

Сравнение методов синтеза закона управления движением колесного робота

А. С. Томилова, М. В. Сотникова*

ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет», г. Санкт-Петербург, Российская Федерация

Адрес: 199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9

* m.sotnikova@spbu.ru

Аннотация

В современной теории управления одним из наиболее сложных и актуальных вопросов является синтез законов управления для нелинейных систем. Это связано с тем, что в большинстве случаев математическая модель движения объекта управления описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений и нет универсальных подходов к синтезу законов управления для таких систем. Как правило выбор того или иного алгоритма управления зависит от множества факторов, в том числе вида системы. В работе исследуется применение различных методов синтеза закона управления движением колесного робота. Целью управления является движение робота в заданное положение, т.е. решение задачи позиционирования. В качестве алгоритмов управления рассматриваются метод линеаризации обратной связью и метод оптимального демпфирования, который впервые был предложен В.И. Зубовым в начале 1960-х годов. Метод линеаризации обратной связью, после приведения нелинейной системы к линейному виду, позволяет построить оптимальное управления путем решения задачи LQR-оптимизации, тогда как метод оптимального демпфирования позволяет получить лишь приближенное решение поставленной задачи оптимального управления, сводя ее к задаче параметрической оптимизации. Однако метод линеаризации обратной связью имеет существенные ограничения в использовании. Применение этого метода в отличие от метода оптимального демпфирования возможно лишь для полноприводных систем. Проводится сравнение выбранных подходов к синтезу закона управления. Показано, что выбранные алгоритмы управления обеспечивают достижение поставленной цели управления и гарантируют глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы. Приведены примеры имитационного моделирования, демонстрирующие корректное функционирование замкнутой системы управления.

Ключевые слова: оптимальное демпфирование, линеаризация обратной связью, система управления, сравнение алгоритмов управления, колесный робот, позиционирование

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Для цитирования: Томилова А. С., Сотникова М. В. Сравнение методов синтеза закона управления движением колесного робота // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2023. Т. 19, № 3. С. 588-597. <https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202303.588-597>

© Томилова А. С., Сотникова М. В., 2023



Контент доступен под лицензией Creative Commons Attribution 4.0 License.
The content is available under Creative Commons Attribution 4.0 License.



Comparison of Control Law Synthesis Methods for the Wheeled Robot Motion

A. S. Tomilova, M. V. Sotnikova*

Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg, Russian Federation

Address: 7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation

* m.sotnikova@spbu.ru

Abstract

In modern control theory, one of the most complex and actual issues is the control law synthesis for nonlinear systems. This is due to the fact that in most cases the mathematical model of the control object motion is described by a system of nonlinear differential equations and there are no universal approaches to the control law synthesis for such systems. As a rule, the choice of one or another control algorithm depends on many factors, including the type of system. This paper investigates the application of various methods for the control law synthesis of the wheeled robot motion. The aim of the control is to move the robot to a given position, i.e. solution of the positioning problem. As control algorithms, the feedback linearization method and the optimal damping method, which was first proposed by V.I. Zubov in the early 1960s, are considered. The feedback linearization method, after reducing the nonlinear system to a linear form, allows one to construct an optimal control by solving the LQR-optimization problem, while the optimal damping method allows one to obtain only an approximate solution of the optimal control problem, reducing it to a parametric optimization problem. However, the feedback linearization method has significant limitations in its use. The use of this method, in contrast to the method of optimal damping, is possible only for all-wheel systems. The selected approaches to the control law synthesis are compared. It is shown that the selected control algorithms ensure the achievement of the control aim and guarantee the global asymptotic stability of the equilibrium position of a closed-loop system. Examples of simulation modeling are given, demonstrating the correct functioning of a closed-loop control system.

Keywords: optimal damping, feedback linearization, control system, control algorithm comparison, wheeled robot, positioning

Conflict of interests: The authors declare no conflict of interest.

For citation: Tomilova A.S., Sotnikova M.V. Comparison of Control Law Synthesis Methods for the Wheeled Robot Motion. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2023;19(3):588-597. <https://doi.org/10.25559/SITITO.019.202303.588-597>



Введение

В современной теории управления одним из наиболее сложных и актуальных вопросов является синтез законов управления для нелинейных систем¹ [1-8]. Это связано с тем, что в большинстве случаев математическая модель движения объекта управления описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений, и нет универсальных подходов к синтезу законов управления для таких систем.

В настоящее время существует множество различных методов синтеза законов управления подвижным объектом. Как правило, выбор того или иного алгоритма управления зависит от множества факторов, в том числе вида системы. В случае, когда линейная математическая модель достаточно хорошо описывает динамику объекта, используются классические методы синтеза для линейных стационарных систем² [9-17]. В противном случае используются методы для нелинейных систем³ [18-22].

Классическими методами синтеза линейных стационарных систем являются линейно-квадратичный регулятор (LQR) и модальный синтез⁴ [11]. Эти методы позволяют построить стабилизирующий регулятор для линейной системы управления. Для нелинейных систем можно использовать метод линеаризации обратной связью⁵ [18], для которого после сведения нелинейной системы к линейному виду используются классические методы синтеза линейных стационарных систем, к примеру, синтез LQR-регулятора или модальный синтез. Однако этот метод имеет существенные ограничения в использовании. Применение данного метода возможно лишь для полноприводных систем.

Существуют и другие методы синтеза нелинейных систем. К ним можно отнести методы на основе функций Ляпунова⁶, метод оптимального демпфирования, впервые предложенный В. И. Зубовым в начале 1960-х годов⁷, метод минимизации интегрального функционала (МИФ), базирующийся на принципе оптимальности Беллмана⁸.

В общем случае при применении метода МИФ могут возникнуть трудности, связанные с решением уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана, тогда как в методе оптимального демпфирования такой проблемы не возникает. Метод оптимального демпфирования позволяет найти приближенное решение поставленной задачи оптимального управления, сводя ее к задаче параметрической оптимизации⁹ [21].

Объектом управления в данной работе принят полноприводный колесный робот. Исследуется применение различных методов синтеза закона управления. Целью управления является движение робота в заданное положение, т. е. решение задачи позиционирования. В качестве алгоритмов управления рассматриваются метод линеаризации обратной связи и метод оптимального демпфирования. Проводится сравнение выбранных подходов к синтезу закона управления. Показано, что выбранные алгоритмы управления обеспечивают достижение поставленной цели управления и гарантируют глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы. Приведены примеры имитационного моделирования в среде MATLAB/Simulink, демонстрирующие корректное функционирование замкнутой системы управления.

¹ Бесекинский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического управления : монография. 4-е изд., перераб. и доп. СПб : Профессия, 2004. 747 с. EDN: QMODYF; Зубов В. И. Лекции по теории управления. СПб. : Лань, 2009. 496 с. EDN: QJVQZR; Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Изд. 2, перераб. и доп. Л. : Машиностроение, 1974. 336 с.; Зубов В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л. : Судпромгиз, 1962. 631 с.; Зубов В. И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л. : Судостроение, 1966. 352 с.; Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие. М. : Физматлит, 2004. 464 с.; Khalil H. K. Nonlinear Systems. Third edition. New Jersey : Prentice Hall, 2002. 768 p.; Slotine J., Li W. Applied nonlinear control. New Jersey : Prentice Hall, 1991. 476 p.

² Барабанов А. Е. Оптимальное управление линейным объектом со стационарными помехами и квадратичным критерием качества. М., 1979. Деп. в ВИНТИ, № 3478-79; Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб : Лань, 2013. 448 с. EDN: UGRMRR; Веремей Е. И. Среднеквадратичная многоцелевая оптимизация. СПб : Изд-во СПбГУ, 2016. 408 с. EDN: WYGWYV; Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 181 с.; Anderson B. D. O., Moore J. B. Linear Optimal Control. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 1971. 399 p.; Doyle J., Francis B. Tannenbaum A. Feedback control theory. New York : Macmillan Publ. Co., 1992. 227 p.; Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems. New York : Wiley Publ., 1972. 575 p.

³ Зубов В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л. : Судпромгиз, 1962. 631 с.; Зубов В. И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л. : Судостроение, 1966. 352 с.; Беллман Р. Динамическое программирование. М. : Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.; Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М. : Наука, 1965. 458 с.

⁴ Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб : Лань, 2013. 448 с. EDN: UGRMRR; Кузовков Н. Т. Модальное управление и наблюдающие устройства. М. : Машиностроение, 1976. 181 с.; Anderson B. D. O., Moore J. B. Linear Optimal Control. Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice Hall, 1971. 399 p.; Doyle J., Francis B. Tannenbaum A. Feedback control theory. New York : Macmillan Publ. Co., 1992. 227 p.; Kwakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems. New York : Wiley Publ., 1972. 575 p.

⁵ Ким Д. П. Теория автоматического управления. Т. 2. Многомерные, нелинейные, оптимальные и адаптивные системы: Учеб. пособие. М. : Физматлит, 2004. 464 с.;

⁶ Там же.

⁷ Зубов В. И. Колебания в нелинейных и управляемых системах. Л. : Судпромгиз, 1962. 631 с.; Зубов В. И. Теория оптимального управления судном и другими подвижными объектами. Л. : Судостроение, 1966. 352 с.

⁸ Беллман Р. Динамическое программирование. М. : Изд-во иностр. лит., 1960. 400 с.; Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М. : Наука, 1965. 458 с.

⁹ Томилова А. С. Применение метода оптимального демпфирования к синтезу закона управления колесным роботом // Процессы управления и устойчивость. 2023. Т. 10, № 1. С. 95-99.



Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель движения колесного робота¹⁰:

$$\dot{\eta} = R(\eta)v, \quad (1)$$

где $\eta = (x, y, \varphi)^T$ — вектор состояния объекта управления; x, y — координаты центра масс в неподвижной системе координат (рис. 1), φ — угол поворота робота, отсчитываемый от горизонтальной оси Ox против часовой стрелки; $v = (v_x, v_y, w)^T$ — вектор скорости, заданный в связанной с роботом подвижной системе координат, который в данном случае является управляющим воздействием; матрица поворота

$$R(\eta) = R(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Целью управления является достижение заданного положения робота на плоскости, определяемого вектором $\eta_d = (x_d, y_d, \varphi_d)^T$.

Поскольку желаемое положение η_d , в которое перемещается робот, отлично от нулевого положения, необходимо построить систему в отклонениях от заданного положения η_d .

Построим систему в отклонениях от заданного положения равновесия:

$$\dot{e} = R(e + \eta_d)v, \quad (2)$$

где $e = \eta - \eta_d$ — вектор состояния системы в отклонениях.

Полученная система в отклонениях (2) в дальнейшем используется для синтеза закона управления, стабилизирующего нулевое положение равновесия замкнутой системы.

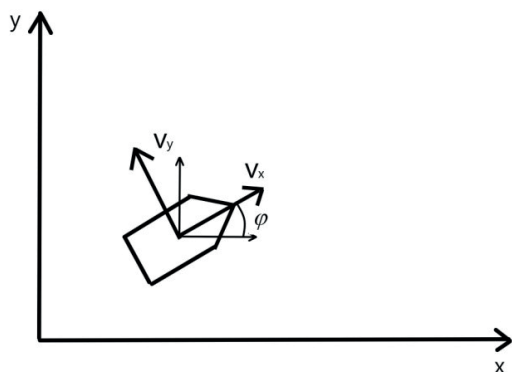


Рис. 1. Положение робота в неподвижной системе координат Oxy

Fig. 1. Robot position in the fixed Oxy coordinate system

Источник: здесь и далее в статье все рисунки составлены авторами.

Source: Hereinafter in this article all figures were made by the authors.

Пусть кроме основной цели управления задана еще дополнительная цель, которая состоит в обеспечении наилучшего качества переходных процессов.

Будем считать, что на движениях замкнутой системы задан функционал, характеризующий качество процессов управления [23-25]:

$$J = J(e, v) = \int_0^{\infty} (e^T P e + \lambda v^T v) dt, \quad (3)$$

где P — симметрическая, положительно-определенная матрица, $\lambda > 0$ — весовой множитель.

Ставится задача синтеза закона управления движением колесного робота, обеспечивающего достижение цели управления с наилучшим качеством переходных процессов по отношению к заданному функционалу (3) [22]. Для решения этой задачи в данной работе предлагается использовать метод оптимального демпфирования и метод линеаризации обратной связи. Проводится сравнение предложенных алгоритмов управления с целью определения наиболее предпочтительного закона управления для решения поставленной задачи.

Синтез закона управления движением колесного робота

Рассмотрим два метода синтеза закона управления движением колесного робота: метод линеаризации обратной связи и метод оптимального демпфирования.

Метод линеаризации обратной связи

Для того чтобы построить управление v , обеспечивающее достижение поставленной цели управления, необходимо ввести новое управляющее воздействие $u \in E^3$, такое, что

$$v = R^T(e + \eta_d)u. \quad (4)$$

Тогда, подставляя выражение (4) в систему (2), получаем линейную систему вида

$$\dot{e} = u. \quad (5)$$

Для получившейся линейной системы (5) можно синтезировать управление в форме линейного пропорционального регулятора, применяя любые известные методы для работы с линейными стационарными системами. Воспользуемся методом LQR-оптимизации¹¹. Для этого введем следующий функционал качества:

$$J = J(e, u) = \int_0^{\infty} (e^T P e + \lambda u^T u) dt. \quad (6)$$

Нетрудно заметить, что значения этого функционала, вычисленные на движениях системы (5), совпадают со значениями исходного функционала (3) после замены управляющей переменной по формуле (4).

¹⁰ Там же. Абушик В. П. Управление движением омниколесного робота с учетом внешних возмущений // Процессы управления и устойчивость. 2020. Т. 7, № 1. С. 188-192.

¹¹ Веремей Е. И. Линейные системы с обратной связью. СПб: Лань, 2013. 448 с. EDN: UGRMRR



Решение задачи LQR-оптимизации по отношению к функционалу (6) сводится к решению матричного алгебраического уравнения Риккати, которое в данном случае принимает вид

$$-\frac{1}{\lambda}SS + P = 0,$$

где S — неизвестная матрица. Решением этого уравнения является симметрическая положительно определенная матрица S , причем квадратичная форма $e^T S e$ является функцией Ляпунова для замкнутой линейным регулятором системы (5), и оптимальный LQR-регулятор задается равенством

$$u = -\frac{1}{\lambda} S e. \quad (7)$$

Заметим, что значение функционала J , вычисленное для заданных начальных условий, является, по существу, функцией Беллмана и вычисляется по формуле¹²:

$$J = e_0^T S e_0,$$

где $e_0 = e(0)$ — начальные условия для систем (5) или (2), поскольку они совпадают.

Подставляя оптимальное управление (7) в выражение (4), получаем управляющее воздействие для рассматриваемой системы (2):

$$v = -\frac{1}{\lambda} R^T (e + \eta_d) S e. \quad (8)$$

Таким образом, метод линеаризации обратной связью позволяет построить замкнутую систему (2), (8), которая обеспечивает достижение поставленной цели управления с наилучшим качеством переходных процессов. При этом нулевое положение равновесия является глобально асимптотически устойчивым.

Метод оптимального демпфирования

Для того чтобы построить управление v , необходимо сформулировать задачу оптимального демпфирования (ОД). Для этого введем вспомогательный функционал, по отношению к которому и будет осуществляться решение задачи ОД:

$$L = L(e, v) = e^T V e + \int_0^{\tau} (e^T P e + \lambda v^T v) d\tau, \quad (9)$$

где V — заранее неизвестная положительно определенная матрица, причем квадратичная форма $e^T V e$ является кандидатом на функцию Ляпунова.

Рассмотрим задачу оптимального демпфирования по отношению к функционалу (9), формализованная постановка которой имеет вид

$$W = W(e, v) \rightarrow \min_{v \in E^3}, \quad v = v_d(e) := \arg \min_{v \in E^3} W(e, v), \quad (10)$$

где функция W определяет скорость изменения функционала L на движениях системы (2):

$$W = W(e, v) = \left. \frac{d(e^T V e)}{dt} \right|_{(2)} + e^T P e + \lambda v^T v. \quad (11)$$

Для решения задачи оптимального демпфирования (10) воспользуемся условием для поиска минимума функции (11):

$$\frac{\partial W(e, v)}{\partial v} = 0. \quad (12)$$

Решая систему (12), получим оптимальное управление

$$v = v_d(e) = -\frac{1}{\lambda} R^T (e + \eta_d) V e. \quad (13)$$

Сформулируем утверждение об условиях устойчивости нулевого положения равновесия замкнутой системы, приведенное в статье [21].

Теорема. Если для обратной связи (13) выполняется условие

$$W_{d0}(e) := W(e, v_d(e)) \leq \alpha_4 (\|e\|) \quad \forall e \in E^3, \quad (14)$$

где $\alpha_4 \in \mathbf{K}_\infty$ (класс \mathbf{K} -функций), то функция $\bar{V}(e) = e^T V e$ является управляющей функцией Ляпунова для системы (2), а нулевое положение равновесия замкнутой системы (2), (13) является глобально равномерно асимптотически устойчивым, т. е. обратная связь (13) служит стабилизирующим регулятором для объекта (2).

Подставляя оптимальное управление (13) в функцию (11), получим выражение

$$W_{d0}(e) = e^T \left(-\frac{1}{\lambda} V^2 + P \right) e. \quad (15)$$

Тогда для выполнения условия (14) необходимо и достаточно, чтобы функция (15) была отрицательно-определенной.

Оптимальное управление (13) зависит от матрицы V , выбор которой должен обеспечивать глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы (2), (13).

Поиск матрицы V будем осуществлять с помощью введения вектора параметров h , который задает ее коэффициенты:

$$V = V(h) = \begin{pmatrix} h_1 & h_4 & h_5 \\ h_4 & h_2 & h_6 \\ h_5 & h_6 & h_3 \end{pmatrix}, \quad h = (h_1 \ h_2 \ h_3 \ h_4 \ h_5 \ h_6)^T.$$

Для вычисления оптимального управления (13) воспользуемся параметрическим алгоритмом построения приближения, предложенным в статье [21]:

¹² Там же.



1. Задается вектор $h \in H_v \subset E^6$, где H_v — множество векторов h , для которых матрица $V(h)$ положительно определена, а функция W_{d0} является отрицательно-определенной.

2. Формируется функция $\bar{V}(e, h) = e^T V(h)e$.

3. Решается задача ОД с демпфируемым функционалом (9), что дает ОД регулятор $v = v_d(e, h)$.

4. Формируются уравнения замкнутой системы (2), (13)

$$\dot{e} = R(e + \eta_d)v_d(e, h). \quad (16)$$

5. Решается задача Коши для системы (16) с начальными условиями $e(0) = e_0$, что дает функцию $e_d^*(t, h, e_0)$.

6. Формируется функция $v_d^*(t, h, e_0) := v_d(t, e_d^*(t, h, e_0), h)$.

7. Вычисляется значение функции $J_d(h)$, определяемой выражением

$$J_d = J_d(h) = \int_0^\infty (e_d^*(t, h, e_0)^T P e_d^*(t, h, e_0) + \lambda v_d^*(t, h, e_0)^T v_d^*(t, h, e_0)) dt.$$

8. Повторяя вычисления по пунктам 1–7, минимизируется функция $J_d(h)$ на множестве H_v , т. е. решается оптимизационная задача

$$J_d = J_d(h) \rightarrow \min_{h \in H_v}, h_d := \arg \min_{h \in H_v} J_d(h), J_{d0} = J_d(h_d). \quad (17)$$

Из предложенного алгоритма следует, что решение задачи оптимального демпфирования (10) сводится к решению задачи параметрической оптимизации (17).

Таким образом, метод оптимального демпфирования позволяет построить оптимальное управление (13), которое гарантирует глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы (2), (13) и обеспечивает достижение поставленной цели управления с наилучшим качеством переходных процессов.

Пример

Рассмотрим пример движения колесного робота в заданное положение. Для этого зададим начальные условия системы (1) и желаемое положение, в которое должен перейти робот:

$$\begin{aligned} x_0 = 10, \quad y_0 = 10, \quad \varphi_0 = 0^\circ; \\ x_d = 5, \quad y_d = 5, \quad \varphi_d = 80^\circ. \end{aligned}$$

Применим метод линеаризации обратной связью для синтеза закона управления движением колесного робота. Пусть матрица $P = E_{3 \times 3}$, а весовой множитель $\lambda = 1$. Тогда, решая задачу LQR-оптимизации, получим матрицу

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и значение функционала (3), определяемое выбором начальных условий:

$$J = 51,9495515.$$

Решение задачи LQR-оптимизации проводилось в среде MATLAB с использованием функции¹³ lqr, в которой реализован численный метод решения матричного уравнения Риккати.

На рис. 2 изображены траектория движения колесного робота в заданное положение и графики изменения линейных (v_x , м/с и v_y , м/с) и угловой (w , рад/с) скоростей, полученные при движении колесного робота в заданное положение. Из рисунков видно, что построенный закон управления с помощью метода линеаризации обратной связью обеспечивает достижение цели управления. Время переходного процесса составляет примерно 5 с.

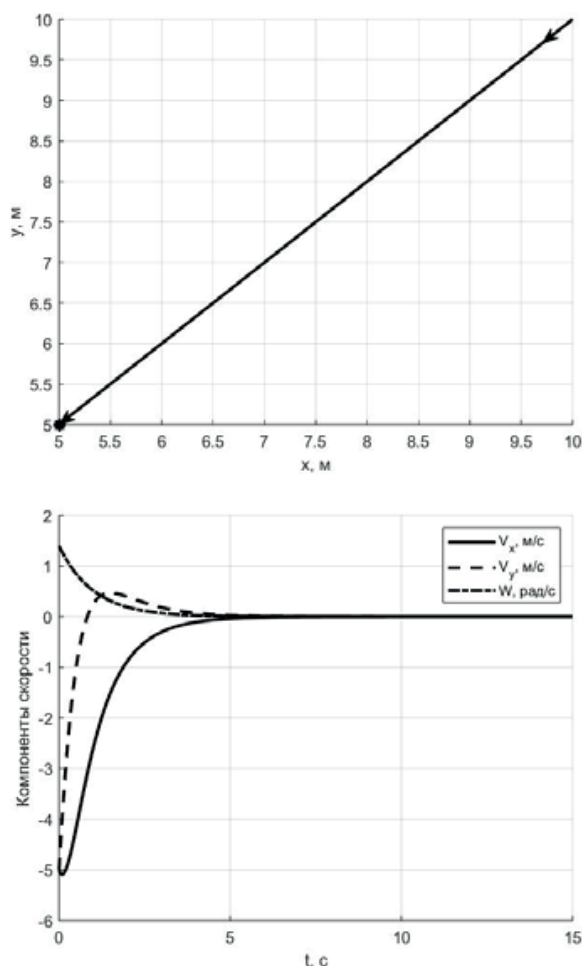


Рис. 2. Траектория движения колесного робота в заданное положение и графики изменения линейных и угловой скоростей для случая линеаризации обратной связью

Fig. 2. The wheel robot's trajectory to a given position, and the graphs of changes of linear and angular velocities for the case of feedback linearization

Теперь для синтеза закона управления движением колесного робота применим метод оптимального демпфирования. Пусть матрица $P = E_{3 \times 3}$, а весовой множитель $\lambda = 1$.

¹³ MATLAB function «lqr» [Электронный ресурс] // MathWorks, 2023. URL: <https://www.mathworks.com/help/control/ref/lti.lqr.html> (дата обращения: 16.08.2023).



Тогда, решая задачу параметрической оптимизации (17) с применением численного метода и выбрав в качестве начального приближения точку

$$h_0 = (0,998 \ 0,996 \ 0,999 \ -0,001 \ 0,003 \ -0,004)^T$$

из окрестности оптимального решения $h = (1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0)^T$, найденного в ходе решения задачи LQR-оптимизации, получим вектор

$$h = (1 \ 0,9987 \ 0,9828 \ 0 \ 0 \ -0,0048)^T, \text{ [ИЗ]}$$

и соответствующую ему матрицу

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9987 & -0,0048 \\ 0 & -0,0048 & 0,9828 \end{pmatrix}.$$

При этом значение функционала (3) для указанных начальных условий равно

$$J = 51,9495685.$$

Из полученных результатов видно, что значение функционала и матрицы Ляпунова V , полученные в ходе решения задачи параметрической оптимизации (17), близки к значению функционала и матрицы Ляпунова S , найденные в результате решения задачи LQR-оптимизации.

В случае, когда в качестве начального приближения берется произвольная точка, к примеру

$$h_0 = (0,696 \ 0,683 \ 0,992 \ 0,054 \ 0,575 \ 0,135)^T, \text{ решая задачу}$$

параметрической оптимизации (17), получим вектор

$$h = (1,2535 \ 1,6728 \ 2,2947 \ -0,4128 \ -0,5698 \ 0,9314)^T, \text{ [И4]}$$

[И4]

и соответствующую ему матрицу

$$V = \begin{pmatrix} 1,2535 & -0,4128 & -0,5698 \\ -0,4128 & 1,6728 & 0,9314 \\ -0,5698 & 0,9314 & 2,2947 \end{pmatrix}.$$

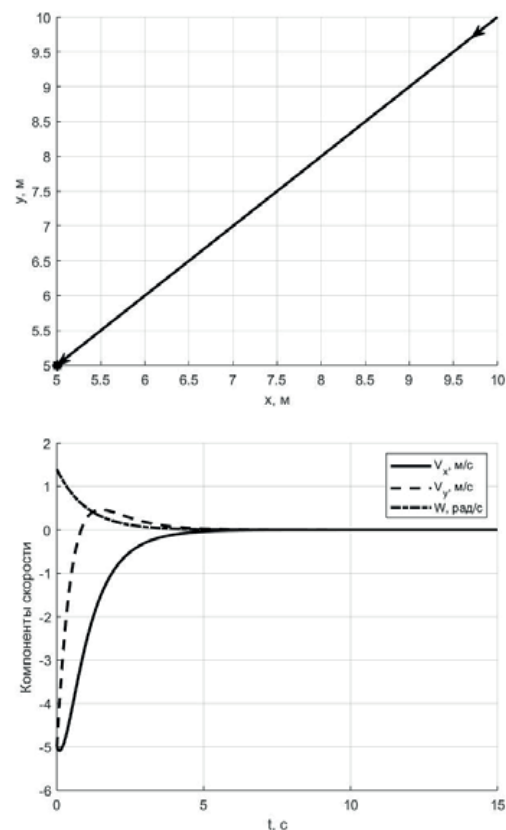
А значение функционала (3) для указанных начальных условий равно

$$J = 51,9495685.$$

Из полученных результатов видно, что значение функционала, полученное в ходе решения задачи параметрической оптимизации (17), близко к значению функционала, найденному в результате решения задачи LQR-оптимизации, но при этом матрицы Ляпунова V и S разные. Следовательно, можно сделать вывод, что полученное решение задачи параметрической оптимизации (17) сходится к локальному минимуму.

Таким образом, от выбора начального приближения при решении задачи параметрической оптимизации (17) зависит корректность поиска оптимального управления и, как следствие, устойчивость замкнутой системы.

Решение задачи параметрической оптимизации (17) проводилось в среде MATLAB с использованием функции¹⁴ `fmincon`, в которой реализован метод последовательного квадратичного программирования. Для построения решения задачи Коши применялась функция¹⁵ `ode89`, в которой реализован численный метод Рунге-Кутты 8-го порядка с шагом интегрирования 0,001. Значение функционала J вычислялось методом трапеций с помощью функции¹⁶ `trapz`. На рис. 3 и рис. 4 изображены траектории движения колесного робота в заданное положение и графики изменения линейных (v_x , м/с и v_y , м/с) и угловой (W , рад/с) скоростей, полученные при движении колесного робота в заданное положение. Из рисунков видно, что построенный методом оптимального демпфирования регулятор обеспечивает достижение цели управления. Время переходного процесса составляет примерно 5 с.



Р и с. 3. Траектория движения колесного робота в заданное положение и графики изменения линейных и угловой скоростей для случая оптимального [ВЗ]демпфирования с начальным приближением

$$h_0 = (0,998 \ 0,996 \ 0,999 \ -0,001 \ 0,003 \ -0,004)^T$$

Fig. 3. The wheel robot's trajectory to a given position and the linear and angular velocity changes for optimal damping with an initial approximation

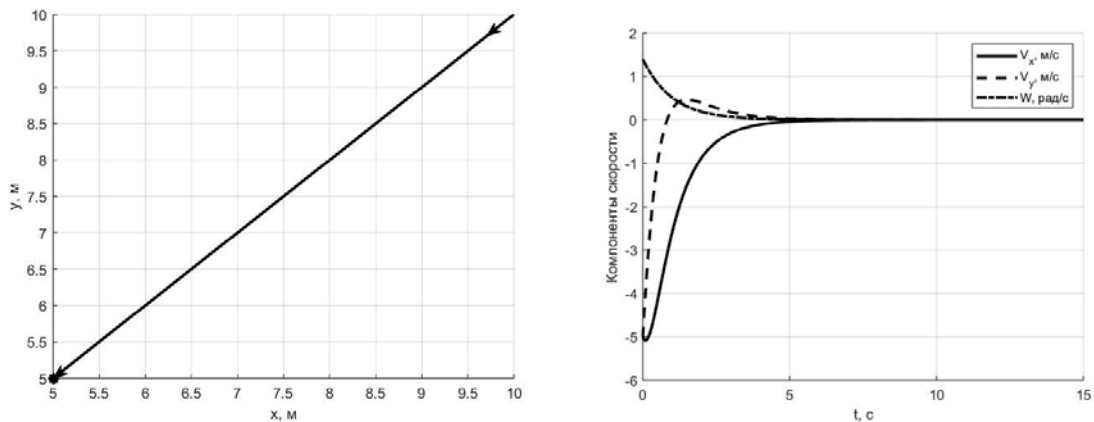
$$h_0 = (0,998 \ 0,996 \ 0,999 \ -0,001 \ 0,003 \ -0,004)^T$$

¹⁴ MATLAB function «fmincon» [Электронный ресурс] // MathWorks, 2023. URL: <https://www.mathworks.com/help/optim/ug/fmincon.html> (дата обращения: 16.08.2023).

¹⁵ MATLAB function «ode89» [Электронный ресурс] // MathWorks, 2023. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/ode89.html> (дата обращения: 16.08.2023).

¹⁶ MATLAB function «trapz» [Электронный ресурс]. // MathWorks, 2023. URL: <https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/trapz.html> (дата обращения: 07.05.2023).





Р и с. 4. Траектория движения колесного робота в заданное положение и графики изменения линейных и угловой скоростей для случая оптимального демпфирования с начальным приближением $h_0 = (0,696 \ 0,683 \ 0,992 \ 0,054 \ 0,575 \ 0,135)^T$

F i g. 4. The wheel robot's trajectory to a given position and the linear and angular velocity changes for optimal damping with an initial approximation $h_0 = (0,696 \ 0,683 \ 0,992 \ 0,054 \ 0,575 \ 0,135)^T$

Т а б л и ц а 1. Результаты имитационного моделирования
T a b l e 1. Simulation results

Метод синтеза закона управления	Матрица Ляпунова	Значение функционала J
Линеаризация обратной связью	$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$J = 51,9495515$
Оптимальное демпфирование с начальным приближением $h_0 = (0,998 \ 0,996 \ 0,999 \ -0,001 \ 0,003 \ -0,004)^T$	$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9987 & -0,0048 \\ 0 & -0,0048 & 0,9828 \end{pmatrix}$	$J = 51,9495685$
Оптимальное демпфирование с начальным приближением $h_0 = (0,696 \ 0,683 \ 0,992 \ 0,054 \ 0,575 \ 0,135)^T$	$V = \begin{pmatrix} 1,2535 & -0,4128 & -0,5698 \\ -0,4128 & 1,6728 & 0,9314 \\ -0,5698 & 0,9314 & 2,2947 \end{pmatrix}$	$J = 51,9495685$

Источник: составлено авторами.
Source: Compiled by the authors.

Сравнивая полученные результаты имитационного моделирования (таблица 1, рис. 2-4), можно сделать вывод, что применение метода оптимального демпфирования для случая полноприводного колесного робота нецелесообразно, поскольку аналогичный результат можно получить, применяя метод линеаризации обратной связью. Однако для более сложных систем метод оптимального демпфирования позволяет построить закон управления, который будет гарантировать глобальную асимптотическую устойчивость положения равновесия замкнутой системы управления.

Заключение

В результате проделанной работы выполнен синтез закона управления движением колесного робота с использованием метода оптимального демпфирования и метода линеаризации обратной связью. Приведено сравнение предложенных алгоритмов управления. Рассмотрен пример движения колесного робота в заданное положение. Продемонстрированы полученные результаты имитационного моделирования для выбранных методов. Данные результаты позволяют сделать вывод о корректности решения поставленной задачи.



References

- [1] Fialová A., Černý V. Synthesis of Control Law for Non-Linear Systems in Critical Case 1. *IFAC Proceedings Volumes*. 2001;34(13):385-390. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)39021-3](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)39021-3)
- [2] Dion J.-M., Commault C., van der Woude J. Generic Properties and Control of Linear Structured Systems. *IFAC Proceedings Volumes*. 2001;34(13):1-12. [https://doi.org/10.1016/S1474-6670\(17\)38960-7](https://doi.org/10.1016/S1474-6670(17)38960-7)
- [3] Siddikov I., Khalmatov D., Khushnazarova D. Synthesis of synergetic laws of control of nonlinear dynamic plants. *E3S Web of Conferences*. 2023;452:06024. <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202345206024>
- [4] Hongbo W. Optimizing ship motion with simplified nonlinear dynamics. *Automation and Remote Control*. 2018;(1):46-50. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: YSIOED
- [5] Sotnikova M., Veremey E., Zhabko N. Wheel angular velocity stabilization using rough encoder data. In: 2014 14th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2014). Gyeonggi-do, Korea (South): IEEE Computer Society; 2014. p. 1345-1350. <https://doi.org/10.1109/ICCAS.2014.6987765>
- [6] Lepikhin T. Time minimization for riding a mobile robot to the desired trajectory. *CEUR Workshop Proceedings*. 2016;1763:121-126. Available at: <https://ceur-ws.org/Vol-1763/paper15.pdf> (accessed 16.08.2023). (In Russ., abstract in Eng.)
- [7] Karmanov D.D., Lepikhin T.A., Zhabko N.A. On Some Problems of External Ballistics. *Modern Information Technologies and IT Education*. 2017;13(2):75-80. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.2017.2.243>
- [8] Lubimov E.V., Dyda A.A. Software development rapid synthesis of nonlinear robust adaptive control systems of complex dynamic objects. In: XL International Summer School – Conference “Advanced Problems in Mechanics” 2012 (APM-2012), Russia, St. Petersburg, July 2-8, 2012. Available at: <https://www.ipme.ru/ipme/conf/APM2012/2012-PDF/2012-237.pdf> (accessed 16.08.2023).
- [9] Blintsov V., Trunin K. Construction of a mathematical model to describe the dynamics of marine technical systems with elastic links in order to improve the process of their design. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2020;(1/9):56-66. <https://doi.org/10.15587/1729-4061.2020.197358>
- [10] Dyer B.M., Smith T.R., Gadsden S.A., Biglarbegian M. Filtering Strategies for State Estimation of Omnidirectional Robots. In: 2020 IEEE International Conference on Mechatronics and Automation (ICMA). Beijing, China: IEEE Computer Society; 2020. p. 186-191. <https://doi.org/10.1109/ICMA49215.2020.9233826>
- [11] Kumar E.V., Jerome J. LQR based Optimal Tuning of PID Controller for Trajectory Tracking of Magnetic Levitation System. *Procedia Engineering*. 2013;64:254-264. <https://doi.org/10.1016/j.proeng.2013.09.097>
- [12] Petrov Yu.P. *Sintez ustojchivyh sistem upravleniya, optimalnyh po srednekvadrachnym kriteriyam kachestva* [Design of stable control systems optimal in terms of R.M.S. performance criteria]. *Avtomatika i Telemekhanika*. 1983;(7):5-24. (In Russ., abstract in Eng.) Available at: https://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=at&paperid=5168&option_lang=eng (accessed 16.08.2023).
- [13] Sevinov J.U., Mallaev A.R., Xusanov S.N. Algorithms for the Synthesis of Optimal Linear-Quadratic Stationary Controllers. In: Aliev R.A., Yusupbekov N.R., Kacprzyk J., Pedrycz W., Sadikoglu F.M. (eds.) 11th World Conference “Intelligent System for Industrial Automation” (WCIS-2020). WCIS 2020. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. Vol. 1323. Cham: Springer; 2021. p. 64-71. https://doi.org/10.1007/978-3-030-68004-6_9
- [14] Treven L., Curi S., ır Mutny' M., Krause A. Learning Stabilizing Controllers for Unstable Linear Quadratic Regulators from a Single Trajectory. *Proceedings of Machine Learning Research*. 2021;144:1-38. Available at: <https://proceedings.mlr.press/v144/treven21a/treven21a.pdf> (accessed 16.08.2023).
- [15] Scampicchio A., Iannelli A. An update-and-design scheme for scenario-based LQR synthesis. In: 2022 American Control Conference (ACC). Atlanta, GA, USA: IEEE Computer Society; 2022. p. 932-939. <https://doi.org/10.23919/ACC53348.2022.9867600>
- [16] Parshukov A.N. Method of synthesis of a reduced-order modal regulator. *Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta. Upravlenie, vychislitel'naya tehnika i informatika* = Tomsk State University Journal of Control and Computer Science. 2021;(56):12-19. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.17223/19988605/56/2>
- [17] Sotnikova M.V., Tomilova A.S. Algorithms for the Robust Properties Analysis of a Multi-purpose Control Laws of Moving Objects. *Modern Information Technologies and IT-Education*. 2018;14(2):374-381. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.25559/SITITO.14.201802.374-381>
- [18] Krener A.J., Isidori A. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters*. 1983;3:47-52. Available at: <https://www.math.ucdavis.edu/~krener/26-50/29.SCL83.pdf> (accessed 16.08.2023).
- [19] Sontag E.D. A Lyapunov-Like Characterization of Asymptotic Controllability. *SIAM Journal of Control and Optimization*. 1983;21(3):462-471. <https://doi.org/10.1137/0321028>
- [20] Zenkin A.M., Peregudin A.A., Bobtsov A.A. Lyapunov function search method for analysis of nonlinear systems stability using genetic algorithm. *Scientific and Technical Journal of Information Technologies, Mechanics and Optics*. 2023;23(5):886-893. (In Russ., abstract in Eng.) <https://doi.org/10.17586/2226-1494-2023-23-5-886-893>
- [21] Veremey E.I. On practical application of Zubov's optimal damping concept. *Vestnik of Saint Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*. 2020;16(3):293-315. <https://doi.org/10.21638/11701/spbu10.2020.307>
- [22] Swe Lin Htoo Aung. Parametrical Synthesis of Control Law for Mobile Robot Motion in Urban Conditions. *Herald of the Bauman Moscow State Technical University. Series Instrument Engineering*. 2011;(1):46-56. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: NDXJNN
- [23] Sotnikova M.V., Gilyazova Yu.A., Selitskaya E.A. Robust Optimal Control Algorithms for Magnetic Levitation Plant. *CEUR Workshop Proceedings*. 2017;2064:325-334. Available at: <https://ceur-ws.org/Vol-2064/paper38.pdf> (accessed 16.08.2023). (In Russ., abstract in Eng.)



- [24] Tomilova A.S. Analysis of the robust properties of the ship motion control. *Control processes and stability*. 2018;5(1): 371-375. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: VLFNDN
- [25] Zhukov A.V. Method for calculating the interval values of the coefficients of the transfer function of automatic control systems. *Engineering Journal of Don*. 2022;12:170-177. (In Russ., abstract in Eng.) EDN: KYTPRL

*Поступила 16.08.2023; одобрена после рецензирования 24.09.2023; принята к публикации 02.10.2023.
Submitted 16.08.2023; approved after reviewing 24.09.2023; accepted for publication 02.10.2023.*

Об авторах:

Томилова Анастасия Сергеевна, аспирант кафедры компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики – процессов управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8074-754X>**, st040354@student.spbu.ru

Сотникова Маргарита Викторовна, заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем факультета прикладной математики – процессов управления, ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (199034, Российская Федерация, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9), доктор физико-математических наук, профессор, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0726-7448>**, m.sotnikova@spbu.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

About the authors:

Anastasia S. Tomilova, Postgraduate Student of the Chair of Computer Applications and Systems, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint-Petersburg State University (7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation), **ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8074-754X>**, st040354@student.spbu.ru

Margarita V. Sotnikova, Head of the Chair of Computer Applications and Systems, Faculty of Applied Mathematics and Control Processes, Saint Petersburg State University (7/9 Universitetskaya Emb., St Petersburg 199034, Russian Federation), Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor, **ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0726-7448>**, m.sotnikova@spbu.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

