

## Эволюционный подход к формированию архитектуры PINN для приближенного решения уравнения Лапласа в двух постановках: с разрывным краевым условием и данными измерений внутри квадратной области

Т. В. Лазовская\*, Д. А. Тархов, Т. А. Шемякина, М. Д. Чориев

ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Адрес: 195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29

\* tatianala@list.ru

### Аннотация

Физически информированные нейронные сети (PINNs) сегодня широко применяются для решения дифференциальных задач и моделирования физических процессов, описываемых дифференциальными уравнениями. В работе исследуется вопрос подбора архитектуры PINN с помощью эволюционных алгоритмов. Задача выбора подходящих значений гиперпараметров ставится давно и до сих пор не имеет единого подхода. В статье предлагается генетический алгоритм наращивания размера скрытого слоя нейронной сети для приближенного решения уравнения Лапласа в квадратной области в двух постановках. Рассмотрены различные вариации эволюционной схемы. Обсуждаются преимущества и недостатки параметров этих вариаций. Результаты сравниваются в том числе с полученными ранее. Введена оригинальная процедура мутации, основанная на построении фронта Парето для различных значений гиперпараметра в функции потерь.

**Ключевые слова:** физически информированная нейронная сеть, дифференциальные уравнения в частных производных, фронт Парето, эволюционные алгоритмы, многоцелевая оптимизация

**Финансирование:** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-21-20004 «Методы создания и адаптации интеллектуальных систем на основе физически информированных нейронных сетей»).

**Конфликт интересов:** авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Для цитирования:** Эволюционный подход к формированию архитектуры PINN для приближенного решения уравнения Лапласа в двух постановках: с разрывным краевым условием и данными измерений внутри квадратной области / Т. В. Лазовская [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2023. Т. 19, № 2. С. 438-446.

© Лазовская Т. В., Тархов Д. А., Шемякина Т. А., Чориев М. Д., 2023



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.  
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



## Evolutionary Approach to PINN Architecture Design for Approximate Solving the Laplace Equation in two Statements: With Discontinuous Initial Condition or with Measurement Data Inside a Square Domain

T. V. Lazovskaya\*, D. A. Tarkhov, T. A. Shemiakina, M. D. Choriev

Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University, Saint Petersburg, Russian Federation

Address: 29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation

\* tatianala@list.ru

### Abstract

Physics-informed neural networks (PINNs) are widely used today for solving differential problems and modelling physical processes described by differential equations. The paper explores the issue of PINN architecture design using evolutionary algorithms. The task of selecting suitable hyperparameter values has been set for a long time and still does not have a single approach. The article proposes a genetic algorithm for growing the size of the hidden layer of a neural network for an approximate solution of the Laplace equation in a square domain in two statements. Different variations of the evolutionary scheme are considered. The advantages and disadvantages of the parameters of these variations are discussed. The results are compared, among other things, with those obtained earlier. An original mutation procedure based on the construction of the Pareto front for various hyperparameter values in the loss function is introduced.

**Keywords:** Physics-informed neural network, partial differential equations, Pareto front, evolutionary algorithms, multi-objective optimization

**Funding:** The research was supported by a grant from the Russian Science Foundation (project No. 22-21-20004 "Methods for Creating and Adapting Intelligent Systems Based on Physically Informed Neural Networks").

**Conflict of interests:** The authors declare no conflict of interests.

**For citation:** Lazovskaya T.V., Tarkhov D.A., Shemiakina T.A., Choriev M.D. Evolutionary Approach to PINN Architecture Design for Approximate Solving the Laplace Equation in two Statements: With Discontinuous Initial Condition or with Measurement Data Inside a Square Domain. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2023;19(2):438-446.



## Введение

Нейронные сети широко применяются при моделировании физических процессов и объектов. С появлением статьи [1] большая популярность пришла к физически информированным нейронным сетям (PINNs), аналог которых авторы данной статьи развивают с 2009 года [2, 3]. PINNs обучаются с помощью специальной функции потерь, содержащей слагаемые, соответствующие дифференциальным уравнениям, граничным условиям и другим данным, содержащимся в условии решаемой задачи. При этом выбор гиперпараметров нейросетевых моделей, отражающих архитектуру нейронной сети (глубины и ширины — числа слоев и количества нейронов в них) или параметров обучения, наряду с выбором конкретных функций активации, базисных функций часто остается на усмотрение исследователя. С вопросом о размере скрытых слоев связано известное «проклятие размерности»<sup>1</sup>. Решая задачу аппроксимации функций с учетом универсальной теоремы об аппроксимации, каждый специалист по нейронным сетям сталкивается с избыточностью ее требований на практике. Как же решается вопрос выбора числа нейронов в слоях PINN на сегодняшний день?

В работе [4] авторы проводят анализ чувствительности не только таких гиперпараметров, как ширина и глубина нейронной сети, но и числа эпох обучения и веса одного из слагаемых соответствующей функции потерь, используемой для обучения сети. На основе значения ошибки предсказываемой величины выбирается наилучшая конфигурация модели. Аналогичный подход используют авторы статьи [5]. Приведенные результаты показывают, что число нейронов в слое может быть как слишком мало, так и велико. Подобные результаты получены и в [6]. В числе недостатков подобных методов — выбор конкретных значений гиперпараметров для сравнения все равно остается на усмотрение исследователя.

В [7] предлагается подход, в котором гиперпараметры PINN подбираются автоматически на основе анализа двумерных сопряженных вариаций параметров и их ошибок для различных задач. В данной статье всюду рассматриваются PINNs с одним скрытым слоем, которые, согласно [8], обладают достаточной способностью к аппроксимации функций.

Работа, с одной стороны, продолжает исследование вопроса построения фронта Парето при изменении весового множителя в функции потерь и выбора решения с этого фронта, с другой — начинает серию статей об эволюционных алгоритмах подбора оптимальной архитектуры нейронной сети. В качестве задачи выбрано классическое уравнение Лапласа в квадратной области с двумя постановками [9]: некорректная краевая задача и задача без краевых условий, но с известными измерениями. Исследуются результаты применения генетических в широком смысле алгоритмов формирования архитектуры сети и ее обучения для решения поставленных задач.

## Постановка задачи

Рассматривается уравнение Лапласа

$$\Delta u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in [0, 1]^2 \quad (1)$$

с дополнительными гетерогенными данными в виде разрывных граничных условий Дирихле

$$u(x, 0) = u(0, y) = 0, \quad u(x, 1) = u(1, y) = 1, \quad x, y \in [0, 1] \quad (2a)$$

или в виде псевдоизмерений внутри квадрата

$$u(x_l, y_l) = z_l, \quad (x_l, y_l) \in [0, 1]^2, \quad l = 1, \dots, M. \quad (2b)$$

Для каждой из постановок задачи (1) + (2a) и (1) + (2b) требуется построить физически-информированное нейросетевое приближенное решение [9, 10]

$$\hat{u}(x, y, \mathbf{a}) = \sum_{i=1}^n a_i v(x, y, \mathbf{a}_{2i}),$$

с подбором архитектуры в смысле числа  $n$  нейронов скрытого слоя с помощью эволюционного алгоритма. Здесь  $v(x, y, \mathbf{a}_{2i})$  — базисная функция. Вектор параметров  $\mathbf{a}$  настраивается в ходе обучения PINN, которое подразумевает оптимизацию функции потерь (функционала ошибки)  $J$ , слагаемые которой соответствуют квадратичным ошибкам удовлетворения приближенного решения условиям (1)

$$J_{\Delta}(\hat{u}) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m (\Delta \hat{u}(x_j, y_j))^2, \quad (3)$$

условиям Дирихле (2a)

$$J_D(\hat{u}) = \frac{1}{m_1} \sum_{j=1}^{m_1} \left[ (u(x_j, 1) - 1)^2 + (u(1, y_j) - 1)^2 \right] + \frac{1}{m_2} \sum_{k=1}^{m_2} \left[ u^2(x_k, 0) + u^2(0, y_k) \right], \quad (4a)$$

или данным измерениям (2b)

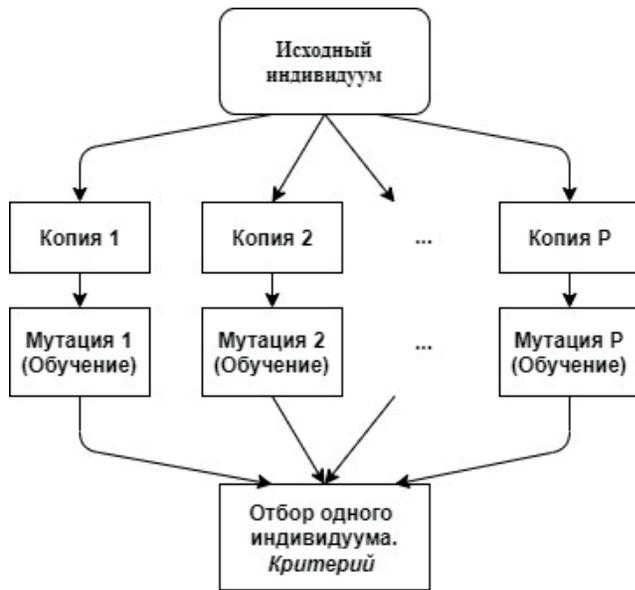
$$J_M(\hat{u}) = \frac{1}{m_3} \sum_{l=1}^{m_3} (u(x_l, y_l) - z_l)^2. \quad (4b)$$

## Методы

В данной работе мы рассматриваем эволюционные алгоритмы наращивания размера сети, включающие в себя схемы мутации, скрещивания и отбора особей по заданным критериям. В качестве одного из факторов размножения в наших эволюционных алгоритмах выступает вариация штрафного множителя в функции потерь, отражающей многокритериальный характер решаемой задачи оптимизации. Для разных значений множителя строится отдельное решение, в результате чего возникает аналог фронта Парето множества решений, в конце с помощью выбранного критерия происходит селекция лучшего экземпляра. Исследования в этом направлении были начаты нами в работе [9]. Эволюционные алгоритмы вполне успешно используются для подобных задач [11]. Рисунок 1 иллюстрирует эволюционную интерпретацию данной процедуры, которую мы условимся называть Мутацией Парето.

<sup>1</sup> Хайкин С. Нейронные сети : полный курс / пер. с англ. 2-е изд. М. : Издательский дом «Вильямс», 2006. 1104 с.





Р и с. 1. Мутация Парето. Схема эволюционной интерпретации построения аналога фронта Парето решений задачи и отбора итогового решения на фронте согласно некоторому внешнему критерию

Fig. 1. Pareto Mutation. Scheme of the evolutionary interpretation of constructing an analogue of the Pareto Front for solutions to the problem and selecting the final solution at the front according to some external criterion

Источник: здесь и далее в статье все рисунки и таблицы составлены авторами.  
Source: Hereinafter in the article, all tables and figures are compiled by the authors.

Важность изменения значения веса (штрафного множителя) у слагаемых функции потерь (функционала ошибки) подчеркивается в статье [12], где основное внимание уделено построению адаптивной функции потерь на основе вероятностного подхода. В уже упомянутой работе [4] также рассматривалась возможность подбора лучшего значения данного множителя, но авторы фиксировали его значение при дальнейшем обучении PINN.

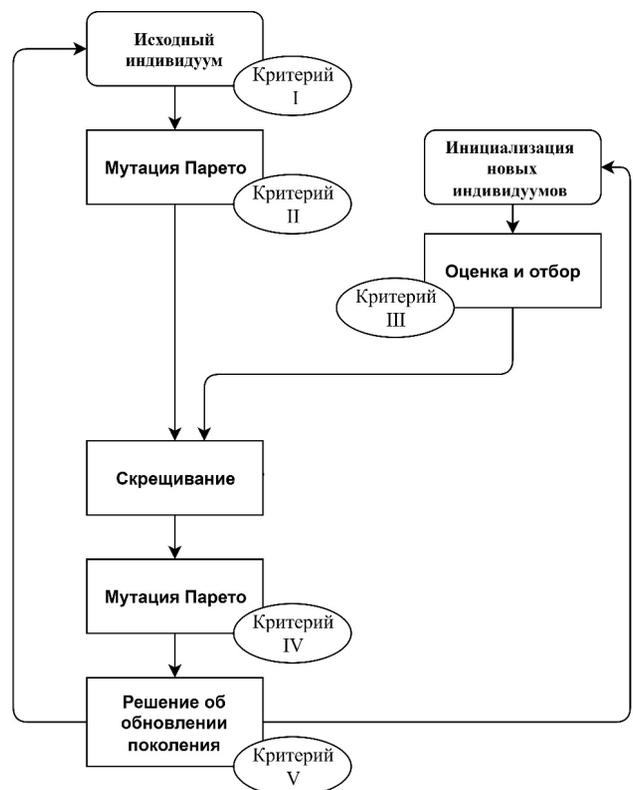
В качестве внешнего критерия отбора решения с аналога фронта Парето предлагаются рассмотренные в работе [9] среднеквадратичные ошибки удовлетворения граничному условию для задачи (1) + (2a) и данным измерений контрольного множества, не участвовавшего в обучении (мутации), для задачи (1) + (2b). В той же работе хорошо показал себя специальный критерий вида

$$\frac{J_{\Delta}}{\max J_{\Delta}} + \frac{J_2}{\max J_2}, \quad (5)$$

где  $J_{\Delta}$  — среднеквадратичная ошибка удовлетворения рассматриваемого решения уравнению Лапласа,  $J_2$  — одна из упомянутых выше среднеквадратичных ошибок  $J_M$  или  $J_D$ , соответствующих рассматриваемой задаче. Таким образом реализуется эволюционный принцип выживания наиболее приспособленных особей из популяции.

Под скрещиванием будем понимать добавление к исходной PINN дополнительного нейрона. Полученная новая сеть снова подвергается мутации, изображенной на рисунке 1. Отметим, что в обучении может участвовать как вся сеть, так и отдельные нейроны, например только добавляемый. В последнем случае мы говорим об эволюционном алгоритме со стратегией элитизма [13].

На рисунке 2 изображена общая схема эволюционного алгоритма формирования сети. Для краткости опущены точки проверки критериев остановки работы алгоритма, связанные как с количеством циклов скрещивания текущего поколения решений с новым индивидуумом первого поколения (попытка добавить нейрон в сеть), так и со значением слагаемых функции потерь. Говоря о «решении об обновлении поколения» индивидуумов, мы не уточняем, применяется ли стратегия элитизма, на общую схему такие различия не влияют. Точки принятия решений на основе критериев обозначены как критерии I–V. Конкретный критерий, применяемый в точке, определяется в ходе постановки эксперимента. Таблица 1 содержит подробную расшифровку блоков алгоритма с пояснениями и вариациями для различных возможных постановок эксперимента.



Р и с. 2. Общая схема эволюционного алгоритма формирования сети без критерия остановки

Fig. 2. General scheme of an evolutionary algorithm for network formation without a stopping criterion



Таблица 1. Общая схема эволюционного алгоритма формирования сети без критерия остановки.  
Расшифровка блоков с пояснениями и вариациями для различных возможных постановок эксперимента  
Table 1. General scheme of an evolutionary algorithm for network formation without a stopping criterion.  
Decoding of blocks with explanations and variations for various possible experimental setups

Блок общей схемы	Расшифровка		Возможные вариации	
Исходный индивидуум	Инициализация $n_1$ исходных сетей с $n$ нейронами скрытого слоя	Отбор наилучших особей согласно критерию	Метод инициализации, параметры $n_1, n$	Критерий I отбора
Мутация Парето (см. рис. 1)	Независимое обучение $P$ копий сети, попавшей под мутацию, с различными значениями гиперпараметра $\delta$ в функции потерь $J = J_\Delta + \delta J_D$ или $J = J_\Delta + \delta J_D$	Отбор наилучшей особи согласно критерию	Параметр $P$ , правило формирования когорты гиперпараметров $\delta_1, \dots, \delta_p$ , алгоритм обучения сети	Критерий II отбора
Инициализация новых индивидуумов	Инициализация $n_2$ новых нейронов	Опционально: вычисление оптимального внешнего параметра-множителя относительно текущей версии исходного индивидуума	Метод инициализации, параметр $n_2$	Опционально: Критерий оптимальности внешнего параметра
Оценка и отбор	Отбор наилучшей особи-кандидата на скрещивание согласно критерию		Критерий III отбора	
Скрещивание	Формирование нового индивидуума на основе исходного и наилучшей особи-кандидата		Метод создания нового индивидуума	
Мутация Парето после скрещивания (см. рис. 1)	Независимое обучение $P$ копий сети, попавшей под мутацию, с различными значениями гиперпараметра $\delta$ в функции потерь $J = J_\Delta + \delta J_D$ или $J = J_\Delta + \delta J_D$	Отбор наилучшей особи согласно критерию	Параметр $P$ , правило формирования когорты гиперпараметров $\delta_1, \dots, \delta_p$	Критерий IV отбора
Решение об обновлении поколения	Обновление текущего исходного индивидуума		Критерий V обновления	Опционально: использование стратегии элитизма

Результаты вычислительных экспериментов и их обсуждение. Нами была проведена серия вычислительных экспериментов, попадающих под общую схему, изображенную на рисунке 2, с пояснениями в таблице 1. Часть вариаций и некоторые параметры обучения сети были зафиксированы для всех экспериментов, а именно:

1. Случайная инициализация весов исходных и новых индивидуумов (нейронных сетей);
2. Исходная сеть с  $n = 1$  числом нейронов скрытого слоя;
3. Число копий в Мутации Парето  $P = 25$ ;
4. Правило формирования когорты гиперпараметров  $\delta_1, \dots, \delta_p$  в Мутации Парето:

$\delta_l = i\delta_1$ , начальное значение вычисляется при инициализации  $n_1$  исходных индивидуумов

как 
$$\delta_1 = \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\sum_{n_1} J_\Delta}{\sum_{n_1} J_M} \quad \text{или} \quad \delta_1 = \frac{1}{\sqrt{P}} \frac{\sum_{n_1} J_\Delta}{\sum_{n_1} J_D}$$
 в начале экспери-

мента или наследуется вместе с обновлением исходного текущего индивидуума как  $\delta_l = \frac{1}{\sqrt{P}} \delta$ , где  $\delta$  соответствует значе-

нию гиперпараметра для копии, отобранной в результате предыдущей Мутации Парето;

5. Фиксированные параметры  $M = 50, m = 50, m_1 + m_2 = 20, m_3 = 25$  и точки псевдоизмерений  $u(x_l, y_l) = z_l, l = 1, \dots, M$ ;
6. Параметры алгоритма обучения сети в Мутации Парето:
  - Обучение PINN производится минимизацией функционала ошибки  $J$  с помощью алгоритма RProp<sup>2</sup> [14, 15];
  - полная регенерация тестовых точек для слагаемых функции потерь  $J_\Delta$  и  $J_D$  происходит через каждые 5 шагов алгоритма;
  - число эпох обучения исходной сети до скрещивания  $K_2 = 800$ ; число эпох обучения сети после скрещивания  $K_5 = 400$  (для стратегии элитизма  $K_5 = 100$  эпох обучения нового нейрона);

<sup>2</sup> Тархов Д. А. Нейронные сети: модели и алгоритмы. М.: Радиотехника, 2005. 256 с.



7. Вычисление оптимального параметра для новых нейронов методом наименьших квадратов по данным измерений, используемым в обучении, или граничным условиям в зависимости от рассматриваемой задачи;
8. Скрещивание. Суммирование исходной сети и нового индивидуума с оптимальным параметром как метод формирования нового индивидуума-кандидата;
9. В качестве критерия останова в каждом эксперименте фиксировалось число попыток добавить нейрон, то есть число циклов инициализации новых индивидуумов для последующего скрещивания с текущим поколением.

Часть результатов экспериментов с пояснениями постановок приведена в таблице 2.

Первая серия экспериментов для обеих задач (1) + (2a) и (1) + (2b) не использует стратегию элитизма, в связи с чем процесс обучения не является стабильным. При этом можно ввести критерий останова и повторного запуска алгоритма (рестарта), в результате чего формируется достаточно точное решение задачи.

Напомним [9], что аналитическое решение задачи (1) + (2a) с помощью метода Фурье подвержено эффекту Гиббса и осциллирует на границе области, чего не наблюдается у нейросетевых решений. Результат эксперимента № 1 с применением эволюционного сравним с полученным в работе [9], при этом

число нейронов итогового решения уменьшилось.

Рассмотрим задачу (1) + (2b) с измерениями. Будем каждый раз инициализировать  $n_1 = 100$  особей PINN с одним нейроном. Количество циклов алгоритма (попыток добавить нейрон к нейросетевому приближенному решению)  $K_4$  равно 20. Так как число измерений ограничено, а половина этих данных используется для обучения всей сети, полученной в результате скрещивания, в качестве критериев отбора I–IV логично использовать ошибку удовлетворения рассматриваемого индивидуума контрольной группе измерений. Одним из преимуществ такого критерия является абсолютность его величины, не зависящая от характеристик текущей популяции, ее копий и мутаций. С другой стороны, ни на каком из этапов не учитывается удовлетворение уравнению Лапласа, что сказывается на итоговом результате, представленном в таблице 2 для экспериментов №№ 3, 4.

Во второй серии экспериментов в эволюционном алгоритме построения PINN используется стратегия элитизма. Это означает, что во время мутации происходит обучение только нового нейрона и в случае неудачи согласно критерию V. Как видно из таблицы 2, итоговое число нейронов может значительно различаться от запуска к запуску. Это объясняется известным недостатком стратегий элитизма, когда решение застревает в локальном минимуме [16–28].

Таблица 2. MRSE оценки работы алгоритмов согласно экспериментам  
Table 2. MRSE evaluation of algorithm performance according to experiments

Задача	№ Эксперим.	Итоговое число нейронов	Параметры алгоритма	Удовл. уравнению Лапласа	Удовл. условиям (2a) или (2b) соотв.	Соотв. аналит. решению
(1) + (2a)	1	8	$n_1 = 100$ ; $K_4 = 20$ (число попыток добавить нейрон); Мутация всех индивидуумов; Критерии I, V: граничные условия; Критерии II–IV: специальный (5)	0.684	0.1	0.056
(1) + (2b)	3	11	$n_1 = 100$ ; $K_4 = 20$ (число попыток добавить нейрон); Мутация всех индивидуумов; Критерии отбора I–IV: соответствие контрольной группе измерений	2.412	0.015	0.010
	4	8		1.679	0.053	0.030
(1) + (2a)	9	2	$n_1 = 1$ ; $K_4 = 20$ (число попыток добавить нейрон); Мутация только нового индивидуума в попытке скрещивания; Критерии III: граничные условия; Критерии II, IV: специальный (5)	0.019	0.255	0.105
	16	11		2.378	0.136	0.061
(1) + (2b)	11	2	$n_1 = 1$ ; $K_4 = 20$ (число попыток добавить нейрон); Мутация только нового индивидуума в попытке скрещивания; Критерии II–IV: специальный (5)	0.112	0.350	0.274



## Заключение

В данной статье начато исследование эволюционных алгоритмов подбора архитектуры и построения PINN-решений с одним скрытым слоем для разрывной краевой задачи Дирихле и задачи с данными измерений для уравнения Лапласа в квадратной области. В ходе численных экспериментов удалось достичь результата, полученного ранее перебором числа нейронов скрытого слоя. Отмечены особенности разных стра-

тегий при мутации индивидуумов в ходе реализации алгоритма. Введена оригинальная процедура мутации, основанная на построении фронта Парето для различных значений гиперпараметра в функции потерь. Автоматический подбор архитектуры PINN для приближенного решения дифференциальных задач и моделирования физических процессов является многообещающим и является частью актуальной задачи подбора гиперпараметров при построении физически информированных нейросетевых моделей.

## References

- [1] Raissi M., Perdikaris P., Karniadakis G.E. Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*. 2018;(378):686-707. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2018.10.045>
- [2] Tarkhov D., Vasilyev A. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. I: Simple problems. *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*. 2005;(14):59-72.
- [3] Tarkhov D., Vasilyev A. New neural network technique to the numerical solution of mathematical physics problems. II: Complicated and nonstandard problems. *Optical Memory and Neural Networks (Information Optics)*. 2005;(14):97-122.
- [4] Ye J., Do N.C., Zeng W., Lambert M. Physics-informed neural networks for hydraulic transient analysis in pipeline systems. *Water Research*. 2022;221:118828. <https://doi.org/10.1016/j.watres.2022.118828>
- [5] Bragone F., Morozovska K., Hilber P., Laneryd T., Luvisotto M. Physics-informed neural networks for modelling power transformer's dynamic thermal behaviour. *Electric Power Systems Research*. 2022;211:108447. <https://doi.org/10.1016/j.epsr.2022.108447>
- [6] Huang Y., Zhang Z., Zhang X. A Direct-Forcing Immersed Boundary Method for Incompressible Flows Based on Physics-Informed Neural Network. *Fluids*. 2022;(7):56. <https://doi.org/10.3390/fluids7020056>
- [7] Wang Y., Han X., Chang C.-Yu., Zha D., Braga-Neto U., Hu X. Auto-PINN: Understanding and Optimizing Physics-Informed Neural Architecture. In: *NeurIPS 2023 AI for Science Workshop*. New Orleans, United States; 2023. 18 p. Available at: <https://openreview.net/forum?id=xjFITn0hRx> (accessed 24.01.2023).
- [8] Hornik K. Approximation capabilities of multilayer feedforward networks. *Neural Networks*. 1991;4(2):251-257. [https://doi.org/10.1016/0893-6080\(91\)90009-T](https://doi.org/10.1016/0893-6080(91)90009-T)
- [9] Lazovskaya T., Tarkhov D., Dudnik A., Koksharova E., Mochalova O., Muranov D., Pozhvanyuk K., Sysoeva A. Investigation of Pareto Front of Neural Network Approximation of Solution of Laplace Equation in Two Statements: with Discontinuous Initial Conditions or with Measurement Data. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y. (eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research VI. NEUROINFORMATICS 2022. Studies in Computational Intelligence*. Vol. 1064. Cham: Springer; 2023. p. 406-414. [https://doi.org/10.1007/978-3-031-19032-2\\_42](https://doi.org/10.1007/978-3-031-19032-2_42)
- [10] Lazovskaya T., Malykhina G., Tarkhov D. Physics-Based Neural Network Methods for Solving Parameterized Singular Perturbation Problem. *Computation*. 2021;9(9):97. <https://doi.org/10.3390/computation9090097>
- [11] Abualigah L., Diabat A. A novel hybrid antlion optimization algorithm for multi-objective task scheduling problems in cloud computing environments. *Cluster Computing*. 2021;24(1):205-223. <https://doi.org/10.1007/s10586-020-03075-5>
- [12] Xiang Z., Peng W., Liu X., Yao W. Self-adaptive loss balanced Physics-informed neural networks, *Neurocomputing*. 2022;496:11-34. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.05.015>
- [13] Chen Z., Zhan Z., Lin Y., Gong Y., Gu T., Zhao F., Yuan H., Chen X., Li Q., Zhang J., Multiobjective Cloud Workflow Scheduling: A Multiple Populations Ant Colony System Approach. *IEEE Transactions on Cybernetics*. 2019;8(49):2912-2926. <https://doi.org/10.1109/TCYB.2018.2832640>
- [14] Riedmiller M., Braun H. A direct adaptive method for faster backpropagation learning: the RPROP algorithm. In: *IEEE International Conference on Neural Networks*. San Francisco, CA, USA: IEEE Computer Society; 1993. Vol. 1. p. 586-591. <https://doi.org/10.1109/ICNN.1993.298623>
- [15] Tarkhov D., Vasilyev A. *Semi-empirical Neural Network Modeling and Digital Twins Development*. Academic Press. Elsevier Publ.; 2020. 288 p. <https://doi.org/10.1016/C2017-0-02027-X>
- [16] Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tarkhov D.A., Vasilyev A.N. Multilayer method for solving a problem of metals rupture under creep conditions. *Thermal Science*. 2019;23(S2):S575-S582. <https://doi.org/10.2298/TSCI19S2575K>
- [17] Budkina E.M., Kuznetsov E.B., Tarkhov D.A., Gomzina A.A., Maltsev S.D. Comparison of solving a stiff equation on a sphere by the multi-layer method and method of continuing it at the best parameter. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2018;14(3):533-541. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201803.533-541>
- [18] Kuznetsov E.B., Leonov S.S., Tarkhov D.A., Tsapko E.D., Babintseva A.A. Numerical methods for solving problems with contrast structures. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2018;14(3):542-555. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201803.542-551>



- [19] Kartavchenko A.E., Tarkhov D.A. Comparison of methods of construction of approximate analytical solutions of differential equations considering on the example of elementary functions. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2017;13(3):16-23. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.2017.3.440>
- [20] Vasiliev A.N., Tarkhov D.A., Bolgov I.P., Kaverzneva T.T., Kolesova S.A., Lozovskaya T.V., Lukinsky E.V., Petrov A.A., Filkin V.M. Multilayer neural network models based on experimental data for processes of sample deformation and destruction. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2016;12(1):6-14. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: XEQQUUP
- [21] Tarkhov D.A., Shershneva E.A. Approximate analytical solutions of Mathieu's equations based on classical numerical methods. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2016;12(3-1):202-208. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: XBWGWFF
- [22] Vasiliev A.N., Lozhkin V.N., Lozhkina O.V., Tarkhov D.A., Timofeev V.D. Neural network approach in information process for predicting highway area air pollution by peat fire. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2016;12(3-2):181-187. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: XIHNRV
- [23] Vasiliev A.N., Tarkhov D.A., Shemyakina T.A. Approximate analytical solutions of ordinary differential equations. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2016;12(3-2):188-195. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: XIHNSF
- [24] Kaverzneva T.T., Malykhina G.F., Tarkhov D.A. From Differential Equations to Multilayer Neural Network Models. In: Lu H., Tang H., Wang Z. (eds.) *Advances in Neural Networks – ISSN 2019*. ISSN 2019. *Lecture Notes in Computer Science*. Vol. 11554. Cham: Springer; 2019. p. 19-27. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-22796-8\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-22796-8_3)
- [25] Zulkarnay I.U., Kaverzneva T.T., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Vinokhodov T.V., Kapitsin D.R. A two-layer semi-empirical model of nonlinear bending of the cantilevered beam. *Journal of Physics: Conference Series Measurement Science Challenges in Natural and Social Sciences*. 2017;1044:012005. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1044/1/012005>
- [26] Vasilyev A.N., Tarkhov D.A., Tereshin V.A., Berminova M.S., Galyautdinova A.R. Semi-empirical Neural Network Model of Real Thread Sagging. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V. (eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence*. Vol. 736. Cham: Springer; 2018. p. 138-144. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4\\_21](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_21)
- [27] Lazovskaya T., Tarkhov D., Vasilyev A. Multi-Layer Solution of Heat Equation. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V. (eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research. NEUROINFORMATICS 2017. Studies in Computational Intelligence*. Vol. 736. Cham: Springer; 2018. p. 17-22. [https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-319-66604-4_3)
- [28] Tarkhov D.A., Bortkovskaya M.R., Kaverzneva T.T., Kapitsin D.R., Shishkina I.A., Semenova D.A., Udalov P.P., Zulkarnay I.U. Semiempirical Model of the Real Membrane Bending. In: Kryzhanovsky B., Dunin-Barkowski W., Redko V., Tiumentsev Y. (eds.) *Advances in Neural Computation, Machine Learning, and Cognitive Research II. NEUROINFORMATICS 2018. Studies in Computational Intelligence*. Vol. 799. Cham: Springer; 2019. p. 221-226. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-01328-8\\_26](https://doi.org/10.1007/978-3-030-01328-8_26)

Поступила 24.01.2023; одобрена после рецензирования 27.02.2023; принята к публикации 06.04.2023.  
Submitted 24.01.2023; approved after reviewing 27.02.2023; accepted for publication 06.04.2023.

#### Об авторах:

**Лазовская Татьяна Валерьевна**, старший преподаватель кафедры высшей математики физико-механического института, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3324-6213>, [tatianala@list.ru](mailto:tatianala@list.ru)

**Тархов Дмитрий Альбертович**, профессор кафедры высшей математики физико-механического института, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), доктор технических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9431-8241>, [dtarkhov@gmail.com](mailto:dtarkhov@gmail.com)

**Шемякина Татьяна Алексеевна**, доцент кафедры высшей математики физико-механического института, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9572-1406>, [sh\\_tat@mail.ru](mailto:sh_tat@mail.ru)

**Чориев Михаил Давлатович**, студент, ФГАОУ ВО «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого» (195251, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, ул. Политехническая, д. 29), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9981-1716>

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.



**About the authors:**

**Tatiana V. Lazovskaya**, Senior Lecturer of the Department of Higher Mathematics, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3324-6213>**, [tatianala@list.ru](mailto:tatianala@list.ru)

**Dmitry A. Tarkhov**, Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation), Dr. Sci. (Eng.), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9431-8241>**, [dtarkhov@gmail.com](mailto:dtarkhov@gmail.com)

**Tatyana A. Shemyakina**, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Institute of Physics and Mechanics, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation), Cand. Sci. (Phys.-Math.), Associate Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9572-1406>**, [sh\\_tat@mail.ru](mailto:sh_tat@mail.ru)

**Mikhail D. Choriev**, student, Peter the Great St. Petersburg Polytechnic University (29 Polytechnicheskaya St., 195251 St. Petersburg, Russian Federation), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9981-1716>**

*All authors have read and approved the final manuscript.*

