar{N}$  известна скорость образования ледяного покрова  $v(\bar{N})$ , измеряемая в метрах в секунду. Будем считать, что нарастание льда в любой точке роста льда выполняется одновременно во всех направлениях аналогично принципу Гюйгенса-Френеля распространения волн. Таким образом, фронт распространения льда от произвольной точки  $\bar{P}$  через промежуток времени  $\Delta t$  будет иметь форму сферы с центром в точке  $\bar{P}$  и радиусом  $v(\bar{P})\Delta t$ . Далее будем считать, что мы выполняем расчет новых положений узлов через некоторый фиксированный момент времени  $\Delta t$ , то есть для каждого узла  $\bar{N}$  известен радиус продвижения фронта ледообразования  $R(\bar{N}) = v(\bar{N})\Delta t$ . Так как при выполнении численных расчетов фронт продвижения льда у нас представлен неструктурированной поверхностью расчетной сеткой, ячейки которой имеют форму треугольников, а радиусы продвижения фронта льда заданы только в узлах сетки, необходимо определить радиусы продвижения фронта льда для каждой точки внутри ячейки сетки. Рассмотрим некоторую ячейку расчетной сетки, это треугольник с вершинами  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  (каждая точка представлена вектором в трехмерном пространстве). Все точки треугольника  $ABC$  представляют собой геометрическое место точек, описываемое следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{P}(\beta, \gamma) = \bar{A} + \beta(\bar{B} - \bar{A}) + \gamma(\bar{C} - \bar{A}) = \bar{A} + \beta\bar{AB} + \gamma\bar{AC} \\ \beta \geq 0 \\ \gamma \geq 0 \\ \beta + \gamma \leq 1 \end{cases}$$

Далее определим для каждой точки  $\bar{P}(\beta, \gamma)$  радиус продвижения фронта льда как

$$R(\bar{P}(\beta, \gamma)) = R(\beta, \gamma) = R(\bar{A}) + \beta(R(\bar{B}) - R(\bar{A})) + \gamma(R(\bar{C}) - R(\bar{A})),$$

и фронт продвижения льда от точки  $\bar{P}(\beta, \gamma)$  представляет собой сферу  $S(\beta, \gamma) = S(\bar{P}(\beta, \gamma), R(\beta, \gamma))$ . Фронтом продвижения льда для всей ячейки расчетной сетки является огибающая множества сфер  $S(\beta, \gamma)$  для всех точек треугольника этой расчетной ячейки, что проиллюстрировано на рисунке 1. Пример использования принципа общей огибающей семейства сфер для решения геометрических задач можно найти в [23], где с помощью данного механизма моделируется опасная зона движения летательного аппарата.



Р и с. 1. Общая огибающая множества сфер, центры которых образуют треугольник в пространстве

Fig. 1. The common envelope curve of a set of spheres whose centers form a triangle in space

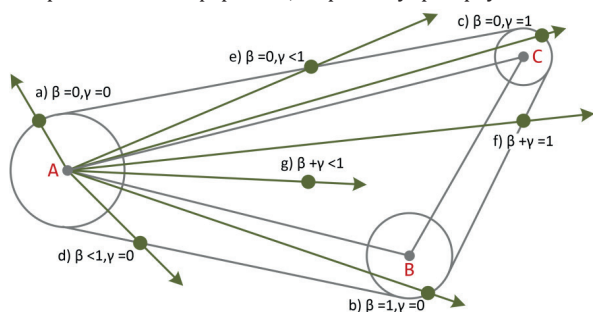
Источник: здесь и далее в статье все рисунки составлены автором.

Source: Hereinafter in this article all figures were drawn up by the author.

При изменении положения узлов расчетной ячейки (точки  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ ) будем исходить из предположения, что новые положения узлов расчетной ячейки (точки  $\bar{A}'$ ,  $\bar{B}'$ ,  $\bar{C}'$ ) будут находиться на общей огибающей множества сфер  $S(\beta, \gamma)$  (пока в данном расчете не учитываем влияние соседних расчетных ячеек). Без ограничения общности можно рассмотреть только одну вершину расчетной ячейки (точка  $\bar{A}$ ). Пусть траектория движения точки  $\bar{A}$  описывается уравнением прямой  $\bar{P}(\alpha) = \bar{A} + \alpha\bar{D}$  при  $\alpha \geq 0$  ( $\bar{D}$  — вектор направления движения точки, при этом можно считать  $|\bar{D}| = 1$ ). Для поиска точек пересечения траектории движения точки  $\bar{P}(\alpha) = \bar{A} + \alpha\bar{D}$  с произвольной сферой  $S(\beta, \gamma)$  необходимо подставить координаты точки  $\bar{P}(\alpha)$  в уравнение сферы  $|\bar{P} - \bar{C}(\beta, \gamma)| = R(\beta, \gamma)$ , где  $\bar{C}(\beta, \gamma)$  — центр рассматриваемой сферы. В результате получим уравнение  $|\bar{A} + \alpha\bar{D} - \bar{C}(\beta, \gamma)| = R(\beta, \gamma)$ , которое нужно решить относительно неизвестной  $\alpha$  при фиксированных параметрах  $\beta$ ,  $\gamma$ . Это уравнение является квадратным, оно имеет не более двух корней, которые являются функциями с двумя параметрами  $\alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(\beta, \gamma)$ . Для определения нового положения точки  $\bar{A}$  необходимо найти максимальное значение вещественного корня такого уравнения для всех допустимых значений параметров. При этом точка пересечения траектории движения точки  $\bar{A}$  с общей огибающей множества сфер  $S(\beta, \gamma)$  может находиться на разных участках данной огибающей, что продемонстрировано на рисунке 2 и связано с условиями, которым удовлетворяют параметры  $\beta$ ,  $\gamma$  (a, b, c — пересечение со сферой с центром в вершинах треугольника, d, e,



f — пересечение со сферой с центром на ребрах треугольника, g — пересечение со сферой с центром внутри треугольника).



Р и с. 2. Различные варианты пересечения траектории смещения узла и общей огибающей семейства сфер

Fig. 2. Various options for the intersection of the node displacement trajectory and the general envelope curve of the assemblage of spheres

Введем обозначения  $R_A = R(\bar{A})$ ,  $R_{AB} = R(\bar{B}) - R(\bar{A})$ ,  $R_{AC} = R(\bar{C}) - R(\bar{A})$ , тогда требуемое уравнение можно записать в виде  $|\alpha\bar{D} - (\beta\overline{AB} + \gamma\overline{AC})|^2 = (R_A + \beta R_{AB} + \gamma R_{AC})^2$ ,

или явно как квадратное уравнение относительно неизвестной величины  $\alpha$ :

$$|\bar{D}|^2 \alpha^2 - 2(\beta\overline{D, AB} + \gamma\overline{D, AC})\alpha + |\beta\overline{AB} + \gamma\overline{AC}|^2 - (R_A + \beta R_{AB} + \gamma R_{AC})^2 = 0.$$

Наибольший корень этого квадратного уравнения вычисляется следующим образом (с учетом условия  $|\bar{D}| = 1$ ):

$$\alpha(\beta, \gamma) = \beta\overline{D, AB} + \gamma\overline{D, AC} + \sqrt{(\beta\overline{D, AB} + \gamma\overline{D, AC})^2 - |\beta\overline{AB} + \gamma\overline{AC}|^2 + (R_A + \beta R_{AB} + \gamma R_{AC})^2},$$

или 
$$\begin{cases} \alpha(\beta, \gamma) = k_\beta \beta + k_\gamma \gamma + \sqrt{T} \\ T = q_{\beta^2} \beta^2 + q_{\gamma^2} \gamma^2 + q_{\beta\gamma} \beta\gamma + q_\beta \beta + q_\gamma \gamma + q \\ k_\beta = (\overline{D, AB}), \quad k_\gamma = (\overline{D, AC}) \\ q_{\beta^2} = (\overline{D, AB})^2 - |\overline{AB}|^2 + R_{AB}^2, \quad q_{\gamma^2} = (\overline{D, AC})^2 - |\overline{AC}|^2 + R_{AC}^2 \\ q_{\beta\gamma} = 2((\overline{D, AB})(\overline{D, AC}) - (\overline{AB, AC}) + R_{AB}R_{AC}) \\ q_\beta = 2R_A R_{AB}, \quad q_\gamma = 2R_A R_{AC}, \quad q = R_A^2 \end{cases}$$

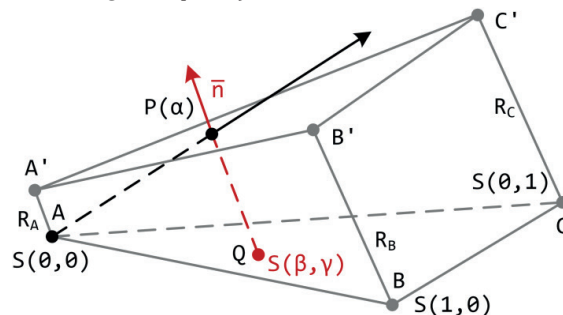
Для поиска нового положения точки  $\bar{A}$  требуется найти максимум выражения  $\alpha(\beta, \gamma)$  при условии соблюдения ограничений  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $\beta + \gamma \leq 1$ . Максимум выражения  $\alpha(\beta, \gamma)$  достигается либо при условии нахождения центра сферы внутри треугольника  $ABC$ , либо на одной из его сторон.

В случае нахождения центра сферы на стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  выполняется условие  $\gamma = 0$ , и выражение для величины  $\alpha$  имеет вид  $\alpha_{\gamma=0}(\beta) = k_\beta \beta + \sqrt{q_{\beta^2} \beta^2 + q_\beta \beta + q}$ . В случае нахождения центра сферы на стороне  $AC$  треугольника  $ABC$  выполняется условие  $\beta = 0$ , и выражение для величины  $\alpha$  имеет вид  $\alpha_{\beta=0}(\gamma) = k_\gamma \gamma + \sqrt{q_{\gamma^2} \gamma^2 + q_\gamma \gamma + q}$ . В случае нахождения центра сферы на стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  выполняется условие  $\beta + \gamma = 1$ , и выражение для величины  $\alpha$  имеет следующий вид:

$$\alpha_{\beta+\gamma=1}(\gamma) = (k_\gamma - k_\beta)\gamma + k_\beta + \sqrt{(q_{\beta^2} + q_{\gamma^2} - q_{\beta\gamma})\gamma^2 + (-2q_{\beta^2} + q_{\beta\gamma} - q_\beta + q_\gamma)\gamma + (q_{\beta^2} + q_\beta + q)}$$

Во всех случаях нахождения центра сферы на одной из сторон треугольника задача нахождения максимального значения  $\alpha(\beta, \gamma)$  при заданных ограничениях сводится к задаче поиска максимального значения функции вида  $\alpha(x) = k_x x + k + \sqrt{q_{x^2} x^2 + q_x x + q}$  (с учетом этих ограничений), что не представляет труда (точкой максимума является либо точка локального экстремума, либо точка, находящаяся на границе области определения функции).

Отдельно рассмотрим вариант, когда центр искомой сферы находится внутри треугольника. В этом случае точка пересечения траектории  $P(\alpha) = A + \alpha\bar{D}$  находится на общей касательной плоскости к сферам  $S(0,0)$ ,  $S(1,0)$ ,  $S(0,1)$  (плоскость  $A'B'C'$ , см. рис. 3).



Р и с. 3. Случай нахождения пересечения траектории движения точки с общей огибающей семейства сфер, если центр сферы лежит внутри треугольника

Fig. 3. The case of finding the intersection of the trajectory of a point with the general envelope curve of an assemblage of spheres, if the center of the sphere lies inside the triangle

Центр искомой сферы находится в точке пересечения плоскости  $ABC$  и прямой, проходящей через точку  $P(\alpha)$  и направленной вдоль нормали к плоскости  $A'B'C'$ . Если вектор единичной нормали плоскости  $A'B'C'$  обозначить через  $\bar{n}$ , то взаимосвязь точек плоскостей  $ABC$  и  $A'B'C'$  можно выразить следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{A}' &= \bar{A} + \bar{n}R_A \\ \bar{B}' &= \bar{B} + \bar{n}R_B \\ \bar{C}' &= \bar{C} + \bar{n}R_C \end{aligned}$$

Для нахождения вектора  $\bar{n}$  используем тот факт, что результат векторного произведения  $\bar{A}'B' \times \bar{A}'C'$  коллинеарен вектору  $\bar{n}$ . Данный факт записывается в явном виде:

$$(\bar{A}B + \bar{n}R_{AB}) \times (\bar{A}C + \bar{n}R_{AC}) = t\bar{n}$$

$$\bar{A}B \times \bar{A}C + R_{AB}(\bar{n} \times \bar{A}C) - R_{AC}(\bar{n} \times \bar{A}B) = t\bar{n}$$

$$t \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + R_{AC} \begin{pmatrix} n_y AB_z - n_z AB_y \\ n_z AB_x - n_x AB_z \\ n_x AB_y - n_y AB_x \end{pmatrix} - R_{AB} \begin{pmatrix} n_y AC_z - n_z AC_y \\ n_z AC_x - n_x AC_z \\ n_x AC_y - n_y AC_x \end{pmatrix} = \overline{AB} \times \overline{AC}$$

Данное соотношение может выполняться при  $t > 0$ , либо  $t < 0$ , что соответствует существованию двух общих касательных плоскостей к трем сферам. Перепишем приведенное соот-



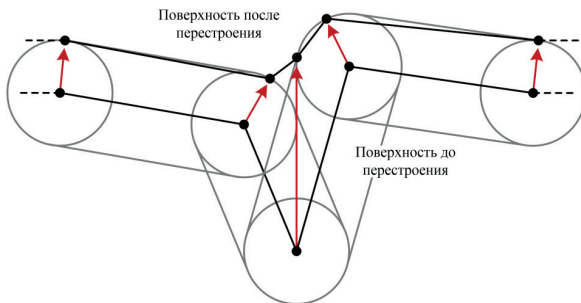
ношение в виде системы линейных уравнений относительно составляющих нормали при произвольном значении параметра  $t$ .

$$\begin{pmatrix} t & R_{AC}AB_z - R_{AB}AC_z & R_{AB}AC_y - R_{AC}AB_y \\ R_{AB}AC_z - R_{AC}AB_z & t & R_{AC}AB_x - R_{AB}AC_x \\ R_{AC}AB_y - R_{AB}AC_y & R_{AB}AC_x - R_{AC}AB_x & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \overline{AB} \times \overline{AC}$$

Из данной системы уравнений находятся два возможных направления нормали к общей касательной плоскости для сфер  $S(0,0)$ ,  $S(1,0)$ ,  $S(0,1)$ . Для каждого направления нормали находится плоскость  $A'B'C'$  и точка  $P(\alpha) = \bar{A} + \alpha\bar{D}$  на ней (и сам искомый параметр  $\alpha$ ). Данную точку можно учитывать в общем наборе решений только в том случае, если ей соответствует сфера  $S(\beta, \gamma)$ , параметры которой удовлетворяют условиям  $\beta \geq 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $\beta + \gamma \leq 1$ . Параметры  $\beta$  и  $\gamma$  можно определить путем поиска точки пересечения прямой  $P(\alpha) - x\bar{n}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  и плоскости  $ABC$ .

Таким образом, найдя решения всех потенциально возможных частных случаев, представленных на рисунке 2, находим множество решений  $\alpha$ , из которых для определения актуального нового положения точки  $A'$  необходимо выбрать максимальное. На этом определение смещения узлов расчетной сетки завершено.

Изложенный выше алгоритм касается определения смещения узла с учетом только одной инцидентной ячейки. При рассмотрении отдельного узла расчетной сетки требуется вычислить смещение данного узла относительно каждой инцидентной ячейки и выбрать среди этих смещений максимальное (см. рис. 4). На рисунке 4 представлена двумерная иллюстрация действия алгоритма на примере затягивания небольшой впадины. Видно, что результирующая поверхность получилась более гладкой, хоть некоторые ячейки и стянулись в более мелкие. Для повышения качества сетки можно выполнить удаление слишком мелких ячеек.

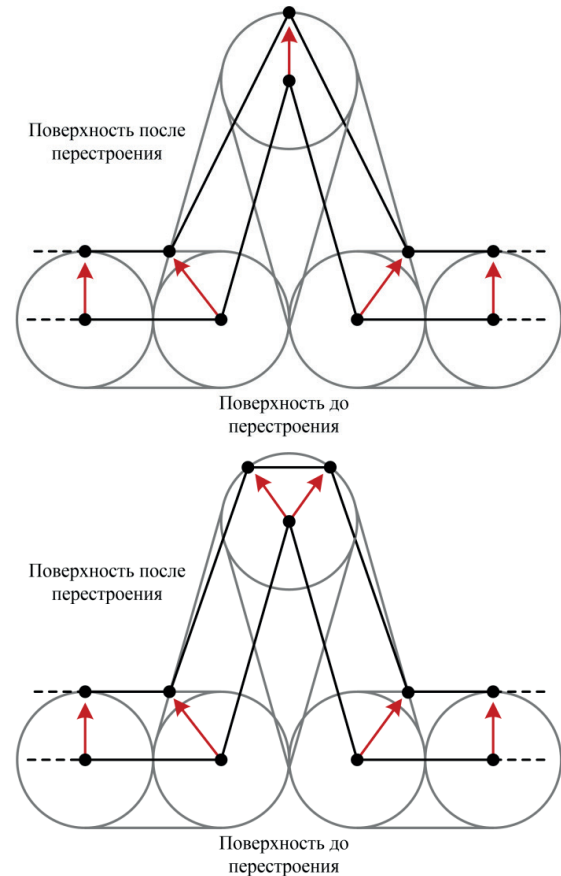


Р и с. 4. Схема стягивания впадины после одного шага алгоритма перестроения поверхности с использованием общей огибающей семейства сфер

F i g. 4. Scheme of depression contraction after one step of the surface reconstruction algorithm using the general envelope curve of an assemblage of spheres

Другим интересным случаем является результат работы алгоритма на участках сетки с острыми выпуклыми пиками (рис. 5). Из данного рисунка видно, что в результате работы алгоритма острый угол сглаживается, и при продолжении наращи-

вания льда в несколько итераций сглаживание продолжится (рис. 5, слева). Следует отметить, что на таких острых пиках несколько снижена точность по объему льда. Данную точность можно повысить путем добавления новых узлов расчетной сетки и корректировки направлений смещения получившихся вершин (рис. 5, справа), однако в текущей реализации данный механизм не реализован.



Р и с. 5. Сглаживание острых выпуклых пиков поверхности в результате работы алгоритма

F i g. 5. Smoothing of sharp convex surface peaks as a result of the algorithm

## Результаты

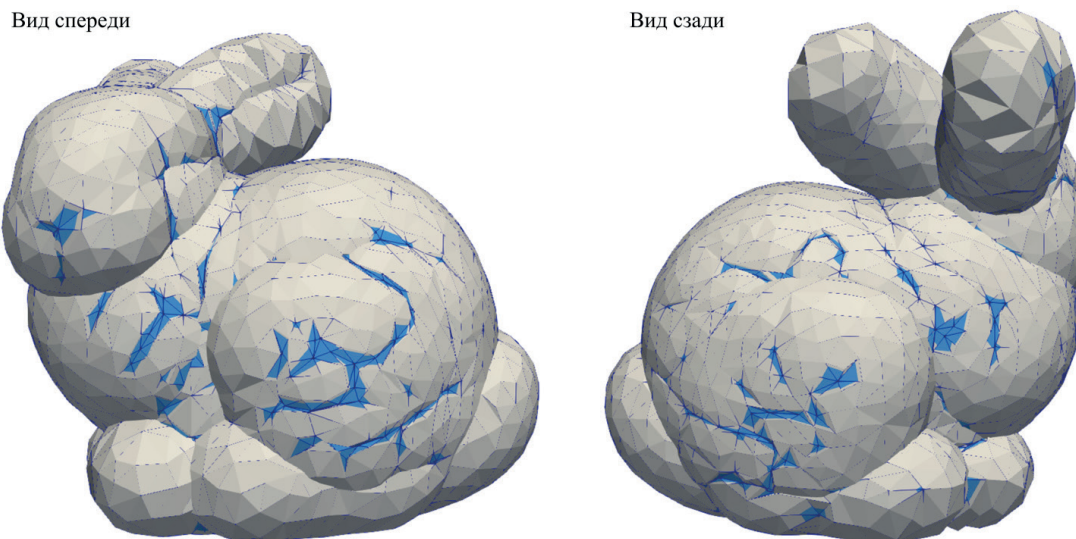
Описанный в работе алгоритм реализован в программном коде на языке Python в рамках открытого репозитория<sup>2</sup>. Тестирование работы алгоритма выполнялось на модельных поверхностях, взятых из открытых источников, в частности на моделях из The Stanford 3D Scanning Repository. Текущая реализация пока не включает в себя функционал по устранению самопересечений итоговой расчетной сетки, однако алгоритм устранения самопересечений для данного вида сеток проработан, и его описание доступно в [24]. В результате реализации описанного в работе алгоритма удалось получить программный модуль, способный обрабатывать поверхностные расчетные сетки произвольной сложности и содержащие дефекты. Также данный

<sup>2</sup> Rybakov A. Remesh [Электронный ресурс] // GitHub, Inc., 2023. URL: <https://github.com/r-aax/remesh> (дата обращения: 19.05.2023).



алгоритм не содержит итерационных процедур сглаживания, что позволяет ему работать существенно быстрее, например, алгоритма из [15]. Скорость работы данного алгоритма крайне существенна, использование быстрого алгоритма позволило полностью отказаться от распараллеливания его на несколько вычислительных узлов суперкомпьютера и использовать для

его реализации язык программирования Python. При этом такое упрощение не повлияло на эффективность масштабирования всей задачи моделирования процесса ледообразования при выполнении вычислений на суперкомпьютере [25].



Р и с. 6. Демонстрация сглаживания мелких впадин на модельной поверхности  
Fig. 6. Demonstration of smoothing small depressions on a model surface

## Заключение

В рамках проведенного исследования был разработан новый алгоритм перестроения неструктурированной поверхностной расчетной сетки, применяемый в задаче численного моделирования процесса ледообразования на поверхности обтекаемого тела. Причиной разработки нового алгоритма стала невозможность использования существующих алгоритмов для поверхностей со сложной геометрией и поверхностей, обладающих дефектами (впадины, складки и шум, острые края). При моделировании нарастания льда крайне важно обеспечить бесперебойную работу программы при перестроении поверхности. Разработанный алго-

ритм полностью справляется с поставленной задачей, он свободен от случаев аварийного завершения при работе с проблемными поверхностями, более того, в результате работы алгоритма происходит затягивание мелких впадин на поверхности и сглаживание острых выпуклых пиков. К тому же разработанный алгоритм свободен от итерационных процессов сглаживания, что существенно влияет на скорость его работы даже при обработке крупных расчетных сеток. В текущей версии реализации отсутствует функционал по удалению самопересечения итоговой сетки, поэтому для предотвращения самопересечений следует применять алгоритм с небольшими шагами по времени и со стягиванием коротких ребер.

## Список использованных источников

- [1] Михайловский К. В., Барановски С. В. Учет обледенения поверхности крыла из полимерных композиционных материалов при проектных расчетах // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2019. № 3(708). С. 61-70. <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2019-3-61-70>
- [2] Февральских А. В. Численное моделирование обледенения крыла экраноплана // Труды Крыловского государственного научного центра. 2019. № 4(390). С. 117-124. <https://doi.org/10.24937/254223242019-4-390-117-124>
- [3] Кошелев К. Б., Мельникова В. Г., Стрижак С. В. Разработка решателя iceFoam для моделирования процесса обледенения // Труды ИСП РАН. 2020. Т. 32, № 4. С. 217-234. [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2020-32\(4\)-16](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2020-32(4)-16)
- [4] Numerical simulation of ice accretion on airplane surface / A. A. Aksenov [et al.] // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2125, issue 1. Article number: 030013. <https://doi.org/10.1063/1.5117395>



- [5] Аксёнов А. А. FlowVision: индустриальная вычислительная гидродинамика // Компьютерные исследования и моделирование. 2017. Т. 9, № 1. С. 5-20. <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2017-9-5-20>
- [6] Bartkus T. P., Struk P. M., Tsao J.-C. Evaluation of a Thermodynamic Ice-Crystal Icing Model Using Experimental Ice Accretion Data // Atmospheric and Space Environments Conference. 2018. <https://doi.org/10.2514/6.2018-4129>
- [7] Zhang X., Wu X., Min J. Aircraft icing model considering both rime ice property variability and runback water effect // International Journal of Heat and Mass Transfer. 2017. Vol. 104. P. 510-516. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.08.086>
- [8] Study on natural ice-melting process of insulator by thermodynamic analysis / R.-W. Zhou [et al.] // Thermal Science. 2022. Vol. 26, no. 6B. P. 5015-5025. <https://doi.org/10.2298/TSCI211014106Z>
- [9] Porter C. E., Rigby D. L. Three Dimensional Surface Redefinition Method for Computational Ice Accretion Solvers // AIAA Aviation Forum. 2020. <https://doi.org/10.2514/6.2020-2831>
- [10] Rybakov A. A., Shumilin S. S. Approximate methods of the surface mesh deformation in two-dimensional case // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2019. Vol. 40, no. 11. P. 1848-1852. <https://doi.org/10.1134/S1995080219110258>
- [11] Multi-layer icing methodologies for conservative ice growth / S. Bourgault-Côté [et al.] // 7<sup>th</sup> European Conference for Aeronautics and Aerospace Sciences (EUCASS). 2017. <https://doi.org/10.13009/EUCASS2017-258>
- [12] Jiao X. Volume and feature preservation in surface mesh optimization // Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable. 2006. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-34958-7\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-540-34958-7_21)
- [13] McCloud P. L. Extrusion of complex surface meshes utilizing face offsetting and mean curvature smoothing // AIAA Scitech 2019 Forum. 2019. <https://doi.org/10.2514/6.2019-1718>
- [14] Thompson D., Tong X., Arnoldus Q., Collins E., McLaurin D., Luke E. Discrete surface evolution and mesh deformation for aircraft icing applications // 5<sup>th</sup> AIAA Atmospheric and Space Environments Conference. 2013. <https://doi.org/10.2514/6.2013-2544>
- [15] Three-dimensional surface evolution and mesh deformation for aircraft icing applications / X. Tong [et al.] // Journal of Aircraft. 2017. Vol. 54. P. 1047-1063. <https://doi.org/10.2514/1.C033949>
- [16] Shumilin S. S. Methods for anchoring boundary nodes when smoothing a triangular surface mesh // Program Systems: Theory and Applications. 2021. Vol. 12, no. 2(49). P. 207-219. <https://doi.org/10.25209/20793316-2021-12-2-207-219>
- [17] Rivara M.-C., Rodriguez-Moreno P. A. Tuned terminal triangles centroid Delaunay algorithm for quality triangulation // 27<sup>th</sup> International Meshing Roundtable ; ed. by X. Roca, A. Loseille. 2019. Vol. 127. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-13992-6\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-13992-6_12)
- [18] Rakotoarivelo H., Ledoux F. Accurate manycore-accelerated manifold surface remesh kernels // 27<sup>th</sup> International Meshing Roundtable ; ed. by X. Roca, A. Loseille. 2019. Vol. 127. [https://doi.org/10.1007/9783030-13992-6\\_22](https://doi.org/10.1007/9783030-13992-6_22)
- [19] Panchal D., Jayaswal D., Feature sensitive geometrically faithful highly regular direct triangular isotropic surface remeshing // Sādhanā. 2022. No. 47. P. 94. <https://doi.org/10.1007/s12046-022-01866-7>
- [20] Jung W., Shin H., Choi B. K. Self-intersection removal in triangular mesh offsettings // CAD Journal. 2004, Vol. 1, no. 1. P. 477-484. <https://doi.org/10.1080/16864360.2004.10738290>
- [21] Skorkovská V., Kolingerová I., Benes B. A Simple and robust approach to computation of meshes intersection // Proceedings of the 13<sup>th</sup> International Joint Conference on Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications. 2018. Vol. 1. P. 175-182. <https://doi.org/10.5220/0006538401750182>
- [22] Charton J., Baek S., Kim Y. Mesh repairing using topology graphs // Journal of Computational Design and Engineering. 2021. No 8(1). P. 251-267. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa076>
- [23] Рыбаков А. А. Оптимизация задачи об определении конфликтов с опасными зонами движения летательных аппаратов для выполнения на Intel Xeon Phi // Программные продукты и системы. 2017. Т. 30, № 3. С. 524-528. <https://doi.org/10.15827/0236-235X.119.3.524-528>
- [24] Freylekhman S. A., Rybakov A. A. Self-intersection elimination for unstructured surface computational meshes // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, no 10. P. 134-140. <https://doi.org/10.1134/S1995080222130133>
- [25] Scaling of supercomputer calculations on unstructured surface computational meshes / B. M. Shabanov [et al.] // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, no 11. P. 2571-2579. <https://doi.org/10.1134/S1995080221110202>

*Поступила 19.05.2023; одобрена после рецензирования 04.06.2023; принята к публикации 21.06.2023.*

#### Об авторе:

**Рыбаков Алексей Анатольевич**, ведущий научный сотрудник Межведомственного суперкомпьютерного центра Российской академии наук – филиала Федерального государственного учреждения «Федеральный научный центр Научно-исследовательский институт системных исследований Российской академии наук» (119334, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский пр., д. 32а), кандидат физико-математических наук, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9755-8830>**, [rybakov@jssc.ru](mailto:rybakov@jssc.ru)

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*





## References

- [1] Mikhailovskiy K.V., Baranovski S.V. Accounting for Icing in the Design Analysis of Polymer Composite Wings. *Izvestiya vysshih uchebnykh zavedenij. Mashinostroenie* = BMSTU Journal of Mechanical Engineering. 2019;(3):61-70. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.18698/0536-1044-2019-3-61-70>
- [2] Fevralskikh A.V. Wing icing of ground-effect vehicle: numerical simulation. *Trudy Krylovskogo gosudarstvennogo nauchnogo centra* = Transactions of the Krylov State Research Centre. 2019;(4):117-124. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.24937/254223242019-4-390-117-124>
- [3] Koshelev K.B., Melnikova V.G., Strijhak S.V. Development of iceFoam solver for modeling ice accretion. *Proceedings of the Institute for System Programming of the RAS (Proceedings of ISP RAS)*. 2020;32(4):217-234. (In Russ., abstract in Eng.) [https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2020-32\(4\)-16](https://doi.org/10.15514/ISPRAS-2020-32(4)-16)
- [4] Aksenov A.A., Byvaltsev P.M., Zhlutkov S.V., Sorokin K.E., Babulin A.A., Shevyakov V.I. Numerical simulation of ice accretion on airplane surface. *AIP Conference Proceedings*. 2019;2125(1):030013. doi: <https://doi.org/10.1063/1.5117395>
- [5] Aksenov A.A. FlowVision: Industrial computational fluid dynamics. *Computer Research and Modeling*. 2017;9(1):5-20. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.20537/2076-7633-2017-9-5-20>
- [6] Bartkus T.P., Struk P.M., Tsao J.-C. Evaluation of a Thermodynamic Ice-Crystal Icing Model Using Experimental Ice Accretion Data. *Atmospheric and Space Environments Conference*. 2018. <https://doi.org/10.2514/6.2018-4129>
- [7] Zhang X., Wu X., Min J. Aircraft icing model considering both rime ice property variability and runback water effect. *International Journal of Heat and Mass Transfer*. 2017;104:510-516. <https://doi.org/10.1016/j.ijheatmasstransfer.2016.08.086>
- [8] Zhou R.-W., Zhu Y.-C., Tian Y., Chao J. Study on natural ice-melting process of insulator by thermodynamic analysis. *Thermal Science*. 2022;26(6B):5015-5025. <https://doi.org/10.2298/TSCI211014106Z>
- [9] Porter C.E., Rigby D.L. Three Dimensional Surface Redefinition Method for Computational Ice Accretion Solvers. *AIAA Aviation Forum*. 2020. <https://doi.org/10.2514/6.2020-2831>
- [10] Rybakov A.A., Shumilin S.S. Approximate methods of the surface mesh deformation in two-dimensional case. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2019;40(11):1848-1852. <https://doi.org/10.1134/S1995080219110258>
- [11] Bourgault-Côté S., Hasanzadeh K., Lavoie P., Laurendeau E. Multi-layer icing methodologies for conservative ice growth. In: 7th European Conference for Aeronautics and Aerospace Sciences (EUCASS). 2017. <https://doi.org/10.13009/EUCASS2017-258>
- [12] Jiao X. Volume and feature preservation in surface mesh optimization. In: Proceedings of the 15th International Meshing Roundtable. 2006. [https://doi.org/10.1007/978-3-540-34958-7\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-540-34958-7_21)
- [13] McCloud P.L. Extrusion of complex surface meshes utilizing face offsetting and mean curvature smoothing. In: AIAA Scitech 2019 Forum. 2019. <https://doi.org/10.2514/6.2019-1718>
- [14] Thompson D., Tong X., Arnoldus Q., Collins E., McLaurin D., Luke E. Discrete surface evolution and mesh deformation for aircraft icing applications. In: 5th AIAA Atmospheric and Space Environments Conference. 2013. <https://doi.org/10.2514/6.2013-2544>
- [15] Tong X., Thompson D., Arnoldus Q., Collins E., Luke E. Three-dimensional surface evolution and mesh deformation for aircraft icing applications. *Journal of Aircraft*. 2017;54:1047-1063. <https://doi.org/10.2514/1.C033949>
- [16] Shumilin S.S. Methods for anchoring boundary nodes when smoothing a triangular surface mesh. *Program Systems: Theory and Applications*. 2021;12(2):207-219. <https://doi.org/10.25209/20793316-2021-12-2-207-219>
- [17] Rivara M.-C., Rodrigez-Moreno P. A. Tuned terminal triangles centroid Delaunay algorithm for quality triangulation. In: Roca X., Loseille A. (eds.) 27th International Meshing Roundtable. 2019. Vol. 127. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-13992-6\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-030-13992-6_12)
- [18] Rakotoarivelo H., Ledoux F. Accurate manycore-accelerated manifold surface remesh kernels. In: Roca X., Loseille A. (eds.) 27th International Meshing Roundtable. 2019. Vol. 127. [https://doi.org/10.1007/9783030-13992-6\\_22](https://doi.org/10.1007/9783030-13992-6_22)
- [19] Panchal D., Jayaswal D., Feature sensitive geometrically faithful highly regular direct triangular isotropic surface remeshing. *Sādhanā*. 2022;(47):94. <https://doi.org/10.1007/s12046-022-01866-7>
- [20] Jung W., Shin H., Choi B.K. Self-intersection removal in triangular mesh offsettings. *CAD Journal*. 2004;1(1):477-484. <https://doi.org/10.1080/16864360.2004.10738290>
- [21] Skorkovská V., Kolingerová I., Benes B. A Simple and robust approach to computation of meshes intersection. In: Proceedings of the 13th International Joint Conference on Computer Vision, Imaging and Computer Graphics Theory and Applications. 2018;1:175-182. <https://doi.org/10.5220/0006538401750182>
- [22] Charton J., Baek S., Kim Y. Mesh repairing using topology graphs. *Journal of Computational Design and Engineering*. 2021;8(1):251-267. <https://doi.org/10.1093/jcde/qwaa076>
- [23] Rybakov A.A. Optimization of the problem of conflict detection with dangerous aircraft movement areas to execute on Intel Xeon Phi. *Programmye produkty i sistemy* = Software & Systems. 2017;30(3):524-528. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.15827/0236-235X.119.3.524-528>
- [24] Freylekhman S.A., Rybakov A.A. Self-intersection elimination for unstructured surface computational meshes. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2022;43(10):134-140. <https://doi.org/10.1134/S1995080222130133>



- [25] Shabanov B.M. Rybakov A.A., Shumilin S.S., Vorobyov M.Y. Scaling of supercomputer calculations on unstructured surface computational meshes. *Lobachevskii Journal of Mathematics*. 2021;42(11):2571-2579. doi: <https://doi.org/10.1134/S1995080221110202>

*Submitted 19.05.2023; approved after reviewing 04.06.2023; accepted for publication 21.06.2023.*

**About the author:**

**Alexey A. Rybakov**, Lead Researcher in Joint Supercomputer Center of the Russian Academy of Sciences – Branch of the Federal State Institution “Scientific Research Institute for System Analysis of the Russian Academy of Sciences” (32a Leninsky Ave., Moscow 119334, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9755-8830>**, rybakov@jscs.ru

*The author has read and approved the final manuscript.*

