УДК 517.535
DOI: 10.25559/SITITO.019.202301.141-151

Оригинальная статья

Развитие креативных качеств студентов при выполнении многоэтапного математико-информационного задания «Метод Ньютона для комплексных полиномов»

В. С. Секованов[1], В. А. Ивков[1], А. А. Пигузов[1*], Л. Б. Рыбина[2], И.В. Шапошникова[3]
[1] ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет», г. Кострома, Российская Федерация
Адрес: 156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17
[*] piguzov@ksu.edu.ru
[2] ФГБОУ ВО «Костромская государственная сельскохозяйственная академия», г. Кострома, Российская Федерация
Адрес: 156530, Российская Федерация, Костромская область, Костромской район, п. Караваево, Учебный городок, д. 34
[3] БУ ВО «Сургутский государственный университет», г. Сургут, Российская Федерация
Адрес: 628400, Российская Федерация, Ханты-Мансийский автономный округ – Югра, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1

Аннотация
В предлагаемой статье излагается методика выполнения многоэтапного математико-информационного задания «Метод Ньютона для комплексных полиномов», нацеленная на развитие креативных качеств студентов. Отмечены творческие виды деятельности, которые выполняет студент в ходе решения многогранных задач. Построена схема-план выполнения многоэтапного математико-информационного задания. Приведены примеры множеств Жюлиа рациональных функций, полученных применением метода Ньютона к полиномам. Указана эстетика множеств Жюлиа, с помощью которых студентам предлагается создать художественные композиции. Отмечена интеграция математики и программирования. Выявлены креативные качества, которые формируются у студентов в процессе выполнения многоэтапного математико-информационного задания.При выполнении этапов задания студенты устанавливают связи между итерациями рациональных функций комплексной переменной и квадратичными полиномами, открывают для себя множества Жюлиа, имеющие сложную фрактальную структуру. они аналитически рассчитывают неподвижные точки рациональных функций, определяя их характер. На следующих этапах выполняется визуализация проведенного исследования: с помощью компьютерной программы строятся орбиты точек исследуемых функций и их множество Жюлиа. Введение цветовой классификации для различных точек позволяет получить более информативное изображение фрактала. Полученное изображение на конечном этапе используется для создания некоторых художественных композиций. Предложенный метод исследования функций дает возможность развивать гибкость мышления, интуицию, преодолевать стереотипы мышления, развивает эстетические представления, что позитивно влияет на развитие креативных качеств студентов.

Ключевые слова: креативность, креативные качества, алгоритм, метод Ньютона, множества Жюлиа, проблема Кэли, неподвижная (притягивающая, отталкивающая, нейтральная) точка, периодическая точка дискретная динамическая система, аттрактор, информационное общество, информационные и коммуникационные технологии

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Развитие креативных качеств студентов при выполнении многоэтапного математико-информационного задания «Метод Ньютона для комплексных полиномов» / В. С. Секованов [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2023. Т. 19, № 1. С. 141-151. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202301.141-151

Original article

Development of Creative Qualities of Students When Performing a Multi-Stage Mathematical and Information Tasks "Newton's Method for Complex Polynomials"

V. S. Sekovanov[a], V. A. Ivkov[a], A. A. Piguzov[a*], L. B. Rybina[b], I.V. Shaposhnikova[c]
[a] Kostroma State University, Kostroma, Russian Federation
Address: 17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation
[*] piguzov@ksu.edu.ru
[b] Kostroma State Agricultural Academy, Kostroma, Russian Federation
Address: 34 educational campus, Karavaevo, Kostroma region 156530, Russian Federation
[c] Surgut State University, Surgut, Russian Federation
Address: 1 Lenin Ave., Surgut 628400, Khanty-Mansi Autonomous Okrug – Ugra, Russian Federation

Abstract
The proposed article describes the methodology for performing a multi-stage mathematical-informational task "Newton's Method for Complex Polynomials", aimed at developing the creative qualities of students. It notes creative activities that the student performs in the course of solving multifaceted problems. A scheme-plan for the implementation of a multi-stage mathematical and information task has been built. Examples of Julia sets of rational functions obtained by applying Newton's method to polynomials are given. The aesthetics of Julia sets are indicated, with the help of which students are invited to create artistic compositions. The integration of mathematics and programming is mentioned. The creative qualities have been identified, which are formed in students in the process of performing multi-stage mathematical and information task. When performing the tasks, students establish connections between iterations of rational functions of a complex variable and quadratic polynomials, discover for themselves Julia sets having complex fractal structure. They analytically calculate the fixed points of rational functions, determining their character. At the next stages, the study is visualized: with the help of a computer program, the orbits of the points of the studied functions and their Julia set are built. The introduction of color classification for different points allows you to get a more informative image of the fractal. The resulting image at the final stage is used to create some artistic compositions. The proposed method of function study makes it possible to develop flexibility of thinking, intuition, overcome stereotypes of thinking, develop aesthetic ideas, which positively affects the development of students' creative qualities.

Keywords: creativity, creative qualities, algorithm, Newton's method, Julia sets, Cayley problem, fixed (attractive, repulsive, neutral) point, periodic point discrete dynamical system, attractor, information society, information and communication technologies

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Rybina L.B., Shaposhnikova I.V. Development of Creative Qualities of Students When Performing a Multi-Stage Mathematical and Information Tasks "Newton's Method for Complex Polynomials". *Modern Information Technologies and IT-Education.* 2023;19(1):141-151. doi: https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202301.141-151

Введение

Креативные качества личности играют важную роль в ее творческом процессе. Развитию креативных качеств средствами голоморфной динамики с использованием информационных и коммуникационных технологий (ИКТ) посвящены многочисленные исследования[1] (см. [1-20]).

Анализируя психолого-педагогическую литературу, используя личный педагогический опыт, будем понимать креативные качества как устойчивые, стабильно проявляющиеся свойства личности, которые в комплексе индексируют творческую стилистику поведения, обеспечивают продуктивность, новизну, уникальность способов и результатов деятельности, предрасположенность и готовность к прогнозированию, восприятию гармонии и красоты, творческим конструктивным преобразованиям в различных сферах жизнедеятельности, изменению стереотипов.

На основе анализа теории, практики и педагогической работы мы считаем, что креативными качествами личности являются:

- творческое мышление (диалектическое единство дивергентного, конвергентного, интуитивного и критического мышления);
- высокий уровень интеллекта;
- способность к прогнозированию процессов, результатов действий;
- эстетические качества (чувство гармонии, чувство красоты, чувство формы, чувство стиля);
- способность изменять стереотипы;
- способность решать нестандартные задачи;
- целеустремленность, любознательность и упорство (способность доводить начатое дело до конца);
- рефлексия (осознание себя);
- толерантность к неизвестности, двусмысленности, неопределенности, новизне (не бояться неизвестности, двусмысленности, неопределенности);
- неприязнь конформизма (иметь свое мнение);
- мотивация;
- перфекционизм (высокие личностные стандарты).

Учитывая сказанное, в нашем понимании креативная личность – человек, ориентированный на широкий спектр общечеловеческих и культурных ценностей с выраженным сознательным отношением к жизни, обладающий творческим мышлением, высоким уровнем интеллекта, способный создавать новое, решать широкий круг задач, которые ставит информационное общество.

Отметим, что креативные качества обеспечивают приспособление индивида к быстро меняющимся условиям жизни, являются залогом успеха личности в профессиональной деятельности.

Основная часть

Большую роль в развитии креативных качеств студентов играет выполнение ими многоэтапных математико-информационных заданий (ММИЗ). ММИЗ являются для обучаемых творческими лабораториями, поскольку при выполнении ММИЗ они выступают в роли математиков, программистов, компьютерных художников и пользователей локальных и глобальных сетей. Положительную роль при развитии креативных качеств, обучающихся играет выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Метод Ньютона для комплексных полиномов». Схема-план данного ММИЗ указана на рисунке 1.

Р и с. 1. Схема-план ММИЗ «Метод Ньютона для комплексных полиномов»
F i g.1. Scheme-plan multi-stage mathematical-information problem "Newton's method for complex polynomials"

Источник: здесь и далее в статье все рисунки составлены авторами.
Source: Hereinafter in this article all figures were made by the authors.

При исследовании множеств Жюлиа студенты используют как математические методы, так и компьютерные технологии, развивая при этом важнейшее креативное качество – гибкость мышления. А при исследовании итераций рациональной функции $f_2(z) = z - \frac{z^2-1}{2z}$ обучаемые устанавливают неожиданную связь с итерациями квадратичного полинома $B(z) = z^2$. Причем $f_2(z)$ и $B(z)$ имеют гладкие множества Жюлиа, что способствует развитию другого креативного качества – оригинальности мышления.

[1] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. М.: Постмаркет, 2000. 352 с; Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А. Введение в теорию аналитических функций. М.: Просвещение, 1977. 320 с.; Секованов В. С. Элементы теории фрактальных. 2-е изд., перераб. и доп. Кострома: КГУ, 2006. 157 с. EDN: ZFXTWF; Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств : Учеб. пособие. 4-е изд., перераб. и доп. Кострома : КГУ, 2012. 208 с. EDN: ZFSPGF; Секованов В. С., Рыбина Л. Б., Березкина А. Е. О множествах Жюлиа функций, имеющих параболическую неподвижную точку // Актуальные проблемы преподавания информационных и естественно-научных дисциплин. Кострома : КГУ, 2018. С. 144-150. EDN: YXAECH; Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств: Учеб. пособие. 4-е изд., перераб. и доп. Кострома: КГУ, 2012. 208 с. EDN: ZFSPGF; Секованов В. С. Что такое фрактальная геометрия? М.: ЛЕНАН, 2016. 272 с. EDN: ZELYOV; Секованов В. С. Элементы теории дискретных динамических систем. СПб: Изд-во Лань, 2017. 180 с. EDN: ZBULNT; Секованов В. С. Фрактальная геометрия: Преподавание, задачи, алгоритмы, синергетика, эстетика, приложения. СПб: Изд-во Лань, 2019. 180 с. EDN: ZDKQVN

При исследовании функции $f_3(z) = z - \frac{z^3-1}{3z^2}$ обучаемые сталкиваются с множеством Жюлиа, имеющим сложную фрактальную структуру, что способствует развитию толерантности к новизне.

Построение множеств Жюлиа для рациональных функций $f_4(z) = z - \frac{z^4-1}{4z^3}$, $f_8(z) = z - \frac{z^8-1}{8z^7}$ $f_{12}(z) = z - \frac{z^{12}-1}{12z^{11}}$ формирует, на наш взгляд, эстетические качества обучаемых (чувство гармонии, чувство красоты, чувство формы, чувство стиля).

Этап 1. *Определение.* Если $f(x_0)=x_0$, то говорят, что точка x_0 является неподвижной.

Рассмотрим примеры.

1. Пусть $f(x) = x^4$. Неподвижными точками данной функции будут точки

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \quad x_3 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2},$$

поскольку $f(x_i) = x_i, i = 0,1,2,3$. Студентам здесь полезно предложить выполнить проверку соответствующих равенств.

2. Пусть $f(x) = \frac{x^3+2}{x}$. Решая уравнение $x^3 - x^2 + 2 = 0$ получим неподвижные точки (почему?) $x_1 = -1$, $x_2 = 1+i$, $x_3 = 1-i$. Студентам необходимо провести выкладки самостоятельно.

3. Рассмотрим еще пример. $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Студенты могут сказать, что неподвижных точек нет. Однако это не так. Точка $x = \infty$ будет таковой. Здесь важно подчеркнуть, что точка ∞ будет неподвижной точкой функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда точка 0, будет неподвижной точкой для функции $F(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$. Студенты должны обосновать данное утверждение.

Для развития креативного качества, связанного с единством дивергентного, конвергентного, интуитивного и критического мышления студентам следует предложить указать функции, которые имеют три неподвижные точки, бесконечное число неподвижных точек.

Определим характер неподвижной точки. Неподвижную точку x_0 считают отталкивающей (неустойчивой), если $|f'(x_0)| > 1$; притягивающей (устойчивой), если $|f'(x_0)| < 1$; нейтральной, если $|f'(x_0)| = 1$.

Студентам следует предложить проверить, что в первом примере данного этапа точка $x_0 = 0$ – притягивающая, а точки x_1, x_2, x_3 – отталкивающие. Действительно $|f'(x_0)| = 0$, $|f'(x_1)| = 4$, $|f'(x_2)| = 4$, $|f'(x_3)| = 4$.

Выясним характер неподвижных точек вовтором примере. Имеем: $(f(x))' = 2x - \frac{2}{x^2}$. $(f(x_1))' = -4$, $(f(x_2))' = 2(1+i) - \frac{2}{(1+i)^2} = 2+3i$. Простые вычисления указывают, что$(f(x_3))' = 2-3i$. Студентам следует предложить выполнить все выкладки самостоятельно.

В третьем примере следует указать, что поведение ции $f(x)$ в точке $x = \infty$ эквивалентно поведению функции $F(z) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{z}\right)}$ в окрестности нуля. Действительно, имеем $F(x) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} = \frac{x}{x-1}$.

Найдем производную функции $F(x)$.Получим:

$$F'(x) = \frac{x-1-x}{(x-1)^2} = -1$$

Заметим, что точка $x = 0$ – неподвижная, нейтральная точка для функции $F(x) = \frac{1}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$ $(F(0) = 0$ и $F'(0) = -1)$.

Следовательно, бесконечно удаленная точка является нейтральной неподвижной точкой функции $f(x)$.

Этап 2. Кэли выяснил, что для квадратичного полинома $f(z) = z^2 - 1$, $z \in C$ ньютоновские итерации имеют вид: $z_{n+1} = z_n - \frac{z_n^2 - 1}{2 \cdot z_n}$, причем, если z_0 лежит в правой полуплоскости, ее итерации $z_n \to 1$ (правая полуплоскость есть область притяжения неподвижной точки 1, а для каждой исходной точки z_0, расположенной в левой полуплоскости ее итерации, левая полуплоскость есть область притяжения неподвижной точки -1). Если начальная точка расположена на мнимой оси, то ее орбита не стремится к точкам ± 1, а мнимая ось будет множеством Жюлиа для функции $f_2(z) = z - \frac{z^2-1}{2z}$.

Здесь полезно напомнить студентам, что множество Жюлиа является замыканием множества всех периодических отталкивающих точек.

Кэли дал полное аналитическое решение нахождения множества Жюлиа для функции $f_2(z) = z - \frac{z^2-1}{2z}$. Студентам следует предложить воспроизвести решение данной задачи Кэли.

Начать решение полезно с проведения компьютерных экспериментов, которые дадут возможность преподавателю подвести студентов к гипотезе: «множеством Жюлиа будет мнимая ось», а потом перейти к проверке данной гипотезы. Здесь полезно указать подробный алгоритм построения множества Жюлиа для функции $f_2(z) = z - \frac{z^2-1}{2z}$:

```
uses crt, GraphABC;
type compl=record
re,im:real;
end;
var a: array [0..100] of compl;varcolor: array [0..100] of color;
var height, width: integer;var i, j, k, n, l: integer;var dx, dy, x_max,
x_min, y_max, y_min, kef, scall: real;
function fx(z: complex): complex;
begin fx := z-(exp(2*ln(z))-1)/(2*exp((1)*ln(z))); end;
var c: complex;variter : integer;
beginwidth:= 500;height := 500;setwindowsize(width,
height);iter := 20;scall := 2;
for k:=0 to 1 dobegin
a[k].re := cos((2*pi*k)/2);a[k].im := sin((2*pi*k)/2); end;
for k:=0 to 1 do
begin color[k] := clRandom;end;
if (width >=height ) then
begin kef := width / height;x_min := scall * -kef;x_max := scall
*kef;y_min := scall * -1;y_max := scall;end
else if (height >width) then
begin kef := height/width;x_min := scall * -1;x_max := scall;y_min
:= scall *-kef;y_max := scall * kef;end;
dx := (x_max - x_min) / width;dy := (y_max - y_min) / height;
for l:=0 to 1 do begin for i:=1 to width do for j:=1 to height do
beginc := (x_min +i* dx,y_min + j *dy);for k:=1 to iterdo c := fx(c);
begin if(abs(sqrt((c.Real-a[l].re)*(c.Real-a[l].re)+(c.Imaginary-
a[l].im)*(c.Imaginary-a[l].im)))<0.0005) then setpixel (i, j, col-
or[l]);
end;end;end;end.
```

Результатом работы программы будет множество, изображенное на рисунке 2.

Р и с. 2. Множество Жюлиа функции f_2

F i g. 2. Julia set of a function f_2

Оказывается, что $w^2 = \varphi \circ f_2^{(n)} \circ \varphi^{-1}$, где $z = \varphi^{-1}(w) = \frac{w+1}{w-1}$ и $w = \varphi(z) = \frac{z+1}{z-1}$. Студентам здесь полезно предложить выполнить аналитические преобразования самостоятельно. Из равенства $w^2 = \varphi \circ f_2^{(n)} \circ \varphi^{-1}$ вытекает, что орбиты точек правой полуплоскости устремляются к $+1$, а орбиты точек левой полуплоскости стремятся к -1, при итерировании функции $f_2(z)$. То есть точка Z ,у которой $\mathrm{Re}(z) \neq 0$ сходится к ближайшему корню уравнения $z^2 - 1 = 0$. Исключение составляют точки, расположенные на мнимой оси: при итерировании функции $f_2(z)$ они «хаотически блуждают» по этой оси. Таким образом, если мы «разрежем» комплексную плоскость по мнимой оси, то получим бассейны притяжения $A(+1)$ и $A(-1)$, граница которых даст множество Жюлиа. Преподаватель может порекомендовать литературу, где это решение рассмотрено (например, в работах[2]). Организация творческой деятельности по даннойметодике дает возможность развивать у студентов важнейшее креативное качество – интуитивное мышление.

Отметим, что для полинома $z^3 - 1$, множество Жюлиа рациональной функции $f_3(z) = z - \frac{z^3-1}{3z^2}$, порожденной данным полиномом, выявить Кэли не удалось. Так появилась проблема Кэли, которая решилась во второй половине 20-го века. Данная проблема была сначала решена Хаббардом с помощью компьютерной программы. Позднее аналитическими методами было установлено, что в данном случае множество Жюлиа имеет сложную фрактальную структуру.

По аналогии с предыдущим случаем преподавателю следует указать алгоритм построения множества Жюлиа для данной функции$f_3(z) = z - \frac{z^3-1}{3z^2}$в усеченном виде:

Укажем шаги алгоритма. Отметим, что здесь дается только фрагмент программы и приводятся краткие пояснения, что нацеливает студентов на самостоятельную работу и развивает их креативность.

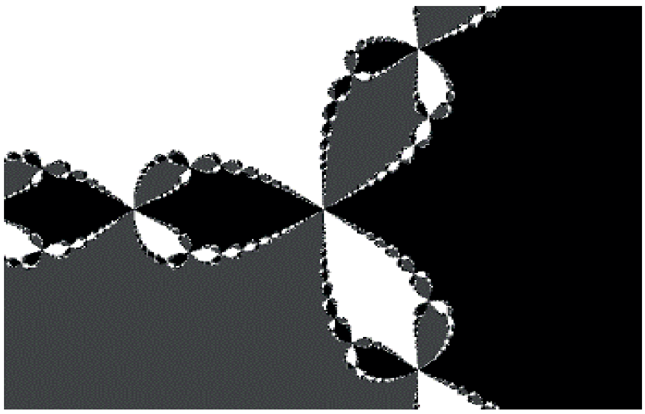
1) берутся достаточно малое число $\varepsilon > 0$ и число $z = x + iy$;

2) рассматривается сотая итерация $A^{(100)}(z)$ и оцениваются расстояния от точки $A^{(100)}(z)$ до неподвижных притягивающих точек $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ функции $f_3 = z - \frac{z^3-1}{3z^2}$, которые являются корнями уравнения $z^3 - 1 = 0$;

3) если расстояние от точки $A^{(100)}(z)$ до точки $z_1 = 1$ будет меньше ε, то окрашиваем точку $z = x + iy$ в черный цвет. Если расстояние от точки $f_3^{(100)}(z)$ до точки $z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ будет меньше ε, то окрашиваем точку $z = x + iy$ в белый цвет. Если расстояние от точки $f_3^{(100)}(z)$ до точки $z_3 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ будет меньше ε, то окрашиваем точку $z = x + iy$ в серый цвет.

```
for k:=0 to 1 do  begin
a[k].re := cos((2*pi*k)/2);a[k].im := sin((2*pi*k)/2); end;
for k:=0 to 1 do
begin color[k] := clRandom;end;if (width >=height ) then
begin kef := width / height;x_min := scall * -kef;x_max := scall
*kef;y_min := scall * -1;y_max := scall;end else if (height >width)
then
begin kef := height/width;x_min := scall * -1;x_max := scall;y_min
:= scall *-kef;
y_max := scall * kef;
end;dx := (x_max - x_min) / width;dy := (y_max - y_min) / height;
for l:=0 to 1 do begin for i:=1 to width do for j:=1 to height do
begin
c := (x_min +i* dx,y_min + j *dy);for k:=1 to iterdo c := fx(c);
begin if(abs(sqrt((c.Real-a[l].re)*(c.Real-a[l].re)+(c.Imaginary-
a[l].im)*(c.Imaginary-a[l].im)))<0.0005) then
setpixel (i, j, color[l]);
end;end;end;end.
```

Результат работы программы:

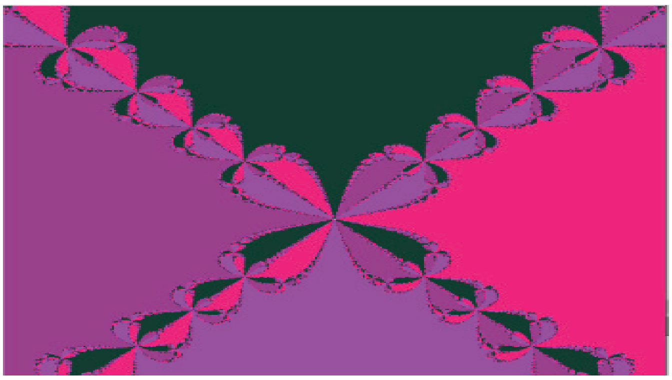


Р и с. 3. Множество Жюлиа функции f_3

F i g. 3. Julia set of a function f_3

[2] Кроновер Р. М. Фракталы и хаос в динамических системах. М. : Постмаркет, 2000. 352 с.; Секованов В. С. Элементы теории фрактальных множеств : Учеб. пособие. 4-е изд., перераб. и доп. Кострома : КГУ, 2012. 208 с. EDN: ZFSPGF

будет множеством Жюлиа функции $f_3(z) = z - \frac{z^3-1}{3z^2}$.
После построения множества Жюлиа преподавателю следует познакомить студентов с идеей доказательства сложной структуры множества Жюлиа и порекомендовать студентам литературу, где рассмотрено соответствующее решение. Например, в работе [4].
Далее мы рассмотрим развитие креативных качеств студентов при изучении метода Ньютона для комплексного полинома четвертой степени.
Изучение данной темы дает возможность развивать гибкость мышления, интуицию, преодолевать стереотипы мышления, развивает эстетические качества, что позитивно влияет на развитие креативных качеств студентов.
Этап 3. Покажем, используя результаты [4], рассуждая по аналогии, что множество Жюлиа функции $f_4(z) = z - \frac{z^4-1}{4z^3}$ также имеет сложную структуру.
Полезно, чтобы доказательство этого предположения провели студенты, что дает возможность развитию важнейшего креативного качества рассуждение по аналогии. Кроме того, предложенный способ нацелен на развитие креативного качества, позволяющего выполнять сложные задания, усовершенствуя известные методы.
При решении указанной выше задачи студенты также развивают оригинальность мышления и интуитивность, являющиеся важнейшими креативными качествами.
Рассмотрим сначала полином четной степени $f_2(z) = z^4 - 1$ и покажем, что множеством Жюлиа функции $f_4(z) = z - \frac{z^4-1}{4z^3} = \frac{3z^4+1}{4z^3}$будет множество, имеющее сложнуючетырехстороннюю структуру. Отметим, чтомножеством Жюлиа функции является замыкание всех ее периодических отталкивающих точек. Итак, пусть $f_4(z) = z - \frac{z^4-1}{4z^3} = \frac{3z^4+1}{4z^3}$.
Здесь преподавателю важно подчеркнуть, что алгоритм строится аналогично предыдущим случаям и попросить студентов написать его полностью самостоятельно. Такой подход дает возможность проявить самостоятельность в высшей мере и усилить мотивацию как к программированию, так и математическим методам.
Написав программу по аналогии предыдущим двум случаям, студенты получат рисунок 3.



Р и с. 4. Множество Жюлиа функции f_4
F i g. 4. Julia set of a function f_4

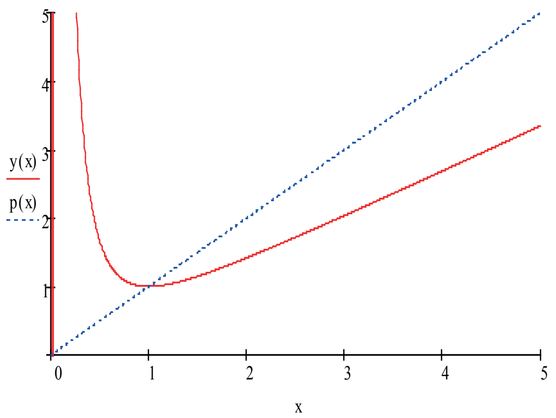
Покажем сначала, что поведение функции $f_4(z)$ в точке $\tilde{z} = \infty$ эквивалентно поведению функции $F(z) = \frac{1}{f_4\left(\frac{1}{z}\right)}$ в окрестности нуля. Имеем $F(z) = \frac{1}{\frac{3\left(\frac{1}{z}\right)^4+1}{4\left(\frac{1}{z}\right)^3}} == \frac{4z}{z^4+3}$. Найдем производную функции $F(z)$. Имеем:
$$F'(z) = \frac{4(z^4+3) - 4z^3 4z}{(z^4+3)^2} = 12\frac{1-z^4}{(z^4+3)^2}$$
Заметим, что точка $z = 0$ – неподвижная, отталкивающая точка для функции
$F(z) = \frac{1}{f_4\left(\frac{1}{z}\right)}\left(F(0) = 0 \text{ и } F'(0) = \frac{4}{3}\right)$.
Следовательно,$\tilde{z} = \infty$–отталкивающая неподвижная точка для функции $f_4(z) = z - \frac{z^4-1}{4z^3}$
и принадлежит множеству Жюлиа функции $f_4(z) = z - \frac{z^4-1}{4z^3}$.
Поскольку $f_4(0) = \infty$, то, $z = 0$ также принадлежит множеству Жюлиа.
Следуя [4], покажем, что множество Жюлиа для функции $f_4(z) = z - \frac{z^4-1}{4z^3}$ имеет четырехстороннюю фрактальную структуру. Неподвижными притягивающими точками данной функции будут числа
$z_0 = \exp(\pi i 0/2)$,
$z_1 = \exp(\pi i 1/2)$,
$z_2 = \exp(\pi i 2/2)$,
$z_3 = \exp(\pi i 3/2)$.
Согласно характеристике множеств Жюлиа оно является границей бассейнов притяжения притягивающих циклов (см. [4]).
В нашем случае $J(f_4) = \partial A(\exp(\pi ik/2), k = 0,1,2,3$ поскольку для функции$f_4(z) = z - \frac{z^4-1}{4z^3} = \frac{4z^4-z^4+1}{4z^3} = \frac{3z^4+1}{4z^3}$
будут неподвижные притягивающие точки z_0, z_1, z_2, z_3. Здесь следует указать студентам, что данные точки порождают 4 бассейна притяжения.
Покажем, что каждая точка $J(f_4)$ должна быть четырехсторонней точкой по отношению к бассейнам притяжения четверки корней из единицы, являющихся неподвижными притягивающими точками функции. Известно, что обратная орбита $f_4^{-n}(z)$ при $n = 1, 2, 3, \ldots$ плотна в множестве Жюлиа для каждой точки z , взятой из этого множества (см. [4]). В таком случае множество
$W = f_4^{-1}(0) \cup f_4^{-2}(0) \cup f_4^{-3}(0) \cup f_4^{-4}(0) \cup f_4^{-5}(0) \cup \ldots f_4^{-n}(0) \cup \ldots$ будет плотно на $J(f_4)$. Мы будем рассматривать прообразы точки $z = 0$.
Пусть $z \in J(f_4)$ и U произвольная окрестность точки z. Тогда, существуют такие натуральное число n и точка $\tilde{z}$, что $\tilde{z} \in J(f_4) \cap f_4^{-n}(0)$. Тогда $f_4^{(n)}(\tilde{z}) = 0$.

Производная функции, стоящей в левой части последнегоравенства не равна нулю, поскольку $\left(f_4^{(n)}(q)\right)' = \left(f_4'(q)\right)^n = 0$,

$q = z_i, i = 0,1,2,3$. Ясно, что точка $\tilde{z}$ таковой не является, поскольку принадлежит множеству Жюлиа.

Поясним сказанное. Заметим, что $f_4'(z) = \frac{3}{4}\frac{z^4-1}{z^4}$. Из последнего равенства вытекает, что $f_4'(x) = 0$ только при $x = z_i, i = 0,1,2,3$. Поскольку $\left(f_4^{(2)}(z)\right)' = f'_4(f_4(z))f'_4(z)$, $f'_4(z) \neq 0$ и $f_4'(f_4(z)) \neq 0$, то $\left(f_4^{(2)}(z)\right)' \neq 0$.

Рассуждая поиндукции, получим, что $\left(f_4^{(n)}(z)\right)' \neq 0. p(z) = z$ будут иметь вид (см. Рис. 5).



Р и с. 5. Графики функций $y(x)$, $p(x)$

F i g. 5. Function Graphs $y(x)$, $p(x)$

крытый шар с центром в начале координат и радиусом ε. Обозначим данный шар $B(0, \varepsilon)$. Пусть теперь $I_\varepsilon = (0; \varepsilon) \subset \mathbb{R}$. Согласно методу Ньютона для вещественной функции $f_4(x)$ $I_\varepsilon \subset A(1)$. Действительно, в правой полуплоскости, графики функций $y(x) = \frac{3x^4+1}{4x^3}$,

С помощью диаграмм Ламерея (Рис. 5) нетрудно убедиться, что орбита каждой точки, с положительной координатой будет стремиться к *1*. Пусть, например, *Iε=(0;2).* Тогда $I_\varepsilon \subset A(1)$. Покажем, что $R(I_\varepsilon) \subset A(i)$, $R^2(I_\varepsilon) \subset A(-1)$, $R^3(I_\varepsilon) \subset A(-i)$, где R– преобразование поворота луча $[0, \infty)$на 90 градусов относительно начала координат, R^2 – преобразование поворота луча $[0, \infty)$на 180 градусов относительно начала координат, R^3 – преобразование поворота луча $[0, \infty)$ на 270 градусов относительно начала координат.

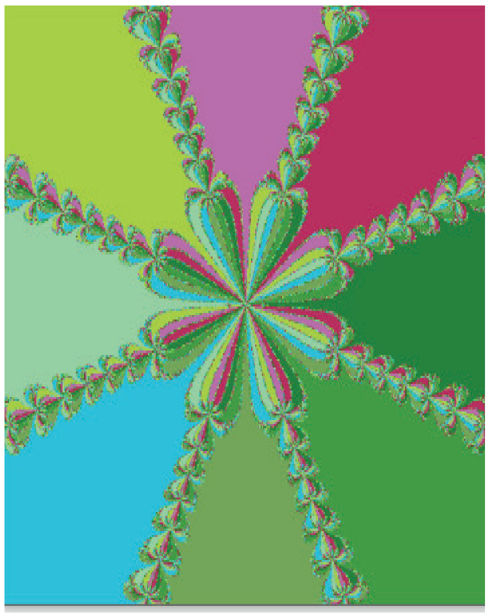
Покажем сначала, что $f_4\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right) = e^{\frac{\pi i}{2}} f_4(z)$. Действительно: $f_4\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right) = \frac{3z^4e^{2\pi i}+1}{4z^2e^{\frac{3\pi i}{2}}} = \frac{(3z^4e^{2\pi i}+1)e^{2\pi i}}{4z^2e^{\frac{3\pi i}{2}}} = \frac{(3z^4+1)}{4z^2}e^{\frac{\pi i}{2}} = e^{\frac{\pi i}{2}} f_4(z)$. Далее заметим, что $f_4^{(2)}\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right) = f_4\left(f_4\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right)\right) = f_4\left(e^{\frac{\pi i}{2}} f_4(z)\right) = e^{\frac{\pi i}{2}} f_4^{(2)}(z)$. Рассуждая по индукции, получим:$f_4^{(n)}\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right) = e^{\frac{\pi i}{2}} f_4^{(n)}(z)$ для каждого натурального числа. Таким образом, если $\lim_{n\to\infty} f_4^{(n)}(z) = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} f_4^{(n)}\left(ze^{\frac{\pi i}{2}}\right) = e^{\frac{\pi i}{2}} \lim\limits_{n\to\infty} f_4^{(n)}(z) = e^{\frac{\pi i}{2}}$ $i = 0,1,2,3$. Из последнего равенства вытекает, что $R(I_\varepsilon) \subset A(i)$. Аналогично можно показать, что $R^2(I_\varepsilon) \subset A(-1), R^3(I_\varepsilon) \subset A(-i)$.

Таким образом, произвольно взятая нами окрестность U содержит точки из х бассейнов притяжения.

Этап 4. На данном этапе ММИЗ используя языки программирования, студенты разрабатывают алгоритмы построения фрактальных множеств функций комплексной переменной. В качестве такой функции рассматривается функция $f(z) = z - \frac{z^8-1}{8z^7}$ и строится ее множество Жюлиа по следующей схеме: 1) обозначаются черезz_i, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 7$ z_i– корни восьмой степени из единицы. Далее разрабатывается алгоритм для построения бассейнов притяжения $j(f_0) = \partial A(z_0) = \partial A(z_1) = \partial A(z_2) = \dots = \partial A(z_7)$, неподвижных точек z_i, $i = 0, 1, 2, 3, \dots, 7$ (восемь цветов). В данном случае множество Жюлиа функции $f(z) = z - \frac{z^8-1}{8z^7}$ является границей областей притяжения неподвижных точек (аттракторов) и имеет фрактальную структуру. Далее, используя графические редакторы и другие ИКТ, студенты получают художественную композицию «лепесток» (Рис. 6). По аналогичной схеме студентами создается художественная композиция «Галактика» (Рис. 7).

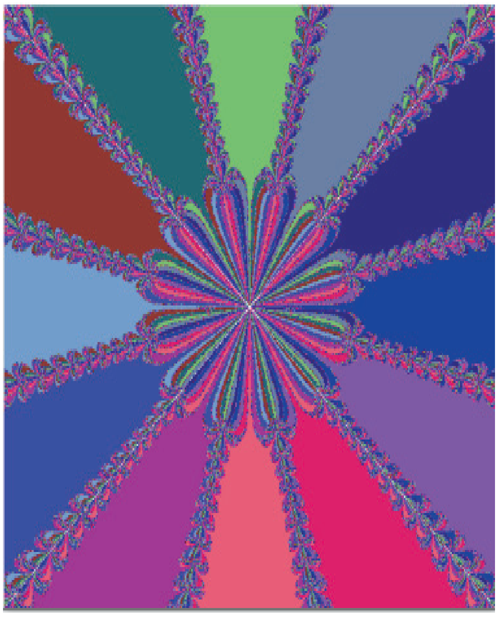
Заключение

При использовании различных ИКТ у студента имеются возможности из «Лепестка» и «Галактики» создать новые художественные композиции. Следует отметить, что при создании художественных композиций студент выступает в роли математика, программиста и компьютерного художника. Такие виды творческой деятельности нацелены на развитие эстетического развития студентов.



Р и с. 6. Лепесток

F i g. 6. Petal



Р и с. 7. Галактика
F i g. 7. Galaxy

Используя универсальную компьютерную программу, приведенную выше, студенты без труда построят для $f_4(z)$, $f_8(z)$, $f_{12}(z)$, множества Жюлиа $\mathbb{J}(f_8)$,$\mathbb{J}(f_{12})$, изображенные на рисунках 6 и 7 и проведут исследование, выявив их сложную структуру. Таким образом, изучение данной темы нацелено на развитие интуитивного мышления – важнейшего креативного качества обучаемого.

Список использованных источников

[1] Douady A. Julia Sets and the Mandelbrot Set // The Beauty of Fractals ; ed. by. H. O. Peitgen, P. H. Richter. Berlin, Heidelberg : Springer, 1986. P. 161-174. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1_13

[2] Milnor J. Dynamics in One Complex Variable. Third Edition. Princeton : Princeton University Press, 2006. URL: http://www.jstor.org/stable/j.ctt7rnxn (дата обращения: 11.02.2023).

[3] Секованов В. С. О множествах Жюлиа некоторых рациональных функций // Вестник Костромского государственного университета им. Н.А. Некрасова. 2012. Т. 18, № 2. С. 23-28. EDN: PYNQJR

[4] Peitgen H. O., Richter P. H. Julia Sets and their Computergraphical Generation // The Beauty of Fractals ; ed. by. H. O. Peitgen, P. H. Richter. Berlin, Heidelberg : Springer, 1986. P. 27-52. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1_2

[5] Ивков В. А., Секованов В. С., Смирнов Е. И. Изучение аттракторов нелинейных отображений в рамках многоэтапных математико-информационных заданий как средство развития креативности студентов // Математический форум (Итоги науки. Юг России). 2018. Т. 12. С. 150-164. EDN: PAKBEA

[6] Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Построение фрактальных множеств с помощью L-систем и информационных технологий» как средство развития креативности студентов / В. С. Секованов [и др.] // CEUR Workshop Proceedings. 2016. Т. 1761. С. 204-211. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper26.pdf (дата обращения: 11.02.2023).

[7] Visual Modeling and Fractal Methods in Science / V. S. Sekovanov [и др.] // 2014 International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Bulgaria : Varna, 2014. P. 94-98. https://doi.org/10.1109/MCSI.2014.28

[8] Секованов В. С., Смирнова А. О. Развитие гибкости мышления студентов при изучении структуры неподвижных точек полиномов комплексной переменной // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2016. Т. 22, № 3. С. 189-192. EDN: WTOYOL

[9] Смирнов Е. И., Секованов В. С., Миронкин Д. П. Многоэтапные математико-информационные задачи как средство развития креативности учащихся профильных математических классов // Ярославский педагогический вестник. 2014. Т. 2, № 1. С. 124-129. EDN: RZLXHB

[10] Designing Anticipation Activity of Students When Studying Holomorphic Dynamics Relying on Information Technologies / V. Sekovanov [и др.] // Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science; ed. by V. Sukhomlin, E. Zubareva. Cham : Springer, 2020. Vol. 1201. P. 59-68. https://doi.org/10.1007/978-3-030-46895-8_4

[11] Секованов В. С. О некоторых дискретных нелинейных динамических системах // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 3. С. 185-199. EDN: YPVWJV

[12] Секованов В. С., Ивков В. А. Мотивации в изучении нелинейных отображений фрактальности и хаоса методом наглядного моделирования // Евразийское научное объединение. 2015. Т. 2, № 2. С. 302-305. EDN: TQLTYZ

[13] Сekованов В. С., Салов А. Л., Самохов Е. А. О вычислении константы Фейгенбаума // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2010. Т. 6, № 1. С. 364-371. EDN: UIZHWR
[14] McCartney M., Glass D. H. Computing Feigenbaum's δ constant using the Ricker map // International Journal of Mathematical Education in Science and Technology. 2014. Vol. 45, issue 8. P. 1265-1273. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.920534
[15] Briggs K. M. A precise calculation of the Feigenbaum constants // Mathematics of Computation. 1991. Vol. 57. P. 435-439. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1991-1079009-6
[16] Hertling P., Spandl Ch. Computing a Solution of Feigenbaum's Functional Equation in Polynomial Time // Logical Methods in Computer Science. 2014. Vol. 10, issue 4. P. 1-9. https://doi.org/10.2168/LMCS-10(4:7)2014
[17] Секованов В. С., Рыбина Л. Б., Стрункина К. Ю. Изучение обрамлений множеств Мандельброта полиномов второй степени как средство развития оригинальности мышления студентов // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. 2019. Т. 25, № 4. С. 193-199. https://doi.org/10.34216/2073-1426-2019-25-4-193-199
[18] Раба Н. О. Реализиция алгоритмов построения гиперкомплексных множеств Жюлиа и Мандельброта // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 2007. № 3. С. 25-59. EDN: MVKEJD
[19] Rosa A. Methods and Applications to Display Quaternion Julia Sets // Differential Equations and Control Processes. 2005. No. 4. P. 1-22. EDN: VHRQLH
[20] Hubbard J., Schleicher D., Sutherland S. How to find all roots of complex polynomials by Newton's method // Inventiones mathematicae. 2001. Vol. 146, issue 1. P. 1-33. https://doi.org/10.1007/s002220100149
[21] Schleicher D., Stoll R. Newton's method in practice: Finding all roots of polynomials of degree one million efficiently // Theoretical Computer Science. 2017. Vol. 681. P. 146-166. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.03.025
[22] Секованов В. С. О множествах Жюлиа функций, имеющих неподвижные параболические точки // Фундаментальная и прикладная математика. 2021. Т. 23, № 4. С. 163-176. EDN: NZZZRV
[23] Секованов В. С. Гладкие множества Жюлиа // Фундаментальная и прикладная математика. 2016. Т. 21, № 4. С. 133-150. URL: https://www.mathnet.ru/links/44c77fdf5b9365ae378626d1d37a5661/fpm1751.pdf (дата обращения: 11.02.2023).
[24] Выполнение многоэтапного математико-информационного задания «Динамика итерирования кусочно-линейных функций» как средство развития креативности студентов / В. С. Секованов [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2020. Т. 16, № 3. С. 711-720. https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202003.711-720
[25] Развитие гибкости мышления студентов при вычислении константы Фейгенбаума с помощью информационных и коммуникационных технологий / В. С. Секованов [и др.] // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2021. Т. 17, № 2. С. 415-422. https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.415-422

Поступила 11.02.2023; одобрена после рецензирования 03.03.2023; принята к публикации 17.03.2023.

Об авторах:

Секованов Валерий Сергеевич, заведующий кафедрой прикладной математики и информационных технологий Института физико-математических и естественных наук, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), доктор педагогических наук, профессор, **ORCID: https://orcid./0000-0002-8604-8931**, sekovanovvs@yandex.ru

Ивков Владимир Анатольевич, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий Института физико-математических и естественных наук, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), кандидат экономических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1014-9381**, ivkov_wa@mail.ru

Пигузов Алексей Александрович, доцент кафедры прикладной математики и информационных технологий Института физико-математических и естественных наук, ФГБОУ ВО «Костромской государственный университет» (156005, Российская Федерация, г. Кострома, ул. Дзержинского, д. 17), кандидат педагогических наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5378-3326**, piguzov@ksu.edu.ru

Рыбина Лариса Борисовна, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Костромская государственная сельскохозяйственная академия», (156530, Российская Федерация, Костромская область, Костромской район, п. Караваево, Учебный городок, д. 34), кандидат философских наук, доцент, **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7891-9373**, larisa.rybina.2014@mail.ru

Шапошникова Ирина Вадимовна, доцент кафедры прикладной математики, БУ ВО «Сургутский государственный университет», (628400, Российская Федерация, Ханты-Мансийский автономный округ – Югра, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1), кандидат технических наук, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0878-1871,** i-v-sh@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

References

[1] Douady A. Julia Sets and the Mandelbrot Set. In: Peitgen H. O., Richter P.H. (eds.) The Beauty of Fractals. Berlin, Heidelberg: Springer; 1986. p. 161-174. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1_13
[2] Milnor J. Dynamics in One Complex Variable. Third Edition. Princeton: Princeton University Press; 2006. Available at: http://www.jstor.org/stable/j.ctt7rnxn (accessed 11.02.2023).
[3] Sekovanov V.S. On Julia set of some rational functions. *Vestnik of Kostroma State University*. 2012;18(2):23-28. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: PYNQJR
[4] Peitgen H.O., Richter P.H. Julia Sets and their Computergraphical Generation. In: In: Peitgen H. O., Richter P.H. (eds.) The Beauty of Fractals. Berlin, Heidelberg: Springer; 1986. p. 27-52. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61717-1_2
[5] Ivkov V.A., Sekovanov V.S., Smirnov E.I. Attractors of nonlinear mappings in the framework learning of multi-stage mathematical and information tasks as a means of students' creativity developing. *Mathematical Forum. (Results of Science. South of Russia).* 2018;12:150-164. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: PAKBEA
[6] Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Fateev A.S. Execution of mathematics and information multistep task "Building a Fractal Set with L-systems and Information Technologies" as a means of creativity of students. *CEUR Workshop Proceedings*. 2016;1761:204-211. Available at: http://ceur-ws.org/Vol-1761/paper26.pdf (accessed 11.02.2023). (In Russ., abstract in Eng.)
[7] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A., Selezneva E.M., Shlyahtina S.M. Visual Modeling and Fractal Methods in Science. In: 2014 International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and in Industry. Bulgaria: Varna; 2014. p. 94-98. https://doi.org/10.1109/MCSI.2014.28
[8] Sekovanov V.S., Smirnova A.O. development of students' ideation flexibility when studying structure of fixed points of polynomials of a complex variable. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2016;33(3):189-192. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: WTOYOL
[9] Smirnov E.I., Sekovanov V.S., Mironkin D.P. Multi-stage mathematic-information tasks as a means to develop pupils' creativity in profile mathematical classes. *Yaroslavl Pedagogical Bulletin.* 2014;2(1):124-129. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: RZLXHB
[10] Sekovanov V., Ivkov V., Piguzov A., Seleznyova Y. Designing Anticipation Activity of Students When Studying Holomorphic Dynamics Relying on Information Technologies. In: Sukhomlin V., Zubareva E. (eds.) Modern Information Technology and IT Education. SITITO 2018. Communications in Computer and Information Science. vol. 1201. Cham: Springer; 2020. p. 59-68. https://doi.org/10.1007/978-3-030-46895-8_4
[11] Sekovanov V.S. On some discrete nonlinear dynamical systems. *Fundamental and Applied Mathematics*. 2016:21(3):185-199. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: YPVWJV
[12] Sekovanov V.S., Smirnov E.I., Ivkov V.A. *Motivacii v izuchenii nelinejnyh otobrazhenij fraktal'nosti i haosa metodom nagljadnogo modelirovanija* [Motivation in the study of nonlinear mappings of fractality and chaos by the method of visual modeling]. *Eurasian Scientific Association*. 2015;2(2):302-305. (In Russ.) EDN: TQLTYZ
[13] Sekovanov V.S., Salov A.L., Samokhov E.A. *O vychislenii konstanty Fejgenbauma* [On the calculation of the Feigenbaum constant]. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2010;6(1):364-371. (In Russ.) EDN: UIZHWR
[14] McCartney M., Glass D.H. Computing Feigenbaum's δ constant using the Ricker map. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 2014;45(8);1265-1273. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.920534
[15] Briggs K.M. A precise calculation of the Feigenbaum constants. *Mathematics of Computation*. 1991;57:435-439. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-1991-1079009-6
[16] Hertling P., Spandl Ch. Computing a Solution of Feigenbaum's Functional Equation in Polynomial Time. *Logical Methods in Computer Science*. 2014;10(4):1-9. https://doi.org/10.2168/LMCS-10(4:7)2014
[17] Sekovanov V.S., Rybina L.B., Strunkina K.Y. The study of frames of Mandelbrot sets of polynomials of the second degree as a means of developing the originality of students' thinking. *Vestnik of Kostroma State University. Series: Pedagogy. Psychology. Sociokinetics*. 2019;25(4):193-199. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.34216/2073-1426-2019-25-4-193-199
[18] Raba N.O. Realization of Algorithms of Quaternion Julia and Mandelbrot Sets Visualization. *Differential Equations and Control Processes*. 2007;(3):25-59. EDN: MVKEJD
[19] Rosa A. Methods and Applications to Display Quaternion Julia Sets. *Differential Equations and Control Processes*. 2005;(4):1-22. EDN: VHRQLH
[20] Hubbard J., Schleicher D., Sutherland S. How to find all roots of complex polynomials by Newton's method. *Inventiones mathematicae*. 2001;146(1):1-33. https://doi.org/10.1007/s002220100149
[21] Schleicher D., Stoll R. Newton's method in practice: Finding all roots of polynomials of degree one million efficiently. *Theoretical Computer Science*. 2017;681:146-166. https://doi.org/10.1016/j.tcs.2017.03.025
[22] Sekovanov V.S. On Julia sets of functions having fixed parabolic points. *Fundamental and Applied Mathematics*. 2021;23(4):163-176. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: NZZZRV
[23] Sekovanov V.S. Smooth Julia sets. *Fundamental and Applied Mathematics*. 2021;21(4):133-150. Available at: https://www.mathnet.ru/links/44c77fdf5b9365ae378626d1d37a5661/fpm1751.pdf (accessed 11.02.2023). (In Russ., abstract in Eng.)

[24] Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A., Rybina L.B. Performing a Multi-Stage Mathematical and Informational Task “Dynamics of Iteration of Piecewise Linear Functions” as a Means of Developing Students’ Creativity. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2020;16(3):711-720. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.25559/SITITO.16.202003.711-72

[25] Sekovanov V.S., Ivkov V.A., Piguzov A.A. Rybina L.B. Development of Thinking Flexibility of Students when Calculating the Feigenbaum Constant Using Information and Communication Technologies. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2021;17(2):415-422. (In Russ., abstract in Eng.) https://doi.org/10.25559/SITITO.17.202102.415-422

Submitted 11.12.2022; approved after reviewing 03.03.2023; accepted for publication 17.03.2023.

About the authors:

Valeriy S. Sekovanov, Head of the Chair of Applied Mathematics and Information Technology, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Dr. Sci. (Ped.), Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8604-8931**, sekovanovvs@yandex.ru

Vladimir A. Ivkov, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics and Information Technology, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation), Cand. Sci. (Econ.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1014-9381**, ivkov_wa@mail.ru

Alexey A. Piguzov, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics and Information Technology, Institute of Physics and Mathematics and Natural Sciences, Kostroma State University (17 Dzerzhinskiy St., Kostroma 156005, Russian Federation) Cand. Sci. (Ped.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-5378-3326**, piguzov@ksu.edu.ru

Larisa B. Rybina, Associate Professor of the Higher Mathematics Department, Kostroma State Agricultural Academy (34 educational campus, Karavaevo, Kostroma region 156530, Russian Federation), Cand. Sci. (Philos.), Associate Professor, **ORCID: https://orcid.org/0000-0001-7891-9373,** larisa.rybina.2014@mail.ru

Irina V. Shaposhnikova, Associate Professor of the Chair of Applied Mathematics, Surgut State University (1 Lenin Ave., Surgut 628400, Khanty-Mansi Autonomous Okrug – Ugra, Russian Federation), Cand. Sci. (Eng.), **ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0878-1871**, i-v-sh@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.